УДК 539.3+519.6 Вестник СПбГУ. Прикладная математика. Информатика... 2025. Т. 21. Вып. 1
MSC 35C10, 74B05, 74E10, 74G10

«Размерный эффект» при изгибе прямоугольников из вспененных материалов

Д. П. Голоскоков[1], *А. В. Матросов*[2]

[1] Санкт-Петербургский государственный университет путей сообщения императора Александра I, Российская Федерация, 190031, Санкт-Петербург, Московский пр., 9
[2] Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Голоскоков Д. П., Матросов А. В.* «Размерный эффект» при изгибе прямоугольников из вспененных материалов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2025. Т. 21. Вып. 1. С. 16–27. https://doi.org/10.21638/spbu10.2025.102

Методом начальных функций (МНФ) в прямоугольной декартовой системе координат Oxy исследуется поведение изделий из вспененных материалов на основе моментной теории упругости. Начальные функции в решении МНФ представлены тригонометрическими рядами, что позволило решить граничную задачу деформирования микрополярного прямоугольника ($h \times l$) с произвольными граничными условиями на сторонах $x = 0, h$ и свободным опиранием ($\sigma_y = 0$, $u = 0$, $\mu_y = 0$) на сторонах $y = 0, l$. Приведены результаты вычислительных экспериментов, показывающих влияние отношения размеров прямоугольника и его высоты на проявление «размерного эффекта» для синтактической пены и пенополиуретана. Определены предельные линейные размеры прямоугольника, с уменьшением которых начинает проявляться «размерный эффект».

Ключевые слова: моментная теория упругости, плоское деформированное состояние, метод начальных функций, точное решение, вспененные материалы.

1. Введение. Эксперименты, связанные с изгибом образцов из вспененных материалов (пенополиуретан и синтактическая пена) [1–3], показали, что они не подчиняются законам классической теории упругости и для них следует использовать уравнения моментной теории упругости.

Одной из таких теорий является микрополярная, или теория Коссера. Механика сплошных сред Коссера развивается с начала XX в. Братья Коссера были первыми, кто в своей работе [4] предложили теорию упругой среды, учитывающую не только напряжения, но и моменты. После этой фундаментальной работы наступило долгое затишье. Только в 1960-е годы такая модель вновь привлекла внимание научного сообщества. Исследования Миндлина [5], Тупина [6] и Аэро [7] по сути заново открыли теорию Коссера. Авторы работ [8, 9] расширили концепцию континуума Коссера, добавив микроинерционные эффекты, и переименовали данную теорию в микрополярную.

Аналитические решения изгиба микрополярного упругого прямоугольника практически отсутствуют. На момент написания статьи авторам известны два решения: со смешанными граничными условиями [10] и шарнирным опиранием [11] на двух противоположных сторонах. Отметим, что в последней работе решение получено методом начальных функций (МНФ) и позволяет удовлетворить произвольным граничным условиям на остальных двух сторонах прямоугольника.

В настоящей работе с помощью указанного решения МНФ исследуется «размерный эффект» при изгибе прямоугольника в зависимости от отношения его сторон и изменения значения одной из них.

2. Постановка задачи и метод решения. Рассматривается изгиб микрополярного упругого прямоугольника $h \times l$, находящегося в условиях плоской деформации, под действием нормальных и касательных усилий на его верхней грани $y = 0$ (рис. 1). Дифференциальные уравнения равновесия микрополярного упругого кон-

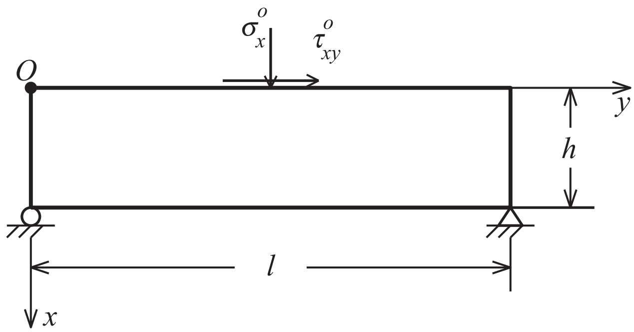

Рис. 1. Расчетная схема упругого микрополярного прямоугольника высотой h, длиной l под действием нормальной σ_x и касательной τ_{xy} нагрузок на стороне $x = 0$

тинуума в прямоугольной декартовой системе координат Oxy в компонентной форме записываются в виде [12]

$$
\begin{aligned}
(\lambda + 2\,\mu)\,(u_{xx} + v_{xy}) + (\mu + \alpha)\,(u_{yy} - v_{xy}) + 2\,\alpha\,\omega_y = 0,\\
(\lambda + 2\,\mu)\,(u_{xy} + v_{yy}) + (\mu + \alpha)\,(v_{xx} - u_{xy}) - 2\,\alpha\,\omega_x = 0,\\
(\gamma + \epsilon)\,(\omega_{xx} + \omega_{yy}) - 4\,\alpha\,\omega + 2\,\alpha\,(v_x - u_y) = 0,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где $u = u\,(x, y)$, $v = v\,(x, y)$ — перемещения вдоль осей Ox, Oy соответственно; $\omega = \omega\,(x, y)$ — угол поворота элементарной частицы в плоскости Oxy. Индексы x и y означают частные производные по соответствующим переменным. Отметим, что уравнения (1) моделируют плоское деформированное состояние изотропного тела в классической теории упругости, если $\alpha = 0$, $\gamma = 0$ и $\epsilon = 0$.

Решение системы (1) в соответствии с алгоритмом МНФ ищется в виде линейной комбинации компонентов напряженно-деформированного состояния $u^0(y), v^0(y)$, $\omega^0(y)$, $\sigma_x^0(y)$, $\tau_{xy}^0(y)$ и $\mu_x^0(y)$, определенных на линии $x = 0$ [11, 13]:

$$
\begin{aligned}
u = L_{11}u_0\,(y) + L_{12}v_0\,(y) + L_{13}\omega_0\,(y) + L_{14}\sigma_x^0\,(y) + L_{15}\tau_{xy}^0\,(y) + L_{16}\mu_x^0\,(y)\,,\\
v = L_{21}u_0\,(y) + L_{22}v_0\,(y) + L_{23}\omega_0\,(y) + L_{24}\sigma_x^0\,(y) + L_{25}\tau_{xy}^0\,(y) + L_{26}\mu_x^0\,(y)\,,\\
\omega = L_{31}u_0\,(y) + L_{32}v_0\,(y) + L_{33}\omega_0\,(y) + L_{34}\sigma_x^0\,(y) + L_{35}\tau_{xy}^0\,(y) + L_{36}\mu_x^0\,(y)\,.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Здесь $L_{ij} = L_{ij}\,(x, \beta)$, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, \ldots, 6$, — операторы-функции (операторы МНФ), зависящие от переменной x и символа β, представляющего оператор дифференцирования по переменной y. Функции $v_0\,(y)$, $v_0\,(y)$, $\omega_0\,(y)$, $\sigma_x^0\,(y)$, $\tau_{xy}^0\,(y)$ и $\mu_x^0\,(y)$ называются *начальными*. Операторы-функции L_{ij} находятся с помощью известного алгоритма метода начальных функций [13–16].

Кинематические характеристики можно получить из решения (6), вычислив результаты воздействия операторов МНФ на соответствующие начальные функции, если в качестве последних выбрать тригонометрические функции следующего вида:

$$
\begin{aligned}
u^0 = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^0 \sin(\beta_n y), \quad v^0 = \sum_{n=0}^{\infty} v_n^0 \cos(\beta_n y), \quad \omega^0 = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n^0 \cos(\beta_n y),\\
\sigma_x^0 = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{x,n}^0 \sin(\beta_n y), \quad \tau_{xy}^0 = \sum_{n=0}^{\infty} \tau_{xy,n}^0 \cos(\beta_n y), \quad \mu_x^0 = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_{x,n}^0 \cos(\beta_n y).
\end{aligned}
\tag{3}
$$

В (3) $\beta_n = \dfrac{n\pi}{l}$ и $u_n^0, v_n^0, \omega_n^0, \sigma_{x,n}^0, \tau_{xy,n}^0, \mu_{x,n}^0$ — вещественные коэффициенты. Такой вид начальных функций соответствует периодической нагрузке упругого полупространства, находящегося в условиях плоской деформации. Если упругое полупространство ограничить плоскостью $x = h$, то получим периодически нагруженный слой, а если из него вырезать призму плоскостями $y = 0, l$, то будем иметь свободно опертый ($\sigma_y = 0$, $\mu_y = 0$, $u = 0$) по этим сторонам прямоугольник ($h \times l$).

В работе [11] получены операторы МНФ L_{ij} и приведены результаты их воздействия $\widetilde{L}_{ij}$ на соответствующие тригонометрические функции:

$$
\begin{gathered}
\widetilde{L}_{11} = \frac{\left(-(\gamma+\epsilon)\beta_n^2 + 2\mu\right)\cosh(\beta_n x)}{2\mu} + \frac{(\gamma+\epsilon)\beta_n^2}{2\mu}\cosh(\xi_n x) - \\
- \frac{\beta_n (\lambda+\mu)\sinh(\beta_n x)\, x}{\lambda + 2\mu},\\
\widetilde{L}_{12} = \frac{(\lambda+\mu)\cosh(\beta_n x)\beta_n x}{\lambda+2\mu} + \frac{\left((\gamma+\epsilon)(\lambda+2\mu)\beta_n^2 - 2\mu^2\right)\sinh(\beta_n x)}{2\mu(\lambda+2\mu)} - \\
- \frac{(\gamma+\epsilon)\beta_n^3}{2\xi_n}\sinh(\xi_n x),\\
\widetilde{L}_{13} = \frac{(\gamma+\epsilon)\beta_n(\cosh(\xi_n x) - \cosh(\beta_n x))}{2\mu},\\
\widetilde{L}_{14} = -\frac{x(\lambda+\mu)\cosh(\beta_n x)}{2\mu(\lambda+2\mu)} + \\
+ \frac{\left(-(\gamma+\epsilon)\beta_n^2(\lambda+2\mu) + 2\mu(\lambda+3\mu)\right)\sinh(\beta_n x)}{4(\lambda+2\mu)\mu^2\beta_n} + \\
+ \frac{(\gamma+\epsilon)\beta_n^2}{2\xi_n\mu^2}\sinh(\xi_n x),\\
\widetilde{L}_{15} = \frac{(\gamma+\epsilon)\beta_n\cosh(\beta_n x)}{4\mu^2} + \frac{x(\lambda+\mu)\sinh(\beta_n x)}{2\mu(\lambda+2\mu)} - \frac{(\gamma+\epsilon)\beta_n}{4\mu^2}\cosh(\xi_n x),\\
\widetilde{L}_{16} = -\frac{\sinh(\beta_n x)}{2\mu} + \frac{\beta_n}{2\mu\xi_n}\sinh(\xi_n x);
\end{gathered}
\tag{4}
$$

$$\widetilde{L}_{21} = -\frac{(\lambda+\mu)\cosh(\beta_n x)\,\beta_n x}{\lambda+2\mu} - \frac{\left((\gamma+\epsilon)(\lambda+2\mu)\beta_n^2 + 2\mu^2\right)\sinh(\beta_n x)}{2\mu\,(\lambda+2\mu)} +$$

$$+\ \frac{(\gamma+\epsilon)\,\beta_n\,\xi_n}{2\mu}\sinh(\xi_n x),$$

$$\widetilde{L}_{22} = \frac{\left((\gamma+\epsilon)\,\beta_n^2 + 2\mu\right)\cosh(\beta_n x)}{2\mu} -$$

$$-\ \frac{(\gamma+\epsilon)\,\beta_n^2}{2\mu}\cosh(\xi_n x) + \frac{\beta_n\ (\lambda+\mu)\sinh(\beta_n x)\,x}{\lambda+2\mu},$$

$$\widetilde{L}_{23} = -\frac{(\gamma+\epsilon)\,\beta_n\ \sinh(\beta_n x)}{2\mu} +\ \frac{(\gamma+\epsilon)}{2\mu}\xi_n\sinh(\xi_n x), \tag{5}$$

$$\widetilde{L}_{24} = -\frac{(\gamma+\epsilon)\,\beta_n\ \cosh(\beta_n x)}{4\mu^2} - \frac{x\,(\lambda+\mu)\sinh(\beta_n x)}{2\mu\ (\lambda+2\mu)} + \frac{(\gamma+\epsilon)\,\beta_n}{4\mu^2}\cosh(\xi_n x),$$

$$\widetilde{L}_{25} = \frac{x\,(\lambda+\mu)\cosh(\beta_n x)}{2\mu\ (\lambda+2\mu)} + \frac{\left((\gamma+\epsilon)\,\beta_n^2\,(\lambda+2\mu) + 2\mu\,(\lambda+3\mu)\right)\sinh(\beta_n x)}{4\ (\lambda+2\mu)\,\mu^2\beta_n} -$$

$$-\ \frac{(\gamma+\epsilon)}{4\mu^2}\xi_n\sinh(\xi_n x),$$

$$\widetilde{L}_{26} = \frac{(\cosh(\xi_n x) - \cosh(\beta_n x))}{2\mu};$$

$$\widetilde{L}_{31} = \beta_n\ (\cosh(\xi_n x) - \cosh(\beta_n x))\,, \quad \widetilde{L}_{32} = \beta_n\ \sinh(\beta_n x) - \frac{\beta_n^2}{\xi_n}\sinh(\xi_n x),$$

$$\widetilde{L}_{33} = \cosh(\xi_n x)\,, \quad \widetilde{L}_{34} = -\frac{\sinh(\beta_n x)}{2\mu} + \frac{\beta_n}{2\mu\,\xi_n}\sinh(\xi_n x)\,, \tag{6}$$

$$\widetilde{L}_{35} = \frac{\cosh(\beta_n x)}{2\mu} - \frac{1}{2\mu}\cosh(\xi_n x), \quad \widetilde{L}_{36} = \frac{1}{(\gamma+\epsilon)\,\xi_n}\sinh(\xi_n x).$$

В функциях (4)–(6) $\xi_n = \sqrt{\beta_n^2 + \dfrac{4\,\alpha\mu}{(\gamma+\epsilon)\,(\mu+\alpha)}}$.

Таким образом при помощи МНФ получено решение системы уравнений (6) в виде тригонометрических рядов

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\widetilde{L}_{11}u_n^0 + \widetilde{L}_{12}v_n^0 + \widetilde{L}_{13}\omega_n^0 + \widetilde{L}_{14}\sigma_{x,n}^0\ + \widetilde{L}_{15}\tau_{xy,n}^0 + \widetilde{L}_{16}\mu_{x,n}^0\right)\sin(\beta_n y)\,,$$

$$v(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\widetilde{L}_{21}u_n^0 + \widetilde{L}_{22}v_n^0 + \widetilde{L}_{23}\omega_n^0 + \widetilde{L}_{24}\sigma_{x,n}^0\ + \widetilde{L}_{25}\tau_{xy,n}^0 + \widetilde{L}_{26}\mu_{x,n}^0\right)\cos(\beta_n y)\,,$$

$$\omega(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\widetilde{L}_{31}u_n^0 + \widetilde{L}_{32}v_n^0 + \widetilde{L}_{33}\omega_n^0 + \widetilde{L}_{34}\sigma_{x,n}^0\ + \widetilde{L}_{35}\tau_{xy,n}^0 + \widetilde{L}_{36}\mu_{x,n}^0\right)\cos(\beta_n y)\,. \tag{7}$$

Используя известные формулы моментной теории упругости

$$
\begin{aligned}
&\sigma_x = (\lambda + 2\,\mu)\,\gamma_{xx} + \lambda\,\gamma_{yy}, && \gamma_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} u\,(x,y)\,,\\
&\tau_{xy} = (\mu + \alpha)\,\gamma_{xy} + (\mu - \alpha)\,\gamma_{yx}, && \gamma_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} v\,(x,y)\,,\\
&\mu_x = (\gamma + \epsilon)\,\chi_x, && \gamma_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} v\,(x,y) - \omega\,(x,y)\,,\\
&\sigma_y = \lambda\,\gamma_{xx} + (\lambda + 2\,\mu)\,\gamma_{yy}, && \gamma_{yx} = \frac{\partial}{\partial y} u\,(x,y) + \omega\,(x,y)\,,\\
&\tau_{yx} = (\mu + \alpha)\,\gamma_{yx} + (\mu - \alpha)\,\gamma_{xy}, && \chi_x = \frac{\partial}{\partial x} \omega\,(x,y)\,,\\
&\mu_y = (\gamma + \epsilon)\,\chi_y, && \chi_y = \frac{\partial}{\partial y} \omega\,(x,y)\,,
\end{aligned}
\tag{8}
$$

в которых σ_x, σ_y, τ_{xy}, τ_{yx} — напряжения классической теории упругости, μ_x, μ_y — моменты теории Коссера, γ_x, γ_y, γ_{xy}, γ_{yx} — компоненты несимметричного микрополярного тензора деформаций, χ_x, χ_y — компоненты микрополярного тензора изгиба-вращения. Напряжения и моменты вычисляются через перемещения и повороты с помощью формул (7) и (8) в следующем виде:

$$
\sigma_x(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\widetilde{L}_{41} u_n^0 + \widetilde{L}_{42} v_n^0 + \widetilde{L}_{43} \omega_n^0 + \widetilde{L}_{44} \sigma_{x,n}^0 + \widetilde{L}_{45} \tau_{xy,n}^0 + \widetilde{L}_{46} \mu_{x,n}^0 \right) \sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right),
$$

$$
\tau_{xy}(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\widetilde{L}_{51} u_n^0 + \widetilde{L}_{52} v_n^0 + \widetilde{L}_{53} \omega_n^0 + \widetilde{L}_{54} \sigma_{x,n}^0 + \widetilde{L}_{55} \tau_{xy,n}^0 + \widetilde{L}_{56} \mu_{x,n}^0 \right) \cos\left(\frac{n\pi y}{l}\right),
$$

$$
\mu_x(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\widetilde{L}_{61} u_n^0 + \widetilde{L}_{62} v_n^0 + \widetilde{L}_{63} \omega_n^0 + \widetilde{L}_{64} \sigma_{x,n}^0 + \widetilde{L}_{65} \tau_{xy,n}^0 + \widetilde{L}_{66} \mu_{x,n}^0 \right) \cos\left(\frac{n\pi y}{l}\right),
$$

$$
\sigma_y(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\widetilde{L}_{71} u_n^0 + \widetilde{L}_{72} v_n^0 + \widetilde{L}_{73} \omega_n^0 + \widetilde{L}_{74} \sigma_{x,n}^0 + \widetilde{L}_{75} \tau_{xy,n}^0 + \widetilde{L}_{76} \mu_{x,n}^0 \right) \cos\left(\frac{n\pi y}{l}\right),
$$

$$
\tau_{yx}(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\widetilde{L}_{81} u_n^0 + \widetilde{L}_{82} v_n^0 + \widetilde{L}_{83} \omega_n^0 + \widetilde{L}_{84} \sigma_{x,n}^0 + \widetilde{L}_{85} \tau_{xy,n}^0 + \widetilde{L}_{86} \mu_{x,n}^0 \right) \cos\left(\frac{n\pi y}{l}\right),
$$

$$
\mu_y(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\widetilde{L}_{91} u_n^0 + \widetilde{L}_{92} v_n^0 + \widetilde{L}_{93} \omega_n^0 + \widetilde{L}_{94} \sigma_{x,n}^0 + \widetilde{L}_{95} \tau_{xy,n}^0 + \widetilde{L}_{96} \mu_{x,n}^0 \right) \sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right).
$$

Здесь

$$\widetilde{L}_{4j} = (\lambda + 2\,\mu)\,\frac{d\widetilde{L}_{1j}}{d\,x} - \lambda\frac{n\pi}{l}\widetilde{L}_{2j}, \quad \widetilde{L}_{5j} = (\mu + \alpha)\,\frac{d\widetilde{L}_{2j}}{d\,x} + (\mu - \alpha)\,\frac{n\pi}{l}\widetilde{L}_{1j} - 2\,\alpha\widetilde{L}_{3j},$$

$$\widetilde{L}_{6j} = (\epsilon + \gamma)\,\frac{d\widetilde{L}_{3j}}{d\,x}, \quad \widetilde{L}_{7j} = \lambda\frac{d\widetilde{L}_{1j}}{d\,x} - (\lambda + 2\,\mu)\,\frac{n\pi}{l}\widetilde{L}_{2j},$$

$$\widetilde{L}_{8j} = (\mu + \alpha)\,\frac{n\pi}{l}\widetilde{L}_{1j} + (\mu - \alpha)\,\frac{d\widetilde{L}_{2j}}{d\,x} + 2\,\alpha\widetilde{L}_{3j}, \quad \widetilde{L}_{9j} = (\epsilon + \gamma)\,\frac{n\pi}{l}\widetilde{L}_{3j}.$$

После вычисления напряжений и моментов получим решение для микрополярного упругого прямоугольника с граничными условиями $u\,(x,0) = u\,(x,l) = 0$, $\sigma_y\,(x,0) = \sigma_y\,(x,l) = 0$, $\mu_y\,(x,0) = \mu_y\,(x,l) = 0$ на сторонах $y = 0, l$ и с произвольными граничными условиями на сторонах $x = 0, h$. Это решение позволяет удовлетворить произвольным граничным условиям на сторонах $x = 0, h$ (кинематические, силовые или смешанные) при условии представления функций граничных условий тригонометрическими рядами. Три начальных функции известны из граничных условий задачи. Три неизвестные начальные функции находятся из граничных условий на стороне $x = h$.

Покажем, как решается краевая задача для прямоугольника $h \times l$ в случае задания на стороне $x = 0$ только нормальной нагрузки $\sigma_x^0 = q_0 \sin(\pi y/l)$. Касательная нагрузка и моментное напряжение на этой стороне равны нулю: $\tau_{xy}^0 = \mu_x^0 = 0$. Сторона $x = h$ свободна от какой-либо нагрузки: $\sigma_x^h = \tau_{xy}^h = \mu_x^h = 0$. В этом случае неизвестны три начальные функции: $u^0 = u_0 \sin(\pi y/l)$, $v^0 = v_0 \cos(\pi y/l)$, $\omega^0 = \omega_0 \cos(\pi y/l)$. Чтобы найти неизвестные коэффициенты u_0, v_0 и ω_0, необходимо вычислить компоненты напряженно-деформированного состояния σ_x, τ_{xy}, μ_x на стороне $x = h$ и приравнять их к нулю. Получается система из трех линейных алгебраических уравнений для нахождения коэффициентов u_0, v_0 и ω_0 при неизвестных начальных функциях:

$$\widetilde{L}_{41}(h)u_0 + \widetilde{L}_{42}(h)v_0 + \widetilde{L}_{43}(h)\omega_0 + \widetilde{L}_{44}(h)q_0 = 0,$$

$$\widetilde{L}_{51}(h)u_0 + \widetilde{L}_{52}(h)v_0 + \widetilde{L}_{53}(h)\omega_0 + \widetilde{L}_{54}(h)q_0 = 0,$$

$$\widetilde{L}_{61}(h)u_0 + \widetilde{L}_{62}(h)v_0 + \widetilde{L}_{63}(h)\omega_0 + \widetilde{L}_{64}(h)q_0 = 0.$$

3. Вычислительные эксперименты. Рассмотрим изгиб прямоугольников, выполненных из пенополиуретана и синтактической пены. Технические механические параметры первого материала следующие: $G = 104$ МПа — модуль сдвига, $\nu = 0.44$ — коэффициент Пуассона, $l_b = 0.327$ мм — характеристическая длина для изгиба, $N = \sqrt{0.04}$ — моментное число (coupling number), тогда как второго — $G = 1033$ МПа, $\nu = 0.335$, $l_b = 0.032$ мм, $N = \sqrt{0.1}$. Значения этих параметров взяты из работ [17, 18].

Механические константы материала в уравнениях (1) вычисляются через технические параметры с помощью известных формул [2]

$$\lambda = \frac{2\,\nu G}{1 - 2\,\nu}, \quad \mu = G, \quad \alpha = \frac{G\,N^2}{1 - N^2}, \quad \gamma + \epsilon = 4\,G\,l_b^2.$$

Известно, что при изменении масштаба исследуемого эластичного образца компоненты напряженно-деформированного состояния изменяются («размерный эффект»), в отличие от классической теории упругости, в которой изменение масштаба образца не влияет на численные значения этих компонентов. Для определения интервала изменения размеров образца была проведена серия вычислительных экспериментов с изгибом прямоугольников с отношением сторон $l/h = 1, 2, 3, 4$ и изменением высоты h прямоугольников в зависимости от характеристической длины для изгиба $h = k_h l_b$, $k_h \in [0,1; 50]$. На стороне $x = 0$ прямоугольников действовала только нормальная нагрузка $\sigma_x = q_0 \sin(\beta_n y)$, тогда как сторона $x = h$ оставалась свободной от нагрузки.

На рис. 2 представлены максимальные относительные отклонения $\delta = \left|\dfrac{\sigma_y^{\mathrm{mom}} - \sigma_y^{\mathrm{cl}}}{\sigma_y^{\mathrm{mom}}}\right|$ изгибного моментного напряжения σ_y^{mom} в сеченииии $y = l/2$ от классического σ_y^{cl} в зависимости от l/h и высоты h прямоугольников. Видим, что с увеличением длины l стороны нагружения прямоугольника относительное отклонение δ с уменьшением высоты увеличивается. Отметим, что при $h > 20\, l_b$ отклонение составляет менее 5 %.

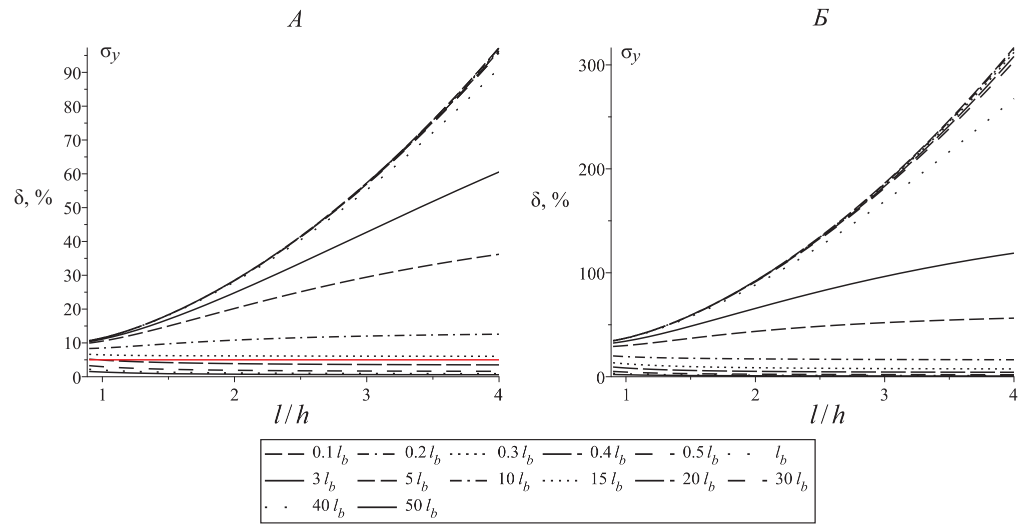

Рис. 2. Относительные отклонения изгибных напряжений σ_y/q в сечении $y = l/2$ по моментной теории от классических изгибных напряжений в зависимости от отношения l/h для пенополиуретана (*А*) и синтактической пены (*Б*) при разных значениях высоты прямоугольника

На рис. 3 и 4 представлены графики изгибающих напряжений σ_y в сечении $y = l/2$ для прямоугольников из синтактической пены и полиуретана с разными отношениями сторон и высотой. Видно, что при $h < l_b$ изгибные напряжения практически не меняются.

Аналогично ведут себя и другие компоненты напряженно-деформированного состояния. На рис. 5 показано, как отличается поведение касательных напряжений τ_{xy} и τ_{yx} в сечениях $y = 0$ для прямоугольника из синтактической пены с изменением высоты прямоугольника: в угловых точках $x = 0,\ y = 0$ и $x = h,\ y = 0$ равенство касательных напряжений не наблюдается, как и предсказывает моментная теория упругости. При увеличении высоты касательное напряжение τ_{yx} в этих точках стремится к значению касательного напряжения τ_{xy}.

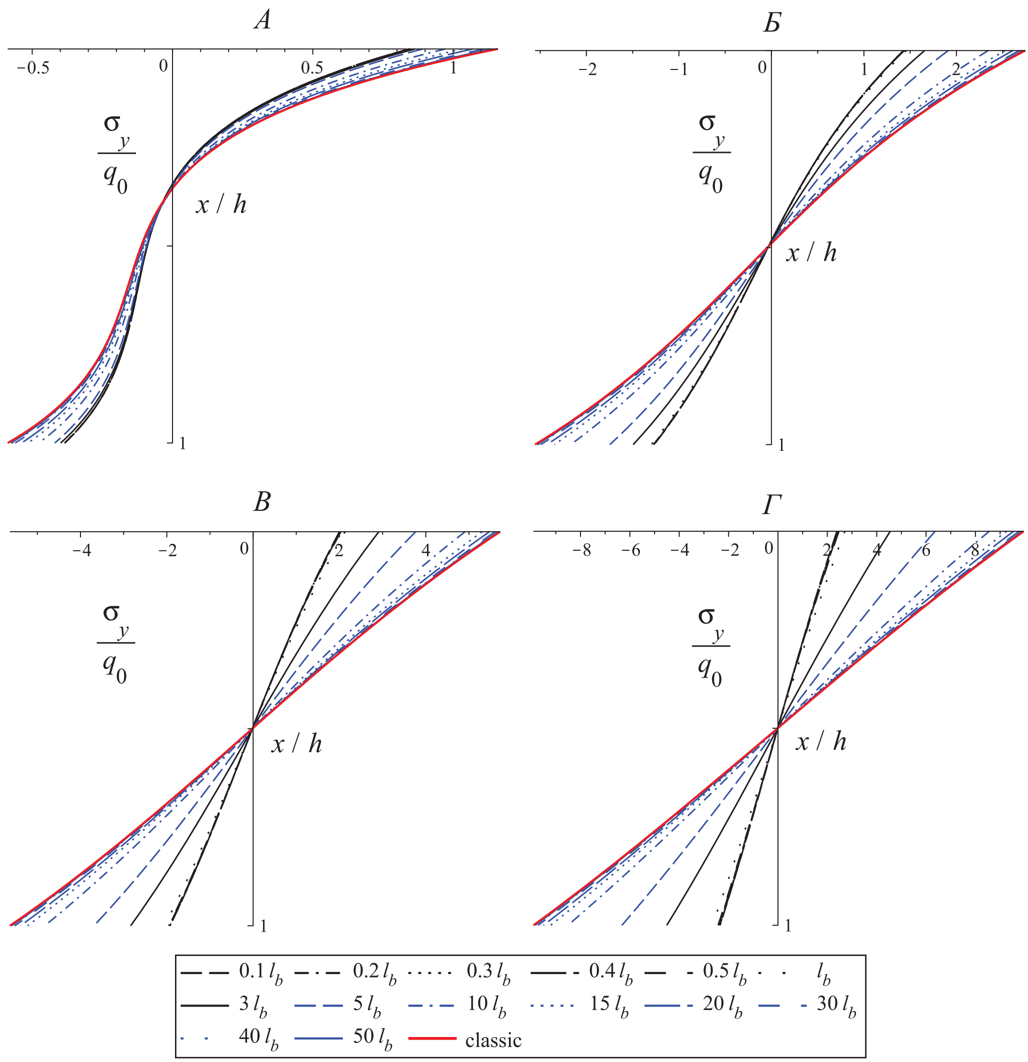

Рис. 3. Изгибные напряжения σ_y/q в сечении $y = l/2$ для прямоугольников из синтактической пены при разных значениях высоты и отношения $l/h = 1$ (*А*), 2 (*Б*), 3 (*В*), 4 (*Г*)

4. Заключение. Исследовано поведение напряженно-деформированного состояния упругих изотропных прямоугольников при изменении их относительных размеров и высоты с точки зрения моментной теории упругости на основе точного решения дифференциальных уравнений равновесия. Вычислительные эксперименты показали наличие «размерного эффекта» и позволили определить наименьшую высоту $h = 20\,l_b$ прямоугольника, при которой напряженно-деформированное состояние отличается не более чем на 5 % от полученного по классической теории. Если размеры прямоугольника становятся сопоставимы ($l = h$), то изменение высоты мало влияет на значения компонентов напряженно-деформированного состояния.

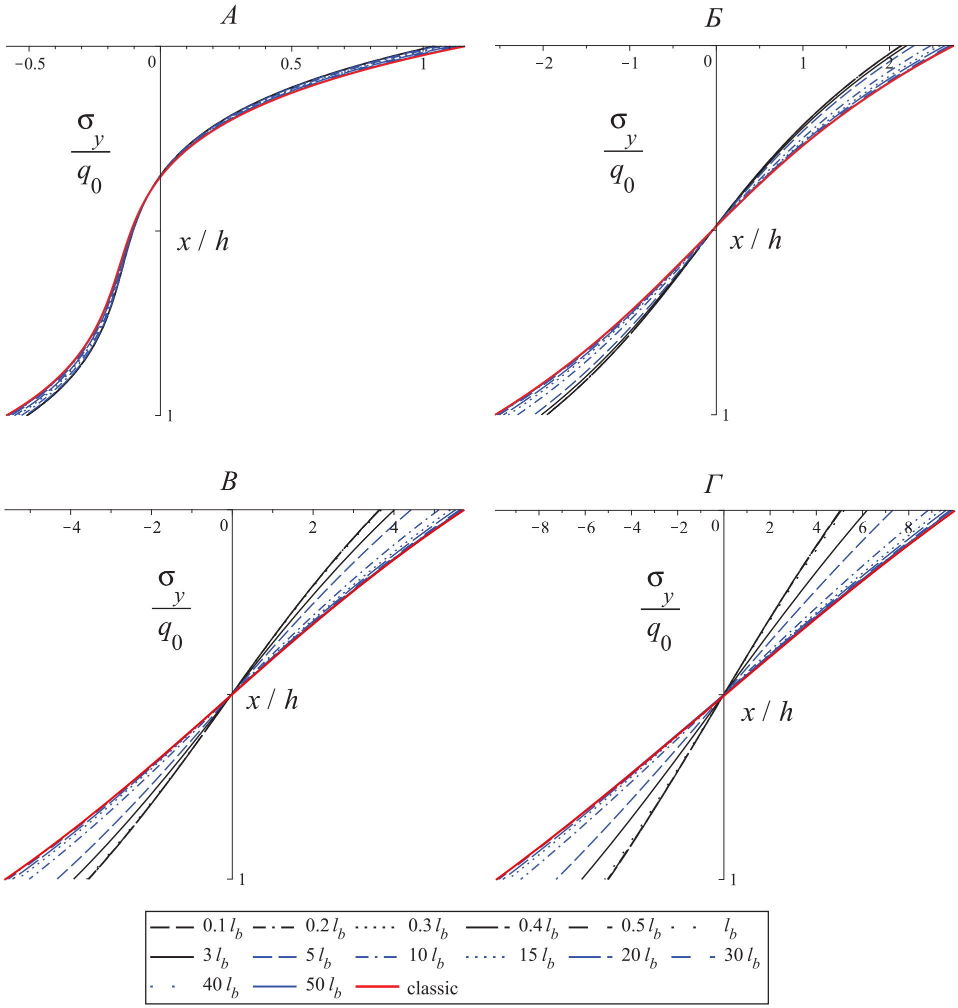

Рис. 4. Изгибные напряжения σ_y/q в сечении $y = l/2$ для прямоугольников из пенополиуретана при разных значениях высоты и отношения $l/h = 1$ (*А*), 2 (*Б*), 3 (*В*), 4 (*Г*)

Литература

1. *Rueger Z., Lakes R. S.* Experimental Cosserat elasticity in open-cell polymer foam // Philosophical Magazine. 2016. Vol. 96. N 2. P. 93–111. https://doi.org/10.1080/14786435.2015.1125541

2. *Hassanpour S., Heppler G. R.* Micropolar elasticity theory: A survey of linear isotropic equations, representative notations, and experimental investigation // Mathematics and Mechanics of Solids. 2017. Vol. 22. N 2. P. 224–242. https://doi.org/10.1177/1081286515581183

3. *Skrzat A., Eremeyev V. A.* On the effective properties of foams in the framework of the couple stress theory // Continuum Mechanics and Thermodynamics. 2020. Vol. 32. P. 1779–1801. https://doi.org/10.1007/s00161-020-00880-6

4. *Cosserat E., Cosserat F.* Théorie des corps déformables. Paris: Hermann et Fils, 1909. 280 p.

5. *Mindlin R. D., Tiersten H. F.* Effects of couple-stresses in linear elasticity // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1962. Vol. 11. P. 415–448.

6. *Toupin R. A.* Elastic materials with couple-stresses // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1962. Vol. 11. P. 385–414.

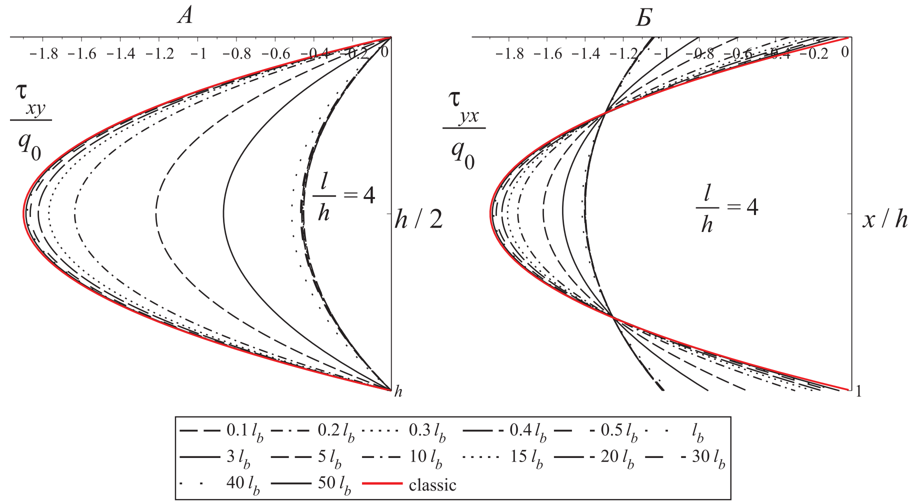

Рис. 5. Безразмерные касательные напряжения τ_{xy}/q (*А*) и τ_{yx}/q (*Б*) в сечении $y = 0$ при отношении сторон $l/h = 4$ и разных значениях высоты прямоугольника из синтактической пены

7. *Аэро Э. Л., Кувшинский Е. В.* Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц // Физика твердого тела. 1960. Т. 2. № 7. С. 1399–2409.

8. *Eringen A. C., Suhubil E. S.* Nonlinear theory of simple microelastic solids // International Journal of Engineering Science. 1964. Vol. 2. P. 189–203.

9. *Eringen A. C.* Linear theory of micropolar elasticity // Journal of Mathematics and Mechanics. 1966. Vol. 15. N 6. P. 909–923.

10. *Grigor'ev Yu. M., Gavrilieva A. A.* An equilibrium of a micropolar elastic rectangle with mixed boundary conditions // Continuum Mechanics and Thermodynamics. 2019. Vol. 31. P. 1699–1718. https://doi.org/10.1007/s00161-019-00823-w

11. *Matrosov A. V.* An exact analytical solution for a free-supported micropolar rectangle by the method of initial functions // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik. 2022. Vol. 73. https://doi.org/10.1007/s00033-022-01714-y

12. *Nowacki W.* Theory of asymmetric elasticity. Oxford: Pergamon Press, 1986. 383 p.

13. *Агарев В. А.* Метод начальных функций для двумерных граничных задач теории упругости. Киев: Издательство Академии наук УССР, 1963. 204 с.

14. *Lur'e A. I.* Three-dimensional problems of theory of elasticity. New York: Interscience Publ., 1964. 493 p.

15. *Власов В. З.* Метод начальных функций в задачах теории упругости // Известия Академии наук СССР. Отд. техн. наук. 1955. № 7. С. 49–69.

16. *Матросов А. В.* Численно-аналитическое решение граничной задачи деформирования линейно-упругого анизотропного прямоугольника // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2007. Вып. 2. С. 55–65.

17. *Lakes R. S.* Size effects and micromechanics of a porous solid // Journal of Materials Science. 1983. Vol. 8. P. 2572–2580.

18. *Lakes R. S.* Experimental microelasticity of two porous solids // International Journal of Solids and Structures. 1986. Vol. 22. N 1. P. 55–63.

Статья поступила в редакцию 29 октября 2024 г.
Статья принята к печати 12 декабря 2024 г.

К о н т а к т н а я и н ф о р м а ц и я:

Голоскоков Дмитрий Петрович — д-р техн. наук, проф.; dpg1954@mail.ru

Матросов Александр Васильевич — д-р физ.-мат. наук, доц.; avmatrosov@mail.ru, a.matrosov@spbu.ru

“Size effect” when bending rectangles made of foam materials

D. P. Goloskokov[1], *A. V. Matrosov*[2]

[1] Emperor Alexander I St. Petersburg State Transport University, 9, Moskovsky pr., St. Petersburg, 190031, Russian Federation
[2] St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Goloskokov D. P., Matrosov A. V. “Size effect” when bending rectangles made of foam materials. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2025, vol. 21, iss. 1, pp. 16–27. https://doi.org/10.21638/spbu10.2025.102 (In Russian)

By the method of initial functions (MIF) in a rectangular Cartesian coordinate system Oxy. The behavior of products made of foamed materials is investigated on the basis of the moment theory of elasticity. The initial functions in the MIF solution are represented by trigonometric series, which made it possible to solve the boundary problem of deforming a micropolar rectangle ($h \times l$) with arbitrary boundary conditions on the sides $x = 0, h$ and free support ($\sigma_y = 0$, $u = 0$, $\mu_y = 0$) on the sides $y = 0, l$. The results of computational experiments showing the effect of the ratio of rectangle sizes and its height for the manifestation of the “size effect” for syntactic foam and polyurethane foam are presented. The minimal linear dimensions of the rectangle are determined, with a decrease in which it begins to manifest itself “size effect”.

Keywords: moment theory of elasticity, plane strain deformation, method of initial functions, exact solution, foamed materials.

References

1. Rueger Z., Lakes R. S. Experimental Cosserat elasticity in open-cell polymer foam. *Philosophical Magazine*, 2016, vol. 96, no. 2, pp. 93–111. https://doi.org/10.1080/14786435.2015.1125541

2. Hassanpour S., Heppler G. R. Micropolar elasticity theory: A survey of linear isotropic equations, representative notations, and experimental investigations. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2017, vol. 22, no. 2, pp. 224–242. https://doi.org/10.1177/1081286515581183

3. Skrzat A., Eremeyev V. A. On the effective properties of foams in the framework of the couple stress theory. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 2020, vol. 32, pp. 1779–1801. https://doi.org/10.1007/s00161-020-00880-6

4. Cosserat E., Cosserat F. *Théorie des corps déformables.* Paris, Publ. of Hermann et Fils, 1909, 280 p.

5. Mindlin R. D., Tiersten H. F. Effects of couple-stresses in linear elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1962, vol. 11, pp. 415–448.

6. Toupin R. A. Elastic materials with couple-stresses. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1962, vol. 11, pp. 385–414.

7. Aero E. L., Kuvshinskii E. V. Osnovnye uravneniia teorii uprugosti sred s vrashchatel’nym vzaimodeistviem chastits [Fundamental equations of the theory of elastic media with rotationally interacting particles]. *Fizika tverdogo tela* [*Sov. Phys. Solid State*], 1960, vol. 2, no. 7, pp. 1399–1409. (In Russian)

8. Eringen A. C., Suhubil E. S. Nonlinear theory of simple microelastic solids. *International Journal of Engineering Science*, 1964, vol. 2, pp. 189–203.

9. Eringen A. C. Linear theory of micropolar elasticity. *Journal of Mathematics and Mechanics*, 1966, vol. 15, no. 6, pp. 909–923.

10. Grigor’ev Yu. M., Gavrilieva A. A. An equilibrium of a micropolar elastic rectangle with mixed boundary conditions. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 2019, vol. 31, pp. 1699–1718. https://doi.org/10.1007/s00161-019-00823-w

11. Matrosov A. V. An exact analytical solution for a free-supported micropolar rectangle by the method of initial functions. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, 2022, vol. 73. https://doi.org/10.1007/s00033-022-01714-y

12. Nowacki W. *Theory of asymmetric elasticity.* Oxford, Pergamon Press, 1986, 383 p.

13. Agaryov V. A. *Metod nachal’nykh funktsii dlia dvumernykh granichnykh zadach teorii uprugosti*

[*Method of initial functions for two-dimensional boundary value problems of elasticity theory*]. Kiev, Publ. House of Academy of Sciences UkrSSR, 1963, 204 p. (In Russian)

14. Lur'e A. I. *Three-dimensional problems of theory of elasticity.* New York, Interscience Publ., 1964, 493 p.

15. Vlasov V. Z. Metod nachal'nykh funktsii v zadachakh teorii uprugosti [Method of initial functions in problems of the theory of elasticity]. *Izvestiia Akademii nauk SSSR. Otd. tekhn. nauk* [*Proceedings of Academy of Sciences. Department of Technical of Sciences*], 1955, no. 7, pp. 49–69. (In Russian)

16. Matrosov A. V. Chislenno-analiticheskoe reshenie granichnoi zadachi deformirovaniia lineinouprugogo anizotropnogo priamougol'nika [Numerical-analytical solution for a boundary problem of deformation of linearly-elastic anisotropic rectangle]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 10. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2007, iss. 2, pp. 55–65. (In Russian)

17. Lakes R. S. Size effects and micromechanics of a porous solid. *Journal of Materials Science*, 1983, vol. 8, pp. 2572–2580.

18. Lakes R. S. Experimental microelasticity of two porous solids. *International Journal of Solids and Structures*, 1986, vol. 22, no. 1, pp. 55–63.

Received: October 29, 2024.
Accepted: December 12, 2024.

Authors' information:

Dmitry P. Goloskokov — Dr. Sci. in Engineering, Professor; dpg1954d@mail.ru

Alexander V. Matrosov — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Associate Professor; avmatrosov@mail.ru, a.matrosov@spbu.ru