ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 517.929

А. Н. Алисейко

МАТРИЦЫ ЛЯПУНОВА ДЛЯ КЛАССА СИСТЕМ С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМ ЯДРОМ

Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация,
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Проблема нахождения матриц Ляпунова возникает при анализе устойчивости линейных стационарных систем с запаздыванием с помощью метода функционалов Ляпунова—Красовского. Матрица Ляпунова есть решение матричного дифференциального уравнения с запаздыванием, удовлетворяющим двум дополнительным условиям. Известно, что условием существования и единственности матриц Ляпунова является условие Ляпунова, т. е. отсутствие у системы собственных чисел, расположенных симметрично относительно нуля комплексной плоскости. В то же время методы построения матриц Ляпунова разработаны лишь для некоторых классов систем. В данной работе рассматриваются системы уравнений с распределенным запаздыванием, имеющие экспоненциальное интегральное ядро. Они уже описывались в статье В. Л. Харитонова, где задача нахождения матриц Ляпунова была сведена к получению решений вспомогательной системы дифференциальных уравнений без запаздывания с граничными условиями. Предложенные ранее граничные условия не обеспечивают единственности решения вспомогательной системы, а полученные В. Л. Харитоновым результаты не гарантируют, что решение вспомогательной системы позволит построить матрицу Ляпунова. Эти проблемы существенно отличают данный класс систем от хорошо изученного класса систем с одним запаздыванием и возникают вследствие неоднозначности выбора граничных условий для вспомогательной системы. В настоящей статье вводятся новые граничные условия, которые позволяют построить теорию, полностью аналогичную случаю систем с одним запаздыванием. Показывается, что решение вспомогательной системы с новыми граничными условиями позволяет построить матрицу Ляпунова. Устанавливается эквивалентность существования и единственности решения вспомогательной системы и условия Ляпунова. Таким образом, проверка существования и единственности матрицы Ляпунова может быть произведена в процессе ее построения. Библиогр. 12 назв.

Ключевые слова: системы с запаздыванием, матрица Ляпунова.

A. N. Aliseyko

LYAPUNOV MATRICES FOR A CLASS OF SYSTEMS WITH EXPONENTIAL KERNEL

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg,
199034, Russian Federation

The problem of computation of Lyapunov matrices arises when Lyapunov—Krasovskii functionals are applied for stability analysis of linear time-invariant delay systems. A Lyapunov matrix is a solution of a matrix time-delay differential equation that satisfies two special

Алисейко Алексей Николаевич — студент; alexey.aliseyko@gmail.com

Aliseyko Alexey Nikolaevich — student; alexey.aliseyko@gmail.com

 DOI: 10.21638/11701/spbu10.2017.301

conditions. It was shown that there exists a unique Lyapunov matrix if and only if the Lyapunov condition is satisfied, i. e. time-delay system has no eigenvalues symmetric with respect to the origin. Nevertheless, computational methods for Lyapunov matrices exist only for several classes of time-delay systems. In this contribution, we study time-delay systems with distributed delay and exponential kernel. In a contribution of Kharitonov, the problem of finding a Lyapunov matrix for this class of time-delay systems was reduced to the computation of solutions to an auxiliary delay-free system of ordinary differential equations with boundary conditions. However, the boundary conditions that were proposed earlier are not sufficient for the uniqueness of solutions to the auxiliary system, and results reported in the paper by Kharitonov do not allow us to obtain the Lyapunov matrix from a solution to an auxiliary system. These substantial differences between this class of time-delay systems and the well-studied class of linear systems with one delay arise from ambiguity in the choice of boundary conditions for the auxiliary system. In this paper we propose a new set of boundary conditions that allows us to develop a theory similar to that of systems with one delay. It is shown that a solution of the auxiliary system with the new boundary conditions allows us to obtain the Lyapunov matrix. It is established that the auxiliary system admits a unique solution if and only if the Lyapunov condition is satisfied. Thus, one can verify existence and uniqueness of the Lyapunov matrix during its construction. Refs 12.

Keywords: time-delay systems, Lyapunov matrix.

Введение. Одним из методов анализа устойчивости систем с запаздыванием является метод функционалов Ляпунова—Красовского [1], который обобщает второй метод Ляпунова для обыкновенных дифференциальных уравнений. В статьях [2–4] было произведено построение функционалов для различных классов линейных стационарных систем с запаздыванием. В работе [5] были построены функционалы полного типа, производная которых зависит не только от текущего, но и от прошлых состояний системы. Это позволило оценить робастность и показать, что для некоторых классов систем с запаздыванием теорема Красовского дает не только достаточное, но и необходимое условие асимптотической устойчивости.

Для построения функционалов полного типа необходимо найти на конечном промежутке решение матричного уравнения с запаздыванием, которое дополнительно удовлетворяет некоторым специальным условиям. Это решение получило название «матрица Ляпунова». Хотя вопросы ее существования и единственности были разрешены в работах [4] и [6, 7] соответственно, методы ее построения разработаны лишь для некоторых классов систем [8–10]. Настоящая статья посвящена дополнению результатов для класса систем, рассмотренных в [11].

Определения и обозначения. Рассмотрим систему с запаздыванием вида

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + \sum_{i=1}^{m} \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) B_i x(t+\theta) d\theta, \tag{1}$$

где запаздывание $h > 0$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $A_0, A_1, B_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, а скалярные функции $\eta_i(\theta)$ удовлетворяют системе линейных дифференциальных уравнений

$$\eta_i'(\theta) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} \eta_j(\theta), \quad \alpha_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Введем обозначения:

$$\eta(\theta) = (\eta_1(\theta), \ldots, \eta_m(\theta))^T, \quad A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mm} \end{pmatrix}.$$

Пусть W — симметрическая матрица. Будем говорить, что матрица $U(t)$ является матрицей Ляпунова [8] уравнения (1), ассоциированной с W, если она удовлетворяет соотношениям

$$U'(t) = U(t)A_0 + U(t-h)A_1 + \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{-h}^{0} \eta_i(\theta)U(t+\theta)B_i d\theta, \quad t > 0,$$
$$U(-t) = U^T(t), \quad t \in \mathbb{R},$$
$$U'(+0) - U'(-0) = -W,$$

которые называются соответственно динамическим, симметрическим и алгебраическим свойствами. Отметим, что для построения функционала Ляпунова—Красовского полного типа [7] достаточно значений $U(t)$ при $t \in [-h, h]$.

Произведение Кронекера матриц M и N будем обозначать $M \otimes N$, т. е.

$$M \otimes N = \begin{pmatrix} m_{11}N & \dots & m_{1r}N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{p1}N & \dots & m_{pr}N \end{pmatrix},$$

где m_{ij} — соответствующие компоненты матрицы M. Заметим, что если для матриц M, N, S, T существуют произведения MS и NT, то $(M \otimes N)(S \otimes T) = MS \otimes NT$. Для нулевой матрицы используем обозначение $\mathbf{0}$.

Вспомогательная система. Пусть для некоторой симметрической матрицы W существует ассоциированная с ней матрица Ляпунова уравнения (1). Как и в статье [11], введем при $t \in [0, h]$ вспомогательные функции

$$Z(t) = U(t),$$
$$V(t) = U(t-h),$$
$$X_i(t) = \int\limits_{-h}^{0} \eta_i(\theta)U(t+\theta)d\theta,$$
$$Y_i(t) = \int\limits_{-h}^{0} \eta_i(\theta)V(t-\theta)d\theta,$$

в которых $i = 1, \dots, m$. Введем обозначения:

$$X(t) = \begin{bmatrix} X_1(t), \\ X_2(t), \\ \vdots \\ X_m(t) \end{bmatrix}, \quad Y(t) = \begin{bmatrix} Y_1(t), \\ Y_2(t), \\ \vdots \\ Y_m(t) \end{bmatrix}.$$

В работе [11] было показано, что набор функций $(Z(t),\ V(t),\ X(t),\ Y(t))$ удовлетворяет системе линейных дифференциальных уравнений

$$
\begin{cases}
Z'(t) = Z(t)A_0 + V(t)A_1 + \sum\limits_{i=1}^{m} X_i(t)B_i, \\
V'(t) = -A_0^T V(t) - A_1^T Z(t) - \sum\limits_{i=0}^{m} B_i^T Y_i(t), \\
X_i'(t) = \eta_i(0)Z(t) - \eta_i(-h)V(t) - \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_{ij} X_j(t), \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \\
Y_i'(t) = \eta_i(-h)Z(t) - \eta_i(0)V(t) + \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_{ij} Y_j(t), \quad 1 \leqslant i \leqslant m.
\end{cases} \tag{2}
$$

Рассмотрим обратную задачу: получить матрицу Ляпунова уравнения (1), используя решения системы (2). К сожалению, решение системы (2) с граничными условиями, рассмотренными в [11], часто не единственное. Из граничных условий, предлагаемых в [11], оставим следующие:

$$
\begin{gathered}
Z(0) = V(h), \\
-W = Z'(0) - V'(h) = \\
= \left[Z(0)A_0 + A_0^T V(h)\right] + \left[V(0)A_1 + A_1^T Z(h)\right] + \sum_{i=1}^{m} \left[X_i(0)B_i + B_i^T Y_i(h)\right].
\end{gathered} \tag{3}
$$

Рассмотрим такие группы новых граничных условий:

$$
X_i(0) = \int\limits_{-h}^{0} \eta_i(\theta) V(h+\theta) d\theta, \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \tag{4а}
$$

$$
X_i(h) = \int\limits_{-h}^{0} \eta_i(\theta) Z(h+\theta) d\theta, \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \tag{4б}
$$

$$
Y_i(0) = \int\limits_{-h}^{0} \eta_i(\theta) V(-\theta) d\theta, \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \tag{4в}
$$

$$
Y_i(h) = \int\limits_{-h}^{0} \eta_i(\theta) Z(-\theta) d\theta, \quad 1 \leqslant i \leqslant m. \tag{4г}
$$

Лемма 1. *Пусть функции* $(Z(t),\ V(t),\ X(t),\ Y(t))$ *удовлетворяют системе уравнений* (2), *тогда*

1) *условие* (4а) *выполнено тогда и только тогда, когда есть* (4б),

2) *условие* (4в) *выполнено тогда и только тогда, когда есть* (4г).

Доказательство. Докажем утверждение леммы для $X(t)$, доказательство для $Y(t)$ проводится аналогично.

Перепишем условия (4а) и (4б):

$$
X(0) = \int\limits_{-h}^{0} \eta(\theta) \otimes V(h+\theta) d\theta, \quad X(h) = \int\limits_{-h}^{0} \eta(\theta) \otimes Z(h+\theta) d\theta.
$$

Введем обозначение $\mathcal{A} = A \otimes E_n$, тогда из (2) получим следующую линейную неоднородную систему дифференциальных уравнений для $X(t)$:

$$X'(t) = \eta(0) \otimes Z(t) - \eta(-h) \otimes V(t) - \mathcal{A}X(t),$$

откуда

$$X(t) = e^{-\mathcal{A}t}X(0) + \int\limits_0^t e^{\mathcal{A}(\xi - t)} \left[\eta(0) \otimes Z(t) - \eta(-h) \otimes V(t)\right] d\xi.$$

Нетрудно проверить, что $e^{\mathcal{A}t} = e^{At} \otimes E_n$, тогда

$$X(t) = e^{-\mathcal{A}t}X(0) + \int\limits_0^t \left[e^{A(\xi - t)} \otimes E_n\right] \left[\eta(0) \otimes Z(\xi) - \eta(-h) \otimes V(\xi)\right] d\xi =$$

$$= e^{-\mathcal{A}t}X(0) + \int\limits_0^t \left[e^{A(\xi - t)}\eta(0) \otimes Z(\xi) - e^{A(\xi - t)}\eta(-h) \otimes V(\xi)\right] d\xi =$$

$$= e^{-\mathcal{A}t}X(0) + \int\limits_{-h}^{t-h} \left[\eta(\theta + h - t) \otimes Z(h + \theta) - \eta(\theta - t) \otimes V(h + \theta)\right] d\theta. \qquad (5)$$

С одной стороны, пусть выполнено условие (4а), тогда

$$e^{-\mathcal{A}h}X(0) = \left[e^{-Ah} \otimes E_n\right] \int\limits_{-h}^{0} \eta(\theta) \otimes V(h + \theta) d\theta =$$

$$= \int\limits_{-h}^{0} \eta(\theta - h) \otimes V(h + \theta) d\theta,$$

что вместе с (5) дает (4б).

С другой стороны, если выполнено (4б), то

$$X(h) = \int\limits_{-h}^{0} \eta(\theta) \otimes Z(h + \theta) d\theta =$$

$$= \int\limits_{-h}^{0} \eta(\theta - h) \otimes V(h + \theta) d\theta + \int\limits_{-h}^{0} \left[\eta(\theta) \otimes Z(h + \theta) - \eta(\theta - h) \otimes V(h + \theta)\right] d\theta.$$

Сравнивая с (5), находим

$$X(0) = e^{\mathcal{A}h} \int\limits_{-h}^{0} \eta(\theta - h) \otimes V(h + \theta) d\theta = \int\limits_{-h}^{0} \eta(\theta) \otimes V(h + \theta) d\theta. \qquad \square$$

Из леммы 1 видно, что имеются четыре эквивалентных способа выбрать граничные условия из (4): (4а) и (4в), (4а) и (4г), (4б) и (4в), (4б) и (4г). Таким образом, получим систему уравнений (2) относительно $2m+2$ функций, а также $2m+2$ граничных условия (3) и, например, (4а), (4в). Далее будем просто предполагать, что условия (4а)–(4г) выполнены, не указывая, какой из четырех различных наборов граничных условий был взят в качестве исходного.

Замена переменных в (5) приводит к следующему утверждению.

Следствие 1. *Пусть для решения* $(Z(t),\ V(t),\ X(t),\ Y(t))$ *системы* (2) *выполнены условия* (4а)–(4г), *тогда*

$$X_i(t) = \int\limits_{-h}^{-t} \eta_i(\theta) V(t+h+\theta) d\theta + \int\limits_{-t}^{0} \eta_i(\theta) Z(t+\theta) d\theta,$$

$$Y_i(t) = \int\limits_{-h}^{t-h} \eta_i(\theta) Z(t-\theta-h) d\theta + \int\limits_{t-h}^{0} \eta_i(\theta) V(t-\theta) d\theta.$$

Лемма 2. *Пусть существует решение системы* (2), *удовлетворяющее* (3), (4а)–(4г), *тогда матричная функция* $U(t)$, *определенная как*

$$U(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left[Z(t) + V^T(h-t)\right], & 0 \leqslant t \leqslant h, \\ \dfrac{1}{2}\left[V(h+t) + Z^T(-t)\right], & -h \leqslant t < 0, \end{cases}$$

является матрицей Ляпунова системы (1), *ассоциированной с* W.

Доказательство. Непосредственно из определения вытекает, что для всех $t \neq 0$ выполняется $U(t) = U^T(-t)$, т. е. для проверки симметрического свойства остается рассмотреть $t = 0$:

$$U(0) = \frac{1}{2}\left[Z(0) + V^T(h)\right] = \frac{1}{2}\left[V(h) + Z^T(0)\right] = U^T(0).$$

Далее, симметричность $U(0)$ влечет и непрерывность $U(t)$ при всех t, очевидна и дифференцируемость при $t \neq 0$.

Покажем, что и динамическое свойство выполнено. Пусть $t \in (0, h]$, тогда

$$U'(t) = U(t)A_0 + U(t-h)A_1 + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2}\left[X_i(t) + Y_i^T(h-t)\right] B_i.$$

Из следствия 1 получим равенства

$$\frac{1}{2}\left[X_i(t) + Y_i^T(h-t)\right] = \frac{1}{2}\int\limits_{-h}^{-t} \eta_i(\theta)\left[V(h+t+\theta) + Z^T(-t-\theta)\right] d\theta +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{-t}^{0} \eta_i(\theta)\left[Z(t+\theta) + V^T(h-t-\theta)\right] d\theta =$$

$$= \int\limits_{-h}^{0} \eta_i(\theta) U(t+\theta) d\theta.$$

Из них следует динамическое свойство:

$$U'(t) = U(t)A_0 + U(t-h)A_1 + \sum_{i=1}^{m} \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta)U(t+\theta)B_i d\theta.$$

Остается показать, что и алгебраическое свойство выполнено. Действительно,

$$\begin{aligned} U'(+0) - U'(-0) &= \frac{1}{2}\left[Z'(0) - V'^T(h)\right] - \frac{1}{2}\left[V'(h) - Z'^T(0)\right] = \\ &= \frac{1}{2}\left[Z'(0) - V'(h)\right] + \frac{1}{2}\left[Z'(0) - V'(h)\right]^T = \\ &= -\frac{1}{2}W - \frac{1}{2}W^T = -W. \end{aligned}$$ □

Теорема 1. *Пусть существует единственное решение* $(Z(t),\ V(t),\ X(t),\ Y(t))$ *системы* (2), *удовлетворяющее* (3), (4а)–(4г), *тогда матричная функция* $U(t)$, *определенная как*

$$U(t) = \begin{cases} Z(t), & 0 \leqslant t \leqslant h, \\ Z^T(-t), & -h \leqslant t < 0, \end{cases}$$

является единственной матрицей Ляпунова системы (1), *ассоциированной с* W.

Доказательство. Введем функции

$$\begin{aligned} \widetilde{Z}(t) &= V^T(h-t), \\ \widetilde{V}(t) &= Z^T(h-t), \\ \widetilde{X}_i(t) &= Y_i^T(h-t), \qquad 1 \leqslant i \leqslant m, \\ \widetilde{Y}_i(t) &= X_i^T(h-t), \qquad 1 \leqslant i \leqslant m. \end{aligned}$$

Непосредственной подстановкой легко проверить, что $(\widetilde{Z}(t),\ \widetilde{V}(t),\ \widetilde{X}(t),\ \widetilde{Y}(t))$ также есть решение системы (2), удовлетворяющее (3), (4а)–(4г). Так как такое решение единственно, то

$$(Z(t), V(t), X(t), Y(t)) = (\widetilde{Z}(t), \widetilde{V}(t), \widetilde{X}(t), \widetilde{Y}(t)).$$

В частности, $Z(t) = V^T(h-t)$, и заданная в формулировке теоремы функция $U(t)$ является матрицей Ляпунова, построенной по лемме 2.

Согласно [11] и по построению граничных условий, любая матрица Ляпунова дает решение системы (2) с граничными условиями (3), (4а)–(4г). Так как получаемые таким образом решения, соответствующие разным матрицам Ляпунова, будут различны, то из единственности решения данной системы следует единственность матрицы Ляпунова. □

Вспомогательное утверждение. Докажем вспомогательное утверждение, которое потребуется для установления эквивалентности единственности решения вспомогательной системы и единственности матрицы Ляпунова.

Лемма 3. *Пусть* $(Z(t), V(t), X(t), Y(t))$ *— решение системы* (2), *удовлетворяющее* (3), (4а)–(4г) *при* $W = \mathbf{0}$. *Тогда для всех* $t \in \mathbb{R}$ *выполняется*

$$Z(t) = V(h+t).$$

Доказательство. Система (2) — это система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, поэтому любое ее решение является аналитической на $\mathbb{R}$ функцией, а значит, и $C^\infty(\mathbb{R})$ функцией. Дифференцируя (2), получим, что $(Z'(t), V'(t), X'(t), Y'(t))$ также есть решение данной системы. Проверим, что граничные условия (с $W = \mathbf{0}$) оказываются выполнены и для производных.

Так как $W = \mathbf{0}$, то

$$Z'(0) = V'(h),$$

также из $V(h) = Z(0)$ и (4а)–(4г) имеем

$$\int\limits_{-h}^{0} \eta_i(\theta)V'(h+\theta)d\theta = \eta_i(0)V(h) - \eta_i(-h)V(0) - \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} \int\limits_{-h}^{0} \eta_j(\theta)V(h+\theta)d\theta =$$

$$= \eta_i(0)Z(0) - \eta_i(-h)V(0) - \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} X_j(0) = X_i'(0),$$

$$\int\limits_{-h}^{0} \eta_i(\theta)V'(-\theta)d\theta = -\eta_i(0)V(0) + \eta_i(-h)V(h) + \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} \int\limits_{-h}^{0} \eta_j(\theta)V(-\theta)d\theta =$$

$$= \eta_i(-h)Z(0) - \eta_i(0)V(0) + \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} Y_j(0) = Y_i'(0),$$

но тогда по лемме 1 условия (4а)–(4г) выполнены и для производных. Остается проверить, что

$$Z''(0) - V''(h) = \mathbf{0}.$$

Ясно, что

$$Z''(0) - V''(h) = Z'(0)A_0 + V'(0)A_1 + A_0^T V'(h) + A_1^T Z'(h) + \sum_{i=1}^{m} \left[X_i'(0)B_i + B_i^T Y_i'(h) \right].$$

Заметим, что

$$Z'(0)A_0 + V'(0)A_1 + A_0^T V'(h) + A_1^T Z'(h) = V'(h)A_0 + V'(0)A_1 + A_0^T Z'(0) + A_1^T Z'(h).$$

Тогда нетрудно получить, что

$$Z''(0) - V''(h) = \sum_{i=1}^{m} \left[X_i'(0) + A_0^T X_i(0) + A_1^T X_i(h) \right] B_i +$$
$$+ \sum_{i=1}^{m} B_i^T \left[Y_i'(h) - Y_i(h)A_0 - Y_i(0)A_1 \right].$$

Преобразуем выражения в квадратных скобках последнего равенства:

$$X_i'(0) + A_0^T X_i(0) + A_1^T X_i(h) = \int\limits_{-h}^{0} \eta_i(\theta) \left[V'(h+\theta) + A_0^T V(h+\theta) + A_1^T Z(h+\theta) \right] d\theta =$$

$$= -\sum_{j=1}^{m} B_j^T \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) Y_j(h+\theta) d\theta,$$

$$Y_i'(h) - Y_i(h)A_0 - Y_i(0)A_1 = \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) \left[Z'(-\theta) - Z(-\theta)A_0 - V(-\theta)A_1 \right] d\theta =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) X_j(-\theta) d\theta B_j.$$

Покажем, что

$$\int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) X_j(-\theta) d\theta = \int_{-h}^{0} \eta_j(\theta) Y_i(h+\theta) d\theta = \mathcal{I}_{ij}.$$

Действительно, из следствия 1 имеем

$$\int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) X_j(-\theta) d\theta = \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) \left[\int_{-h}^{\theta} \eta_j(\xi) V(-\theta+h+\xi) d\xi + \int_{\theta}^{0} \eta_j(\xi) Z(-\theta+\xi) d\xi \right] d\theta =$$

$$= \int_{-h}^{0} \eta_j(\xi) \left[\int_{\xi}^{0} \eta_i(\theta) V(h+\xi-\theta) d\theta + \int_{-h}^{\xi} \eta_i(\theta) Z(\xi-\theta) d\theta \right] d\xi =$$

$$= \int_{-h}^{0} \eta_j(\xi) Y_i(h+\xi) d\xi.$$

Учтем полученные выше равенства в выражении для $Z''(0) - V''(h)$:

$$Z''(0) - V''(h) = -\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} B_j^T \mathcal{I}_{ji} B_i + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} B_i^T \mathcal{I}_{ij} B_j = \mathbf{0}.$$

Таким образом, производные исходного решения также удовлетворяют системе (2) с граничными условиями (3), (4а)–(4г) при $W = \mathbf{0}$. По индукции, для всех $k \geqslant 0$ функции $(Z^{(k)}(t), V^{(k)}(t), X^{(k)}(t), Y^{(k)}(t))$ являются решением системы (2) с граничными условиями (3), (4а)–(4г). В частности, для всех $k \geqslant 0$ выполнено

$$Z^{(k)}(0) = V^{(k)}(h).$$

Из аналитичности функций $Z(t)$ и $V(h+t)$ следует требуемое: $Z(t) = V(h+t)$. □

Из леммы 3 и следствия 1 непосредственно получим

Следствие 2. *Пусть* $(Z(t), V(t), X(t), Y(t))$ *— решение системы* (2), *удовлетворяющее* (3), (4а)–(4г) *при* $W = \mathbf{0}$. *Тогда для всех* $t \in \mathbb{R}$ *выполняются равенства*

$$X_i(t) = \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) Z(t+\theta) d\theta,$$

$$Y_i(t) = \int\limits_{-h}^{0} \eta_i(\theta) V(t-\theta) d\theta.$$

Условие Ляпунова. Пусть Λ — спектр системы (1), т. е. множество всех собственных чисел [12]

$$\Lambda = \left\{ s \in \mathbb{C} : \det \left[sE_n - A_0 - e^{-sh} A_1 - \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{-h}^{0} \eta_i(\theta) e^{s\theta} d\theta B_j \right] = 0 \right\}.$$

Будем говорить, что система (1) удовлетворяет условию Ляпунова, если не существует числа $s_0 \in \mathbb{C}$ такого, что $s_0 \in \Lambda$ и $-s_0 \in \Lambda$.

Теорема 2. *Эквивалентны следующие утверждения*:

1) существует единственное решение вспомогательной системы (2) *с граничными условиями* (3), (4а)–(4г);

2) существует единственная матрица Ляпунова, ассоциированная с W;

3) система (1) *удовлетворяет условию Ляпунова.*

Доказательство. То, что из утверждения 1 следует утверждение 2, было доказано в теореме 1.

Эквивалентность утверждений 2 и 3 показана в работах [4, 7].

Покажем, что из утверждения 3 вытекает утверждение 1, а точнее, что если утверждение 1 не выполнено, то не выполнено и условие Ляпунова. Любое решение системы (2) линейно относительно начальных условий $(Z(0), V(0), X(0), Y(0))$, поэтому граничные условия (3), (4а)–(4г) образуют систему линейных уравнений относительно начальных условий. Значит, отрицание утверждения 1 эквивалентно существованию нетривиального решения соответствующей однородной системы, что возможно тогда и только тогда, когда есть нетривиальное решение $(Z(t), V(t), X(t), Y(t)) \not\equiv \mathbf{0}$ вспомогательной системы с граничными условиями при $W = \mathbf{0}$.

Для данного решения по лемме 3 и следствию 2 имеем соотношения

$$V(t) = Z(t-h),$$
$$X_i(t) = \int\limits_{-h}^{0} \eta_i(\theta) Z(t+\theta) d\theta,$$
$$Y_i(t) = \int\limits_{-h}^{0} \eta_i(\theta) V(t-\theta) d\theta.$$

Из них очевидно, что $Z(t) \not\equiv \mathbf{0}$ (в противном случае решение тривиально). Аналогично, $V(t) \not\equiv \mathbf{0}$.

Любое решение системы (2) имеет вид

$$\begin{aligned} Z(t) &= \sum_{k=1}^{\mu} e^{s_k t} \mathcal{P}_k(t), \quad & V(t) &= \sum_{k=1}^{\mu} e^{s_k t} \mathcal{Q}_k(t), \\ X_i(t) &= \sum_{k=1}^{\mu} e^{s_k t} \mathcal{R}_{ik}(t), \quad & Y_i(t) &= \sum_{k=1}^{\mu} e^{s_k t} \mathcal{S}_{ik}(t), \end{aligned} \tag{6}$$

где $1 \leqslant i \leqslant m$; $s_1, s_2, \ldots, s_\mu$ — различные собственные числа системы (2); $\mathcal{P}_k(t)$, $\mathcal{Q}_k(t)$, $\mathcal{R}_{ik}(t)$, $\mathcal{S}_{ik}(t)$ — полиномы с матричными коэффициентами. Так как $Z(t) \not\equiv \mathbf{0}$, то для некоторого номера d выполнено $\mathcal{P}_d(t) \not\equiv \mathbf{0}$, т. е. $\mathcal{P}_d(t) = t^l P_0 + \ldots + P_l$ с $P_0 \neq \mathbf{0}$. Но тогда

$$V(t) = Z(t-h) = \sum_{k=1}^{\mu} e^{s_k t} e^{-s_k h} \mathcal{P}_k(t-h),$$

откуда $\deg \mathcal{Q}_d(t) = l$ и старший коэффициент $\mathcal{Q}_d(t)$ равен $P_0 e^{-s_d h}$. Далее,

$$X_i(t) = \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) Z(t+\theta) d\theta = \sum_{k=1}^{\mu} e^{s_k t} \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) e^{s_k \theta} \mathcal{P}_k(t+\theta) d\theta,$$

$$Y_i(t) = \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) V(t-\theta) d\theta = \sum_{k=1}^{\mu} e^{s_k t} \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) e^{-s_k \theta} \mathcal{Q}_k(t-\theta) d\theta,$$

значит, $\deg \mathcal{R}_{id}(t) \leqslant l$, $\deg \mathcal{S}_{id}(t) \leqslant l$, и полиномы $\mathcal{R}_{id}(t)$, $\mathcal{S}_{id}(t)$ имеют при t^l коэффициенты

$$\int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) e^{s_d \theta} d\theta P_0, \quad e^{-s_d h} \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) e^{-s_d \theta} d\theta P_0$$

соответственно. Подставим представления (6) в систему (2):

$$\sum_{k=1}^{\mu} e^{s_k t} \left[s_k \mathcal{P}_k(t) + \mathcal{P}_k'(t) \right] = \sum_{k=1}^{\mu} e^{s_k t} \left[\mathcal{P}_k(t) A_0 + \mathcal{Q}_k(t) A_1 + \sum_{i=1}^{m} \mathcal{R}_{ik}(t) B_i \right],$$

$$\sum_{k=1}^{\mu} e^{s_k t} \left[s_k \mathcal{Q}_k(t) + \mathcal{Q}_k'(t) \right] = -\sum_{k=1}^{\mu} e^{s_k t} \left[A_1^T \mathcal{P}_k(t) + A_1^T \mathcal{Q}_k(t) + \sum_{i=1}^{m} B_i^T \mathcal{S}_{ik}(t) \right].$$

Так как все показатели s_k различны, то равенство квазиполиномов возможно только при равенстве полиномиальных множителей, значит,

$$s_d \mathcal{P}_d(t) + \mathcal{P}_d'(t) = \mathcal{P}_d(t) A_0 + \mathcal{Q}_d(t) A_1 + \sum_{i=1}^{m} \mathcal{R}_{id}(t) B_i,$$

$$-s_d \mathcal{Q}_d(t) - \mathcal{Q}_d'(t) = A_1^T \mathcal{P}_d(t) + A_0^T \mathcal{Q}_d(t) + \sum_{i=1}^{m} B_i^T \mathcal{S}_{id}(t).$$

Рассматривая коэффициенты при t^l, получим

$$s_d P_0 = P_0 \left[A_0 + e^{-s_d h} A_1 + \sum_{i=1}^{m} \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) e^{s_d \theta} d\theta B_i \right],$$

$$-s_d e^{-s_d h} P_0 = \left[e^{s_d h} A_1^T + A_0^T + \sum_{i=1}^{m} \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) e^{-s_d \theta} d\theta B_i^T \right] e^{-s_d h} P_0.$$

Так как $P_0 \neq \mathbf{0}$, то

$$\det\left[s_d E_n - A_0 - e^{-s_d h} A_1 - \sum_{i=1}^{m} \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) e^{s_d \theta} d\theta B_i\right] = 0,$$

$$\det\left[-s_d E_n - A_0 - e^{s_d h} A_1 - \sum_{i=1}^{m} \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) e^{-s_d \theta} d\theta B_i\right] = 0,$$

значит, $s_d \in \Lambda$ и $-s_d \in \Lambda$, что и требовалось доказать. □

Заключение. Рассмотрен класс систем с запаздыванием, для которого возможно нахождение матрицы Ляпунова. Предложены новые граничные условия (относительно рассмотренных в статье [11]), которые позволяют определить матрицу Ляпунова по решению вспомогательной системы. Получено условие существования и единственности матрицы Ляпунова, которое сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений и проверяется непосредственно в процессе построения матрицы Ляпунова.

Литература

1. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.

2. *Repin Iu. M.* Quadratic Liapunov functionals for systems with delay // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1965. Vol. 29, N 3. P. 669–672.

3. *Infante E. F., Castelan W. B.* A Liapunov functional for a matrix difference-differential equation // Journal of Differential Equations. 1978. Vol. 29, N 3. P. 439–451.

4. *Huang W.* Generalization of Liapunov's theorem in a linear delay system // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1989. Vol. 142, N 1. P. 83–94.

5. *Kharitonov V. L., Zhabko A. P.* Lyapunov—Krasovskii approach to the robust stability analysis of time-delay systems // Automatica. 2003. Vol. 39, N 1. P. 15–20.

6. *Kharitonov V. L.* On the uniqueness of Lyapunov matrices for a time-delay system // Systems & Control Letters. 2012. Vol. 61, N 3. P. 397–402.

7. *Kharitonov V. L.* Time-delay systems: Lyapunov functionals and matrices. Basel: Birkhäuser, 2013. 311 p.

8. *Kharitonov V. L., Plischke E.* Lyapunov matrices for time-delay systems // Systems & Control Letters. 2006. Vol. 55, N 9. P. 697–706.

9. *Garcia-Lozano H., Kharitonov V. L.* Lyapunov matrices for time delay systems with commensurate delays // 2nd IFAC Symposium on System, Structure and Control / ed. S. Mondié. Oaxaca, Mexico: IFAC, 2004. Vol. 1. P. 102–106.

10. *Алисейко А. Н.* Матрицы Ляпунова для класса уравнений с распределенным запаздыванием // Процессы управления и устойчивость. 2016. Т. 3(19), № 1. С. 68–74.

11. *Kharitonov V. L.* Lyapunov matrices for a class of time delay systems // Systems & Control Letters. 2006. Vol. 55, N 7. P. 610–617.

12. *Bellman R., Cooke K. L.* Differential-difference equations. New York: Academic Press, 1963. 482 p.

Для цитирования: *Алисейко А. Н.* Матрицы Ляпунова для класса систем с экспоненциальным ядром // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2017. Т. 13. Вып. 3. С. 228–240. DOI: 10.21638/11701/spbu10.2017.301

References

1. Krasovskii N. N. *Nekotorye zadachi teorii ustojchivosti dvizheniya* [*Some problems of the stability of motion*]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1959, 211 p. (In Russian)

2. Repin Iu. M. Quadratic Liapunov functionals for systems with delay. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1965, vol. 29, no. 3, pp. 669–672.

3. Infante E. F., Castelan W. B. A Liapunov functional for a matrix difference-differential equation. *Journal of Differential Equations*, 1978, vol. 29, no. 3, pp. 439–451.

4. Huang W. Generalization of Liapunov's theorem in a linear delay system. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1989, vol. 142, no. 1, pp. 83–94.

5. Kharitonov V. L., Zhabko A. P. Lyapunov—Krasovskii approach to the robust stability analysis of time-delay systems. *Automatica*, 2003, vol. 39, no. 1, pp. 15–20.

6. Kharitonov V. L. On the uniqueness of Lyapunov matrices for a time-delay system. *Systems & Control Letters*, 2012, vol. 61, no. 3, pp. 397–402.

7. Kharitonov V. L. *Time-delay systems: Lyapunov functionals and matrices.* Basel, Birkhäuser Publ., 2013, 311 p.

8. Kharitonov V. L., Plischke E. Lyapunov matrices for time-delay systems. *Systems & Control Letters*, 2006, vol. 55, no. 9, pp. 697–706.

9. Garcia-Lozano H., Kharitonov V. L. Lyapunov matrices for time delay systems with commensurate delays. *2nd IFAC Symposium on System, Structure and Control.* Ed. by S. Mondié. Oaxaca, Mexico, IFAC, 2004, vol. 1, pp. 102–106.

10. Aliseyko A. N. Matritsy Lyapunova dlya klassa uravnenij s raspredelyonnym zapazdyvaniem [Lyapunov matrices for a class of equations with distributed delay]. *Processy upravleniya i ustojchivost'* [*Control Processes and Stability*], 2016, vol. 3(19), no. 1, pp. 68–74. (In Russian)

11. Kharitonov V. L. Lyapunov matrices for a class of time delay systems. *Systems & Control Letters*, 2006, vol. 55, no. 7, pp. 610–617.

12. Bellman R., Cooke K. L. *Differential-difference equations.* New York, Academic Press, 1963, 482 p.

For citation: Aliseyko A. N. Lyapunov matrices for a class of systems with exponential kernel. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2017, vol. 13, iss. 3, pp. 228–240. DOI: 10.21638/11701/spbu10.2017.301

Статья рекомендована к печати проф. В. Л. Харитоновым.

Статья поступила в редакцию 16 февраля 2017 г.

Статья принята к печати 8 июня 2017 г.