

Цифровой алгоритм адаптивного управления контролируемыми переменными в заданном диапазоне

Р. А. Севостьянов, М. В. Сотникова

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Севостьянов Р. А., Сотникова М. В.* Цифровой алгоритм адаптивного управления контролируемыми переменными в заданном диапазоне // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2025. Т. 21. Вып. 1. С. 151–168. <https://doi.org/10.21638/spbu10.2025.111>

Статья посвящена вопросам синтеза цифровой системы управления для произвольного нелинейного объекта, в том числе с учетом запаздывания. Важной особенностью является отсутствие задающего сигнала, цель управления заключается в удержании контролируемых переменных в заданном диапазоне. Рассматриваемая задача решается на основе метода управления с прогнозирующей моделью и особым функционалом качества. Показано, что задача оптимального управления на каждом шаге сводится к задаче нелинейной оптимизации, при этом допустимое множество никогда не пусто за счет использования вспомогательных переменных. Такой подход позволяет изменять ограничения на управляющие и измеряемые переменные в режиме реального времени. К важным особенностям относятся возможность включения и выключения переменных объекта управления в процессе его функционирования, а также корректировка прогноза для случаев, когда модель известна неточно. Предложенный подход демонстрируется на примере экспериментов с компьютерной моделью ректификационной колонны для переработки нефтепродуктов.

Ключевые слова: цифровое управление, адаптивность, управление в заданном диапазоне.

1. Введение. Проектирование систем автоматического управления, как правило, связано с задачей отработки некоторого задающего сигнала, который может быть как постоянным, так и функцией времени. Например, в работе [1] описана задача обеспечения заданного положения робота-манипулятора. Однако существуют задачи, в которых целью управления является удержание контролируемых параметров системы в заданном диапазоне. При этом динамика системы внутри этого диапазона не имеет значения, за исключением требований к ограничениям по управляющему сигналу. Подобные задачи возникают, например, когда в процессах переработки нефтепродуктов в ректификационных колоннах [2] для получения желаемого качества достаточно обеспечить нахождение определенных измеряемых показателей в нужных пределах. Такие процессы характеризуются присутствием нелинейностей, многомерностью входов и выходов системы, присутствием запаздывания, инерционностью (реакции могут занимать довольно длительное время, порядка минут и часов).

Описанные особенности определяют выбор метода управления с прогнозирующими моделями (Model Predictive Control, MPC) [3–6] в качестве основного подхода к решению указанных задач. MPC-подход широко применяется на практике, позволяя учитывать ограничения и обладая высокой адаптивностью [7–9]. Идея заключается

в решении оптимизационной задачи по минимизации функционала качества на движениях прогнозирующей модели, в общем случае нелинейной. Естественный недостаток данной схемы — высокая вычислительная сложность, особенно в случае многомерности системы. Однако, как было уже отмечено, химические процессы достаточно инерционны, что позволяет использовать обратную связь в виде МРС-регулятора.

В настоящей работе будет применяться особый функционал качества для оптимизационной задачи в рамках МРС-идеологии, который учитывает интенсивность управляющего воздействия, а также штраф за выход за пределы заданного диапазона для контролируемых переменных. Подобный подход с применением штрафных функций описан в работе [10]. Важной особенностью является использование вспомогательных переменных, которые обеспечивают непустое допустимое множество на каждом шаге управления. Это необходимо, так как на каком-то шаге (особенно на начальном) может оказаться, что какие-то переменные находятся вне заданного диапазона. Поскольку подавляющее число систем управления реализуется на цифровых вычислительных устройствах, прогнозирующие модели и синтезируемые регуляторы рассматриваются в дискретной форме в виде разностных уравнений. Для демонстрации эффективности рассматриваемого метода приводятся результаты симуляционных экспериментов с компьютерной моделью ректификационной колонны.

В работе развиваются результаты, полученные в статьях [11–13]. В частности, для повышения адаптивности закона управления предлагается использовать корректировку состояния системы по измеренным данным. Также особое внимание уделяется возможности в режиме реального времени учитывать или нет отдельные переменные системы, а также изменению ограничений на управляющие воздействия и заданные диапазоны для контролируемых переменных.

2. Постановка задачи. Рассмотрим дискретизованную нелинейную модель объекта управления в виде

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}[k+1] &= \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}[k], \mathbf{u}[k], \tilde{\mathbf{w}}[k]), \\ \tilde{\mathbf{y}}[k] &= \tilde{\mathbf{g}}(\tilde{\mathbf{x}}[k], \mathbf{u}[k], \tilde{\mathbf{v}}[k]),\end{aligned}\tag{1}$$

где $\tilde{\mathbf{x}} \in E^n$ — вектор состояния системы; k — текущий момент дискретного времени; $\mathbf{u} \in E^m$ — вектор управляющих воздействий; $\tilde{\mathbf{y}} \in E^r$ — вектор измеряемых переменных; $\tilde{\mathbf{w}} \in E^{n_w}$ — вектор внешних возмущений; $\tilde{\mathbf{v}} \in E^{n_v}$ — вектор шума в измерениях; $\tilde{\mathbf{f}}$ и $\tilde{\mathbf{g}}$ — векторные функции векторного аргумента.

Как было отмечено ранее, основной задачей является удержание контролируемых переменных в заданном диапазоне с учетом ограничений на управляющие воздействия. При этом контролируемые переменные могут в начальный момент времени находиться вне заданного диапазона, а также выходить за его пределы в процессе работы, например, за счет воздействия внешнего возмущения или при ручном изменении заданных ограничений. Введем в рассмотрение допустимые множества $U \subseteq E^m$ для управляющих воздействий и $Y \subseteq E^r$ для измеряемых переменных. Таким образом, целью управления становится обеспечение условий

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{y}}[k] &\in Y \quad \forall k \geq k_0, \\ \mathbf{u}[k] &\in U \quad \forall k \geq 0,\end{aligned}\tag{2}$$

где $k_0 \geq 0$ — некоторое целочисленное значение. Далее будем считать, что допустимые

множества определяются своими верхними и нижними границами в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{\min} &\leq \tilde{\mathbf{y}}[k] \leq \mathbf{y}_{\max} \quad \forall k \geq k_0, \\ \mathbf{u}_{\min} &\leq \mathbf{u}[k] \leq \mathbf{u}_{\max}, \\ \Delta \mathbf{u}_{\min} &\leq \Delta \mathbf{u}[k] \leq \Delta \mathbf{u}_{\max} \quad \forall k \geq 0, \end{aligned} \quad (3)$$

здесь \mathbf{y}_{\min} и \mathbf{y}_{\max} — векторы, определяющие заданный диапазон для контролируемых переменных, \mathbf{u}_{\min} и \mathbf{u}_{\max} — векторы, задающие ограничения на управляющие воздействия, $\Delta \mathbf{u}[k] = \mathbf{u}[k] - \mathbf{u}[k-1]$ — скорость изменения управляющего сигнала в момент дискретного времени k , $\Delta \mathbf{u}_{\min}$ и $\Delta \mathbf{u}_{\max}$ — соответствующие ограничения на скорость.

Таким образом, формально можно поставить задачу синтеза оптимального закона управления, обеспечивающего выполнение условий (2) или, что то же самое, (3) для объекта управления (1).

Дополнительно примем требование возможности включения и исключения контролируемых и управляющих переменных из модели. Оно следует из соображений практической реализации закона управления для реальных установок с целью экономии вычислительных ресурсов и оптимизации времени вычислений в некоторых режимах.

3. Синтез управления. Согласно принятому подходу, обратимся к задаче синтеза оптимального регулятора в соответствии с идеологией MPC. Введем в рассмотрение прогнозирующую модель для объекта управления (1):

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[i+1] &= \mathbf{f}(\mathbf{x}[i], \mathbf{u}[i], \mathbf{w}[i]), \quad i = k+j, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad \mathbf{x}[k] = \tilde{\mathbf{x}}[k], \\ \mathbf{y}[i] &= \mathbf{g}(\mathbf{x}[i], \mathbf{u}[i]). \end{aligned} \quad (4)$$

В ней $\mathbf{w}[i]$ — оценка или измерение внешнего воздействия, $\mathbf{x}[i]$ — оценка текущего состояния объекта управления в момент дискретного времени i , $\mathbf{y}[i]$ — оценка измеряемых переменных. В качестве начального состояния прогнозируемой модели выступает текущее состояние объекта управления $\tilde{\mathbf{x}}[k]$. Система (4) позволяет оценить динамику объекта управления на горизонте прогноза $P > 0$, т. е. для любого набора управляющих воздействий $\bar{\mathbf{u}} = \{\mathbf{u}[i]\}$, $i = \overline{k, k+P-1}$, рассчитать оценку набора измерений $\bar{\mathbf{y}}(\bar{\mathbf{u}}) = \{\mathbf{y}[i]\}$, $i = \overline{k+1, k+P}$.

В соответствии с MPC-подходом на каждом шаге необходимо искать последовательность управляющих воздействий, обеспечивающую минимум некоторого функционала качества на движениях системы с учетом заданных ограничений на горизонте прогноза. На объект управления из полученного набора подается только компонента, соответствующая текущему моменту дискретного времени k . После этого процесс повторяется заново с новой оценкой состояния объекта управления к моменту времени $k+1$.

Обратимся к вопросу формирования допустимого множества для задачи оптимизации. Рассмотрим заданный диапазон для контролируемых переменных прогнозирующей модели:

$$y_j^{\min} \leq y_j[i] \leq y_j^{\max}, \quad i = \overline{k+1, k+P}, \quad j = \overline{1, r}, \quad (5)$$

здесь y_j , y_j^{\max} и y_j^{\min} — компоненты векторов $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_r)^T$, $\mathbf{y}^{\max} = (y_1^{\max}, \dots, y_r^{\max})^T$ и $\mathbf{y}^{\min} = (y_1^{\min}, \dots, y_r^{\min})^T$. Так как контролируемые переменные в определенные моменты времени могут выходить за приведенные ограничения, добавим в неравенства

(5) вспомогательные переменные, которые гарантируют, что допустимое множество всегда непусто:

$$\begin{aligned} y_j^{\min} - \varepsilon_{ij} &\leq y_j[k+i] \leq y_j^{\max} + \varepsilon_{ij}, \quad i = \overline{1, P}, \quad j = \overline{1, r}, \\ \varepsilon_{ij} &\geq 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где ε_{ij} — вспомогательная переменная, соответствующая компоненте y_j на i -м шаге горизонта прогноза. По сути эти переменные определяют меру выхода контролируемых переменных за границы заданного диапазона. Таким образом, если y_j удовлетворяет условиям (5) в соответствующий момент времени, то $\varepsilon_{ij} = 0$, в ином случае $\varepsilon_{ij} > 0$.

Введем в рассмотрение векторы

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{y}}_{\min} &= (\mathbf{y}_{\min}, \dots, \mathbf{y}_{\min})^T \in E^{rP}, \\ \bar{\mathbf{y}}_{\max} &= (\mathbf{y}_{\max}, \dots, \mathbf{y}_{\max})^T \in E^{rP}, \\ \bar{\mathbf{y}} &= (\mathbf{y}[k+1], \dots, \mathbf{y}[k+P])^T \in E^{rP}, \\ \bar{\mathbf{u}} &= (\mathbf{u}[k], \dots, \mathbf{u}[k+P-1])^T \in E^{mP}, \\ \varepsilon &= (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \dots, \varepsilon_{1r}, \dots, \varepsilon_{P1}, \varepsilon_{P2}, \dots, \varepsilon_{Pr})^T \in E^{rP}. \end{aligned} \quad (7)$$

С учетом обозначений (7) можно переписать условия (6) на горизонте прогноза в векторном виде

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{y}}_{\min} - \varepsilon &\leq \bar{\mathbf{y}}(\bar{\mathbf{u}}) \leq \bar{\mathbf{y}}_{\max} + \varepsilon, \\ \varepsilon &\geq \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (8)$$

Таким образом, в общем случае невыпуклое допустимое множество для последовательности управляющих воздействий на горизонте прогноза можно записать таким образом:

$$\begin{aligned} \Omega &= \{(\bar{\mathbf{u}}, \varepsilon) \in E^{(m+r)P} : \mathbf{u}[k+i] \in U, \quad i = \overline{0, P-1}, \\ &\quad \bar{\mathbf{y}}_{\min} - \varepsilon \leq \bar{\mathbf{y}}(\bar{\mathbf{u}}) \leq \bar{\mathbf{y}}_{\max} + \varepsilon, \quad \varepsilon \geq \mathbf{0}\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Теперь рассмотрим функционал качества для задачи нелинейной оптимизации на горизонте прогноза, который должен удовлетворять следующим свойствам:

- нулевое значение функционала должно достигаться внутри допустимого диапазона при постоянном управляющем сигнале;
- если контролируемые переменные находятся вне заданного диапазона, то минимизация функционала должна способствовать движению таких переменных внутри диапазона;
- если контролируемые переменные находятся внутри заданного диапазона, то последовательность управляющих сигналов, являющаяся решением задачи оптимизации, должна представлять собой минимальный по интенсивности набор, необходимый для удержания этих переменных внутри диапазона.

Указанным требованиям удовлетворяет функционал вида

$$J = J(\Delta \bar{\mathbf{u}}, \varepsilon) = \Delta \bar{\mathbf{u}}^T \bar{\mathbf{Q}} \Delta \bar{\mathbf{u}} + \rho \varepsilon^T \mathbf{R} \varepsilon. \quad (10)$$

В (10) $\Delta \bar{\mathbf{u}} = (\Delta \mathbf{u}[k], \Delta \mathbf{u}[k+1], \dots, \Delta \mathbf{u}[k+P-1]) \in E^{mP}$ — вспомогательный вектор изменения управляющего сигнала на горизонте прогноза, $\bar{\mathbf{Q}} = \text{diag}(\mathbf{Q}, \dots, \mathbf{Q})$ —

блочко-диагональная матрица, элементами которой являются диагональные положительно определенные матрицы коэффициентов при векторах $\Delta \mathbf{u}[k+i]$, $i = \overline{0, P-1}$, \mathbf{R} — диагональная положительно определенная матрица весовых коэффициентов при вспомогательных переменных, $\rho > 0$ — общий весовой множитель.

Преобразуем ограничения на управляющие воздействия. С учетом обозначений

$$\mathbf{M}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{n \times n} \\ \mathbf{E}_{n \times n} \\ \vdots \\ \mathbf{E}_{n \times n} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{n \times n} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{E}_{n \times n} & \mathbf{E}_{n \times n} & \cdots & \mathbf{0} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{E}_{n \times n} & \mathbf{E}_{n \times n} & \cdots & \mathbf{E}_{n \times n} \end{pmatrix} \quad (11)$$

очевидно, что

$$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{M}_0 \mathbf{u}[k-1] + \mathbf{M}_1 \Delta \bar{\mathbf{u}}. \quad (12)$$

Таким образом, общую систему алгебраических неравенств, образующую ограничения на управляющие воздействия и на скорость их изменения, можно записать в виде

$$\mathbf{A} \Delta \bar{\mathbf{u}} \leq \mathbf{b} + \mathbf{b}_u \mathbf{u}[k-1], \quad (13)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_1 \\ -\mathbf{M}_1 \\ \mathbf{E}_{mP \times mP} \\ -\mathbf{E}_{mP \times mP} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{u}}_{\max} \\ -\bar{\mathbf{u}}_{\min} \\ \Delta \bar{\mathbf{u}}_{\max} \\ -\Delta \bar{\mathbf{u}}_{\min} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_u = \begin{pmatrix} -\mathbf{M}_0 \\ \mathbf{M}_0 \\ \mathbf{0}_{mP \times m} \\ \mathbf{0}_{mP \times m} \end{pmatrix}.$$

С учетом введенных обозначений (11) допустимое множество (9) принимает вид

$$\Omega = \{(\Delta \bar{\mathbf{u}}, \varepsilon) \in E^{(m+r)P} : \mathbf{A} \Delta \bar{\mathbf{u}} \leq \mathbf{b} + \mathbf{b}_u \mathbf{u}[k-1], \\ \bar{\mathbf{y}}_{\min} - \varepsilon \leq \bar{\mathbf{y}}(\Delta \bar{\mathbf{u}}) \leq \bar{\mathbf{y}}_{\max} + \varepsilon, \varepsilon \geq 0\}.$$

В результате сформулируем нелинейную задачу оптимизации на горизонте прогноза

$$J_k = J_k(\Delta \bar{\mathbf{u}}, \varepsilon) = \Delta \bar{\mathbf{u}}^T \bar{\mathbf{Q}} \Delta \bar{\mathbf{u}} + \rho \varepsilon^T \mathbf{R} \varepsilon \rightarrow \min_{(\Delta \bar{\mathbf{u}}, \varepsilon) \in \Omega \subseteq E^{(m+r)P}}, \quad (14)$$

решением которой являются последовательность изменений управляющего сигнала $\Delta \mathbf{u}^*[k], \Delta \mathbf{u}^*[k+1], \dots, \Delta \mathbf{u}^*[k+P-1]$ и набор вспомогательных переменных ε^* . Как было указано выше, в момент времени k из такого решения берется только значение $\Delta \mathbf{u}^*[k]$, при помощи которого формируется текущее управляющее воздействие $\mathbf{u}^*[k] = \mathbf{u}^*[k-1] + \Delta \mathbf{u}^*[k]$, непосредственно подающееся на объект управления.

Также еще раз отметим, что использование вспомогательных переменных позволяет в режиме реального времени изменять заданные ограничения. Такие изменения могут привести к тому, что некоторые контролируемые или управляющие переменные окажутся вне заданных пределов, т. е. допустимое множество будет пусто, а это решается как раз применением указанного подхода.

4. Дискретизация объекта управления. При синтезе систем управления для реальных физических объектов часто невозможно учесть полную нелинейную модель

ввиду либо сложности ее структуры, либо того, что параметры такой модели довольно трудно идентифицировать в процессе экспериментов. В связи с этим на практике бывает достаточно рассмотреть линейное приближение в окрестности некоторого положения равновесия. В частности, такой подход распространен для задач управления химическими процессами в ректификационных колоннах. Параметры линейных моделей достаточно просто идентифицировать путем анализа переходного процесса, полученного в результате ступенчатого управляющего воздействия. При этом такие модели удобно представлять в виде уравнений с передаточными функциями с учетом запаздывания и внешнего возмущения.

Введем следующие обозначения:

$$\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_r)^T, \quad \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)^T, \quad \mathbf{f} = (f_1, \dots, f_{n_w})^T,$$

где \mathbf{y} — измеряемые переменные; \mathbf{u} — управляющие воздействия; \mathbf{f} — внешние возмущения. Зададим положение равновесия $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_s, \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_s$. Будем считать, что внешние возмущения также доступны для измерения, постоянны или изменяются очень медленно, а также ограничены по абсолютному значению: $|\mathbf{f}(\mathbf{t})| < \mathbf{M}$. Тогда в окрестности положения равновесия можно сформировать линейную модель

$$y_i = \sum_{j=1}^m \frac{k_{ij}}{T_{ij}s + 1} e^{-\tau_{ij}s} u_j + \sum_{q=1}^{n_w} \frac{\tilde{k}_{iq}}{\tilde{T}_{iq}s + 1} e^{-\tilde{\tau}_{iq}s} f_q, \quad i = \overline{1, r}, \quad (15)$$

в которой k_{ij} и \tilde{k}_{iq} — коэффициенты усиления, T_{ij} и \tilde{T}_{iq} — постоянные времени, τ_{ij} и $\tilde{\tau}_{iq}$ — величины транспортного запаздывания.

Отметим, что модель (15) описывает динамику в отклонениях от положения равновесия. Таким образом, абсолютные значения можно пересчитать как

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{y}}(t) &= \mathbf{y}_s + \mathbf{y}(t), \\ \tilde{\mathbf{u}}(t) &= \mathbf{u}_s + \mathbf{u}(t). \end{aligned}$$

Целью управления является удержание переменных $\tilde{\mathbf{y}}$ в заданном диапазоне с учетом ограничений на управляющие воздействия и скорость их изменения, т. е. выполнение неравенств

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{y}}_{\min} &\leq \tilde{\mathbf{y}}(t) \leq \tilde{\mathbf{y}}_{\max}, \\ \tilde{\mathbf{u}}_{\min} &\leq \tilde{\mathbf{u}}(t) \leq \tilde{\mathbf{u}}_{\max}, \\ \Delta \tilde{\mathbf{u}}_{\min} &\leq \dot{\tilde{\mathbf{u}}}(t) \leq \Delta \tilde{\mathbf{u}}_{\max}, \end{aligned} \quad (16)$$

где $\tilde{\mathbf{y}}_{\min}, \tilde{\mathbf{y}}_{\max}, \tilde{\mathbf{u}}_{\min}, \tilde{\mathbf{u}}_{\max}, \Delta \tilde{\mathbf{u}}_{\min}, \Delta \tilde{\mathbf{u}}_{\max}$ — заданные значения.

Рассмотрим процесс синтеза закона управления в этом случае. В первую очередь дискретизируем модель (15), предварительно представив ее в пространстве состояний. Пусть n_e — количество ненулевых элементов первой суммы уравнения (15). Эти элементы, соответствующие передаточным функциям от управляющего сигнала, могут быть представлены в виде систем

$$\begin{aligned} \dot{x}_{ij} &= -\frac{1}{T_{ij}} x_{ij} + \frac{k_{ij}}{T_{ij}} u_j(t - \tau_{ij}), \\ y_{ij} &= x_{ij}. \end{aligned} \quad (17)$$

Аналогичные системы могут быть записаны и для ненулевых элементов второй суммы из (15), представляющих собой передаточные матрицы от внешнего возмущения. Пусть таких элементов n_{ed} . Как было сказано ранее, внешние возмущения либо постоянны, либо изменяются медленно, потому их динамику можно приближенно описать уравнениями

$$\dot{f}_q = 0, \quad q = \overline{1, n_w}.$$

Зададим шаг дискретизации T_s и при помощи формулы Коши осуществим дискретизацию системы (17). В результате находим, что

$$\begin{aligned} x_{ij}[k+1] &= a_{ij}x_{ij}[k] + b_{ij}u_j[k - \tau_{ij}^d], \\ y_{ij}[k] &= x_{ij}[k]. \end{aligned}$$

Здесь $a_{ij} = e^{-T_s/T_{ij}}$, $b_{ij} = (1 - e^{-T_s/T_{ij}})k_{ij}$ — вещественные числа, $\tau_{ij}^d \geq 1$ — количество шагов дискретизации, соответствующее запаздыванию τ_{ij} . Аналогичным образом получим дискретизированные системы, соответствующие передаточным функциям от внешнего возмущения. Динамика самого внешнего возмущения в дискретной форме принимает вид

$$f_q[k+1] = f_q[k], \quad q = \overline{1, n_w}.$$

Пусть \mathbf{x}_s — вектор, состоящий из переменных, соответствующих передаточным функциям от управляющего сигнала, \mathbf{x}_e — аналогично для передаточных функций от внешнего возмущения, \mathbf{f} — вектор внешних возмущений. Объединим приведенные величины в единый вектор состояния $\mathbf{x}_m = (\mathbf{x}_s \quad \mathbf{x}_e \quad \mathbf{f})^T$. Избавимся от запаздывания, дополнив вектор состояния дополнительными векторами, моделирующими запаздывание [11]: \mathbf{x}_d — для запаздывания управляющего сигнала, \mathbf{x}_{de} — для внешнего возмущения. В итоге расширенную модель без запаздывания, эквивалентную исходной (15), можно описать как систему

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[i+1] &= \mathbf{A}\mathbf{x}[i] + \mathbf{B}\mathbf{u}[i], \\ \mathbf{y}[i] &= \mathbf{C}\mathbf{x}[i], \end{aligned} \tag{18}$$

в которой $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_m \quad \mathbf{x}_d \quad \mathbf{x}_{de})^T$ — расширенный вектор состояния с учетом моделирования запаздывания.

5. Синтез МРС-управления. В соответствии с МРС-подходом сформируем прогнозирующую модель на основе системы (18). В результате имеем систему

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[i+1] &= \mathbf{A}\mathbf{x}[i] + \mathbf{B}\mathbf{u}[i], \quad i = k+j, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad \mathbf{x}[k] = \tilde{\mathbf{x}}[k], \\ \mathbf{y}[i] &= \mathbf{C}\mathbf{x}[i]. \end{aligned} \tag{19}$$

Для линейных прогнозирующих моделей задача оптимизации (14) может быть записана в более подробной форме. Заметим, что с учетом обозначений (7) дискретную систему (19) можно записать следующим образом:

$$\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{L}\mathbf{x}[k] + \mathbf{M}\bar{\mathbf{u}}, \tag{20}$$

где

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^P \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{CB} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{CAB} & \mathbf{CB} & \cdots & \mathbf{0} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \mathbf{CA}^{P-1}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{P-2}\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{CB} \end{pmatrix}.$$

Теперь можем выразить динамику $\bar{\mathbf{y}}$ на горизонте прогноза через изменения управляющего сигнала $\Delta\bar{\mathbf{u}}$, подставив соотношение (12) в (20) и введя обозначения $\tilde{\mathbf{M}}_0 = \mathbf{MM}_0$, $\tilde{\mathbf{M}}_1 = \mathbf{MM}_1$:

$$\bar{\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{y}}(\Delta\bar{\mathbf{u}}) = \mathbf{Lx}[k] + \tilde{\mathbf{M}}_0\mathbf{u}[k-1] + \tilde{\mathbf{M}}_1\Delta\bar{\mathbf{u}}. \quad (21)$$

Уточним допустимое множество. С учетом того, что рассматривается дискретная система в отклонениях от положения равновесия, введем на основе неравенств (16) обозначения

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{\max} &= \tilde{\mathbf{y}}_{\max} - \mathbf{y}_s, & \mathbf{y}_{\min} &= \tilde{\mathbf{y}}_{\min} - \mathbf{y}_s, \\ \mathbf{u}_{\max} &= \tilde{\mathbf{u}}_{\max} - \mathbf{u}_s, & \mathbf{u}_{\min} &= \tilde{\mathbf{u}}_{\min} - \mathbf{u}_s, \\ \Delta\mathbf{u}_{\max} &= T_s\Delta\tilde{\mathbf{u}}_{\max}, & \Delta\mathbf{u}_{\min} &= T_s\Delta\tilde{\mathbf{u}}_{\min}. \end{aligned}$$

Тогда ограничения для системы (19) примут вид

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{\min} &\leq \mathbf{y}[k] \leq \mathbf{y}_{\max}, \\ \mathbf{u}_{\min} &\leq \mathbf{u}[k] \leq \mathbf{u}_{\max}, \\ \Delta\mathbf{u}_{\min} &\leq \Delta\mathbf{u}[k] \leq \Delta\mathbf{u}_{\max}. \end{aligned} \quad (22)$$

Таким образом, с учетом соотношения (21) и неравенств (22) можем переписать условия (8) так:

$$\bar{\mathbf{y}}_{\min} - \varepsilon \leq \mathbf{Lx}[k] + \tilde{\mathbf{M}}_0\mathbf{u}[k-1] + \tilde{\mathbf{M}}_1\Delta\bar{\mathbf{u}} \leq \bar{\mathbf{y}}_{\max} + \varepsilon, \quad \varepsilon \geq \mathbf{0}. \quad (23)$$

Введем обозначения

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{M}}_1 & -\mathbf{E} \\ -\tilde{\mathbf{M}}_1 & -\mathbf{E} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{E} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{u}}_{\max} \\ -\bar{\mathbf{u}}_{\min} \\ \Delta\bar{\mathbf{u}}_{\max} \\ -\Delta\bar{\mathbf{u}}_{\min} \\ \bar{\mathbf{y}}_{\max} \\ -\bar{\mathbf{y}}_{\min} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\mathbf{M}_0 \\ \mathbf{M}_0 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ -\tilde{\mathbf{M}}_0 \\ \tilde{\mathbf{M}}_0 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{u}[k-1] + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ -\mathbf{L} \\ \mathbf{L} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{x}[k].$$

Тогда с учетом (13), (22) и (23) запишем допустимое множество как систему линейных неравенств

$$\Omega = \left\{ (\Delta\bar{\mathbf{u}}, \varepsilon) \in E^{(m+r)P} : \mathbf{A} \begin{pmatrix} \Delta\bar{\mathbf{u}} \\ \varepsilon \end{pmatrix} \leq \mathbf{b} \right\}. \quad (24)$$

Таким образом, поставим задачу оптимизации на горизонте прогноза с допустимым множеством (24) для случая линейной дискретной прогнозирующей модели в виде

$$J_k = J_k(\Delta\bar{\mathbf{u}}, \varepsilon) = (\Delta\bar{\mathbf{u}} \ \varepsilon)^T \tilde{\mathbf{H}} \begin{pmatrix} \Delta\bar{\mathbf{u}} \\ \varepsilon \end{pmatrix} \rightarrow \min_{(\Delta\bar{\mathbf{u}} \ \varepsilon) \in \Omega \subseteq E^{(m+r)P}}, \quad (25)$$

где $\tilde{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{Q}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \rho \mathbf{R} \end{pmatrix}$ — симметрическая положительно определенная матрица. Обратим внимание на тот факт, что в данном случае задача оптимизации представляет собой задачу квадратичного программирования, позволяя достаточно эффективно находить численные решения в режиме реального времени.

В завершение дополнительно рассмотрим следующую проблему. На практике прогнозирующая модель есть лишь некоторое упрощенное описание реальных процессов. При этом числовые параметры модели также являются приближением реальных значений. Более того, параметры объекта управления могут меняться в зависимости от времени. В связи с этим может возникнуть ситуация, когда какие-то контролируемые переменные не попадут внутрь заданного диапазона из-за неточностей в модели. Для того чтобы минимизировать расхождение измерений реальной системы и выхода прогнозирующей модели, будем использовать такой подход. На каждом шаге k будем добавлять к выходу прогнозирующей системы на горизонте прогноза разность между текущим измерением реального объекта и скорректированным соответствующим выходом прогнозирующей модели с предыдущего шага. Таким образом, в момент времени k скорректированный выход прогнозирующей модели можно представить следующим образом:

$$\bar{\mathbf{y}}^* = \bar{\mathbf{y}} + (\tilde{\mathbf{y}}[k] - \mathbf{y}_{k-1}^*[k]). \quad (26)$$

Подобный подход является дополнительной формой обратной связи, позволяя в какой-то мере компенсировать неточность прогнозирующей модели.

6. Пересчет модели при включении/выключении переменных. Теперь обратимся к вопросам изменения прогнозирующей модели за счет исключения некоторых переменных состояния или управления в тех режимах, где они постоянны или медленно изменяются, либо, наоборот, включения ранее исключенных переменных в соответствующих режимах работы.

Исключение контролируемых переменных влияет на размерность матриц \mathbf{L} и \mathbf{M} дискретной прогнозирующей модели (20). В свою очередь, это приводит к изменению размерности системы линейных неравенств в допустимом множестве (24). Таким образом, задача нелинейной оптимизации упрощается за счет уменьшения размерности ограничений, что позволяет сократить время расчета очередного цикла управления.

Размерность оптимизационной задачи можно понизить еще больше за счет следующей идеи. Если какие-то управляющие переменные входили только в уравнение исключаемой контролируемой переменной в tf-форме, то они тоже должны быть исключены из модели ввиду отсутствия влияния на динамику системы. Исключение управляющих переменных, помимо снижения количества ограничений, ведет также к уменьшению размерности вектора оптимизируемых параметров.

Аналогичные идеи применимы и в случае исключения управляющих переменных. Если какие-либо контролируемые переменные зависели только от исключаемых управляющих, то такие переменные тоже должны быть исключены из прогнозирующей модели, поскольку, фактически, перестают быть контролируемыми.

Включение переменных происходит следующим образом. Так как невозможно гарантировать соблюдение ограничений на контролируемые переменные, у которых выключены все соответствующие управляющие, то такие переменные включаются только в том случае, если включена хотя бы одна управляющая переменная, влияющая на ее динамику. На включение управляющих переменных не накладываются никакие ограничения.

Рассмотрим для примера систему с четырьмя входами и четырьмя выходами:

$$\begin{aligned}y_1 &= u_1, \\y_2 &= u_1 + u_2, \\y_3 &= u_2 + u_3, \\y_4 &= u_1 + u_2 + u_3 + u_4.\end{aligned}$$

Исключение переменных y_3 и y_4 приводит к тому, что в модели остаются только контролируемые переменные y_1 и y_2 , а также управляющие переменные u_1 и u_2 :

$$\begin{aligned}y_1 &= u_1, \\y_2 &= u_1 + u_2.\end{aligned}$$

При исключении же из исходной системы управляющих переменных u_1 и u_2 в модели остаются только контролируемые переменные y_3 и y_4 , а также управляющие переменные u_3 и u_4 :

$$\begin{aligned}y_3 &= u_3, \\y_4 &= u_3 + u_4.\end{aligned}$$

7. Имитационное моделирование. Проиллюстрируем работу представленного подхода на примере экспериментов с компьютерной моделью объекта управления, в качестве которого выступает ректификационная колонна. Математической моделью объекта управления является линейная стационарная система в tf-форме

$$\begin{aligned}y_1 &= \frac{1}{0.5s + 1}u_2 + \frac{1}{0.5s + 1}u_3 + \frac{1}{0.5s + 1}u_4 + \frac{1}{0.5s + 1}u_5, \\y_2 &= \frac{600}{1.5s + 1}e^{-0.2s}u_1 - \frac{0.05}{2s + 1}e^{-0.2s}u_2, \\y_3 &= \frac{600}{1.5s + 1}e^{-0.2s}u_1 - \frac{0.05}{2s + 1}e^{-0.2s}u_3, \\y_4 &= \frac{600}{1.5s + 1}e^{-0.2s}u_1 - \frac{0.05}{2s + 1}e^{-0.2s}u_4, \\y_5 &= \frac{600}{1.5s + 1}e^{-0.2s}u_1 - \frac{0.05}{2s + 1}e^{-0.2s}u_5.\end{aligned}$$

Как и ранее, целью управления является удержание контролируемых переменных в заданном диапазоне с учетом ограничений на величину и скорость изменения управляющего сигнала. При этом установившееся значение контролируемых переменных внутри диапазона не имеет значения. Параметры системы представлены в табл. 1 и 2. Отметим, что абсолютные значения контролируемых переменных в начальный момент времени находятся за пределами заданного диапазона. Будем использовать шаг дискретизации $T_s = 0.2$ мин, горизонт прогноза $P = 25$, что соответствует времени 5 мин, и значение $\rho = 100$. Предположим также, что прогнозирующая модель совпадает с моделью исходного объекта управления за исключением одной передаточной функции

$$y_1 = \frac{2}{s + 1}u_2.$$

**Таблица 1. Исходные данные
для контролируемых переменных**

Переменные	y_s	\bar{y}_{\min}	\bar{y}_{\max}
\tilde{y}_1	10069	9800	9900
\tilde{y}_2	841	830	835
\tilde{y}_3	841	830	835
\tilde{y}_4	841	830	835
\tilde{y}_5	841	830	835

Таблица 2. Исходные данные для управляющего сигнала

Переменные	u_s	\tilde{u}_{\min}	\tilde{u}_{\max}	$\Delta\tilde{u}_{\min}$	$\Delta\tilde{u}_{\max}$
\tilde{u}_1	1.22	1.1	1.3	-0.01	0.01
\tilde{u}_2	2517	2400	2600	-50	50
\tilde{u}_3	2517	2400	2600	-50	50
\tilde{u}_4	2517	2400	2600	-50	50
\tilde{u}_5	2517	2400	2600	-50	50

Сравнительные графики переходных процессов без коррекции и с коррекцией прогноза представлены на рис. 1, I, II. Можно заметить, что без использования коррекции прогноза значение контролируемой переменной y_1 не попадает в заданный диапазон из-за несоответствия исходной и прогнозирующей моделей. Входные переменные остаются в рамках ограничений. При включении корректировки прогноза все контролируемые переменные оказываются внутри заданного диапазона, входные переменные также не выходят за пределы соответствующих ограничений. Таким образом, здесь корректировка прогноза действительно позволяет скомпенсировать неточность прогнозирующей модели.

Далее будем считать, что прогнозирующая модель полностью совпадает с моделью исходного объекта. На рис. 2, I, II представлена динамика системы, когда $\rho = 0.1$ и $\rho = 100$. Видно, что меньшее значение коэффициента приводит к более долгому переходному процессу. Таким образом, за счет выбора этого коэффициента можно обеспечить желаемое качество динамики.

Теперь рассмотрим следующую ситуацию. Пусть в начальный момент времени переменная y_1 выключена, а в момент времени $t = 2$ мин она включается в модель. Динамика системы для этого случая при $\rho = 100$ представлена на рис. 3, I, II. Видно, что в момент времени $t = 2$ мин происходит изменение характера переходных процессов, и значение переменной y_1 начинает двигаться внутрь заданных ограничений. При этом остальные переменные системы также выдерживают заданные ограничения.

Перейдем к вопросу изменения этих ограничений. Пусть в начальный момент времени начальные данные и ограничения совпадают с исходными значениями, представленными в табл. 1 и 2. Изменим в момент времени $t = 3$ мин значение нижней границы контролируемой переменной y_3 с 830 на 831. Соответствующая динамика представлена на рис. 4, I, II. Видно, что после изменения границы динамика системы меняется, и переменная y_3 переходит в другое положение равновесия, соблюдающее новое ограничение. Таким образом, приведенный подход действительно позволяет в режиме реального времени изменять заданные ограничения.

Наконец, обратим внимание на следующий режим. Пусть в начальный момент времени включены все переменные, $\rho = 100$, горизонт прогноза $P = 40$ и в момент времени $t = 5$ мин выключается переменная y_1 . Динамика системы в этом случае совпадает с динамикой на рис. 2, I при $\rho = 100$. Однако время, затраченное на решение оптимизационной задачи на каждом шаге управления, снижается почти на треть на

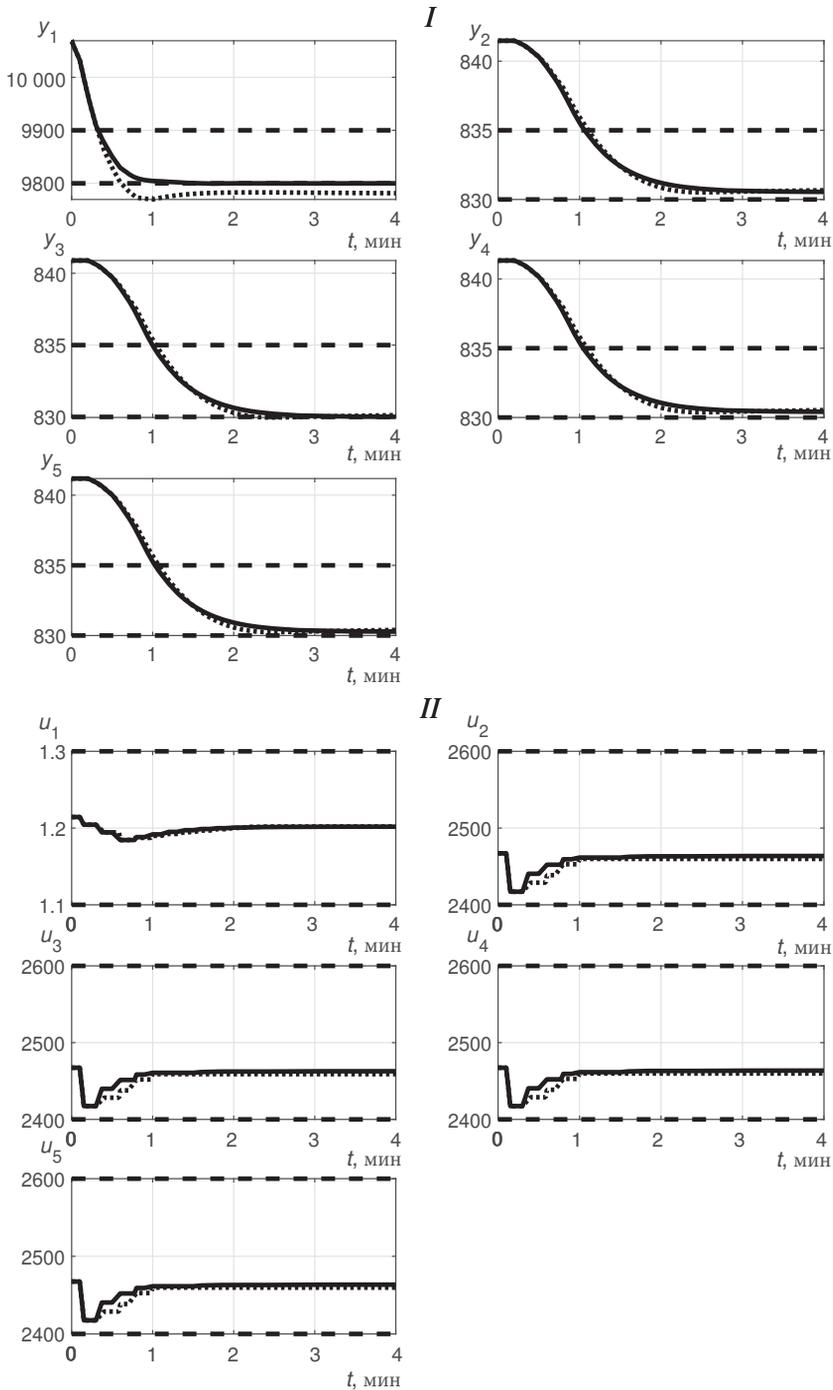


Рис. 1. Динамика контролируемых переменных (I) и управляющего сигнала (II)
 Длинный пунктир — заданные ограничения, короткий — динамика переменных без корректировки прогноза, сплошная линия — динамика переменных с корректировкой.

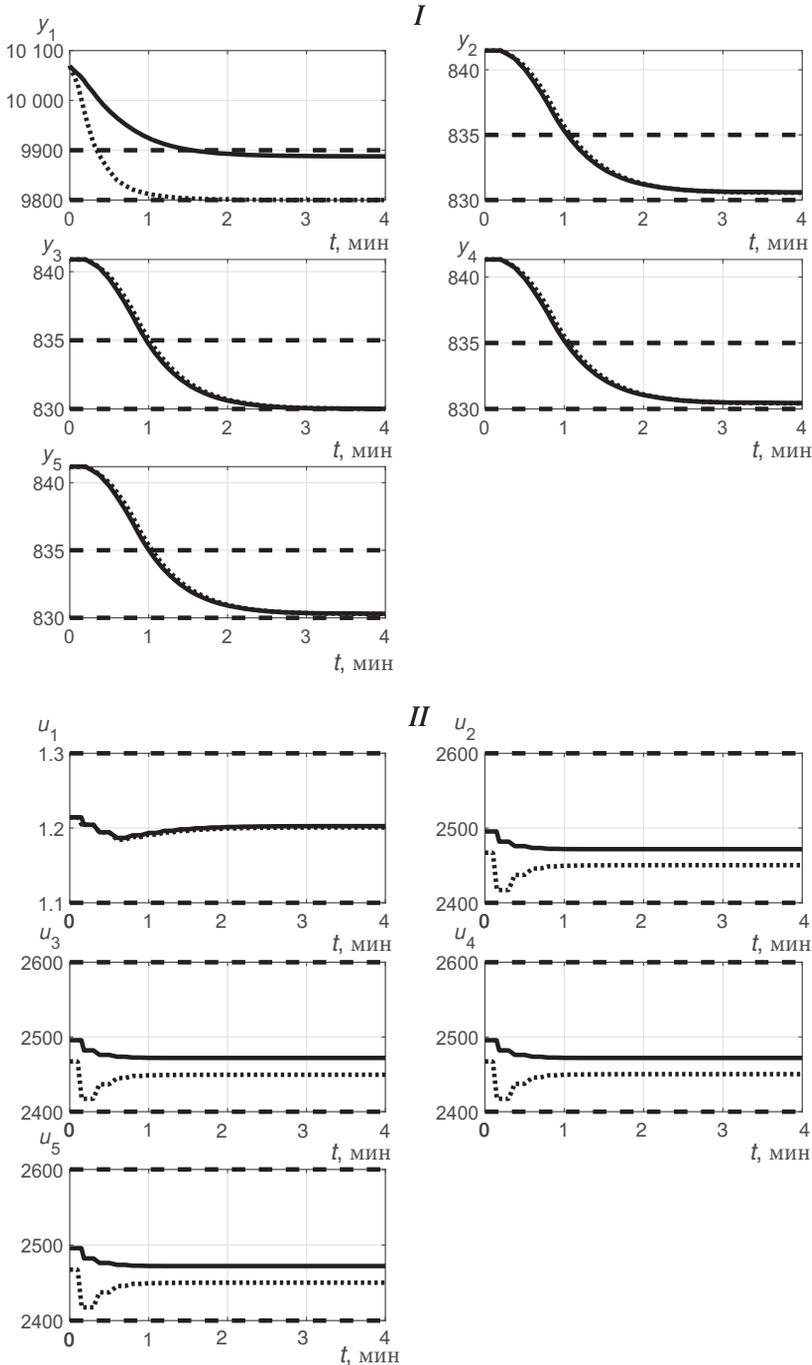


Рис. 2. Динамика контролируемых переменных (I) и управляющего сигнала (II)
 Длинный пунктир — заданные ограничения, короткий — динамика переменных при $\rho = 100$,
 сплошная линия — динамика переменных при $\rho = 0.1$.

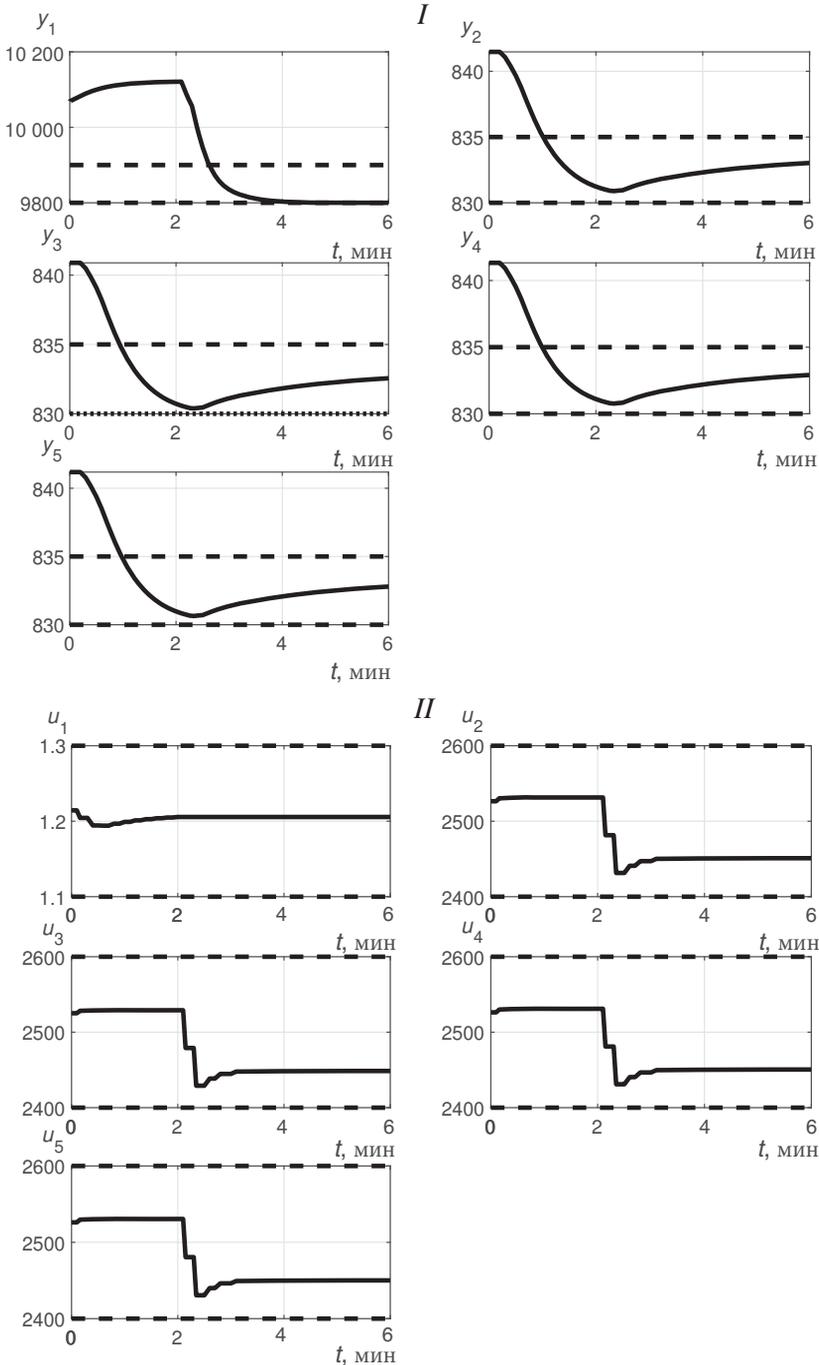


Рис. 3. Динамика контролируемых переменных (I) и управляющего сигнала (II) при включении переменной y_1
 Длинный пунктир — заданные ограничения, сплошная линия — динамика переменных.

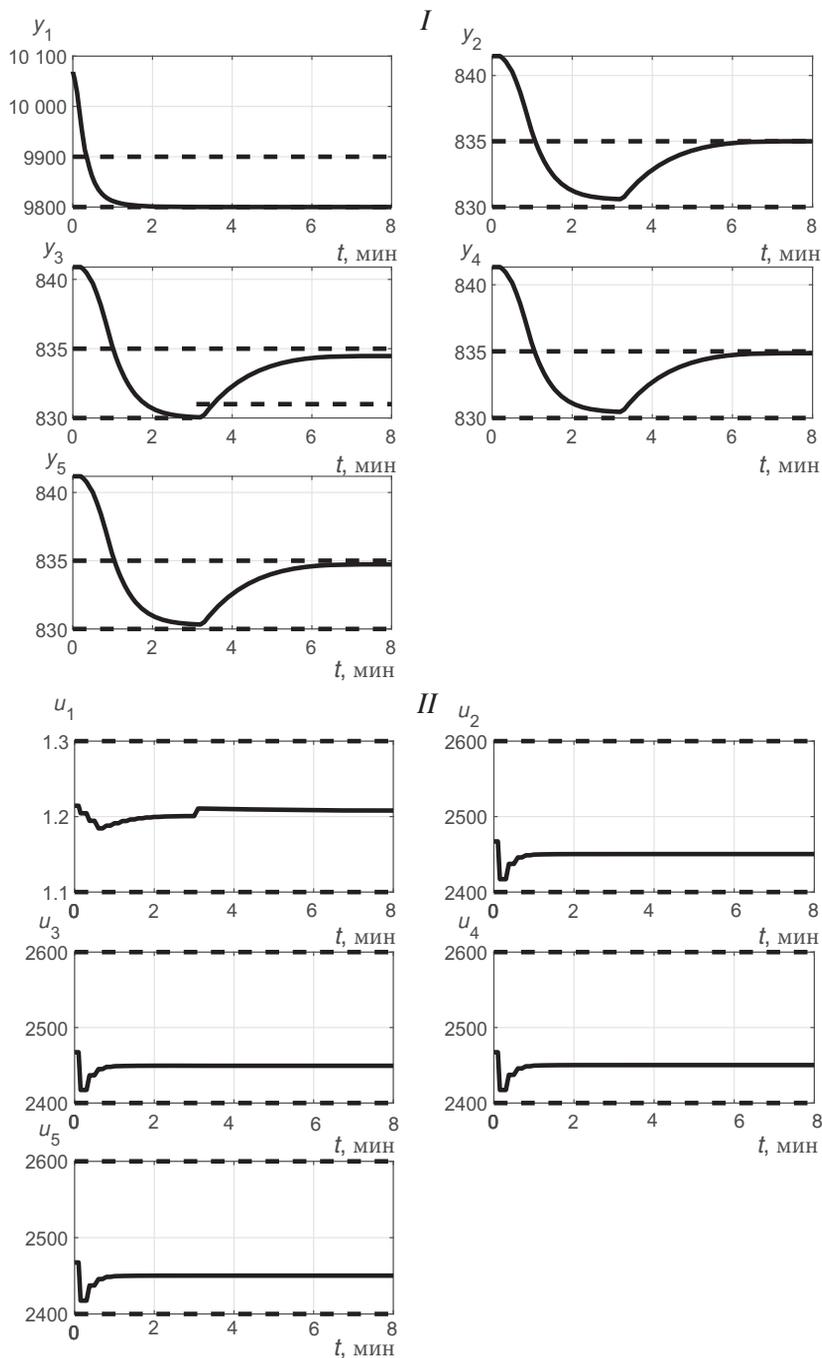


Рис. 4. Динамика контролируемых переменных (*I*) и управляющего сигнала (*II*) при изменении нижней границы y_3
Длинный пунктир — заданные ограничения, сплошная линия — динамика переменных.

процессоре AMD Ryzen 7 3700X. Таким образом, выключение отдельных переменных действительно может значительно снизить вычислительную нагрузку в соответствующих режимах.

8. Заключение. Был рассмотрен подход к решению задачи удержания контролируемых переменных в заданном диапазоне с учетом ограничений на величину управляющего сигнала и его изменение для нелинейного объекта управления с запаздыванием по управляющему сигналу и внешним возмущениям. Представленный подход основан на методологии управления с прогнозирующей моделью (Model Predictive Control, MPC). Приведен функционал качества для задачи нелинейной оптимизации, учитывающий штраф за выход контролируемых переменных за пределы заданного диапазона и гарантирующий непустое допустимое множество благодаря использованию вспомогательных переменных, что позволяет изменять ограничения в режиме реального времени. Разработан способ компенсации неточностей прогнозирующей модели за счет корректировки прогноза добавлением разницы между фактическим измерением и спрогнозированным значением с предыдущего шага. Описана идея пересчета прогнозирующей модели при включении и выключении переменных системы для экономии вычислительных ресурсов. Проведены различные эксперименты с компьютерной моделью ректификационной колонны, демонстрирующие эффективность описанного подхода.

Литература

1. Смирнова М. А., Смирнов М. Н., Смирнов Н. В. Система многоцелевого управления роботом-манипулятором // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2022. Т. 18. Вып. 4. С. 621–630. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2022.415>
2. Burdick D. L., Leffler W. L. Petrochemicals in nontechnical language. Ed. 4. Oklahoma, USA: PennWell Corp., 2010. 460 p.
3. Lahiri S. K. Multivariable predictive control: Applications in industry. Hoboken, USA: John Wiley & Sons Publ., 2017. 304 p.
4. Kowaritakis B., Cannon M. Model predictive control: Classical, robust and stochastic. Cham: Springer International Publishing, 2016. 397 p.
5. Camacho E. F., Bordons C. Model predictive control. Ed. 2. London: Springer-Verlag, 2007. 427 p.
6. Faulwasser T., Müller M. A., Worthmann K. Recent advances in model predictive control: Theory, algorithms, and applications. Cham: Springer, 2021. 253 p.
7. Sotnikova M. Plasma stabilization based on model predictive control // International Journal of Modern Physics A. 2009. Vol. 24. N 5. P. 999–1008.
8. Sotnikova M. Ship dynamics control using predictive models // IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline). 2012. Vol. 45. N 27. Pt 1. P. 250–255.
9. Corriou J. P. Process control: Theory and applications. Cham: Springer, 2018. 883 p.
10. Zhabko N. A., Karelin V. V., Provotorov V. V., Sergeev S. M. The method of penalty functions in the analysis of optimal control problems of Navier – Stokes evolutionary systems with a spatial variable in a network-like domain // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2023. Т. 19. Вып. 2. С. 162–175. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.203>
11. Сотникова М. В. Синтез цифрового управления с прогнозом для удержания контролируемых переменных в заданном диапазоне // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2019. Т. 15. Вып. 3. С. 397–409. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2019.309>
12. Сотникова М. В., Севостьянов Р. А. Цифровое управление контролируемыми переменными в заданном диапазоне с учетом запаздывания // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2021. Т. 17. Вып. 4. С. 449–463. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.412>

13. *Sotnikova M., Sevostyanov R.* Optimal control of output variables within a given range based on a predictive model // *Mathematical Optimization Theory and Operations Research: Recent Trends. MOTOR 2022. Communications in Computer and Information Science. 2022. Vol. 1661. P. 272–285.*

Статья поступила в редакцию 25 октября 2024 г.

Статья принята к печати 12 декабря 2024 г.

Контактная информация:

Sevost'yanov Ruslan Andreevich — канд. физ.-мат. наук, ассистент;
<https://orcid.org/0000-0001-5783-6931>, r.sevostianov@spbu.ru

Sotnikova Margarita Viktorovna — д-р физ.-мат. наук, доц.;
<https://orcid.org/0000-0003-0726-7448>, m.sotnikova@spbu.ru

Digital algorithm for adaptive control of controlled variables in a given range

R. A. Sevostyanov, M. V. Sotnikova

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg,
199034, Russian Federation

For citation: Sevostyanov R. A., Sotnikova M. V. Digital algorithm for adaptive control of controlled variables in a given range. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2025, vol. 21, iss. 1, pp. 151–168.
<https://doi.org/10.21638/spbu10.2025.111> (In Russian)

The article is devoted to the issues of a digital control system synthesis for an arbitrary nonlinear object, including taking into account the delay. An important feature is the absence of a reference signal, the purpose of control is to maintain the controlled variables in a given range. The problem under consideration is solved based on the control method with a predictive model and a special quality functional. It is shown that the optimal control problem at each step is reduced to a nonlinear optimization problem, while the admissible set is never empty due to the use of auxiliary variables. This approach allows changing the restrictions on the control and measured variables in real time. Another important feature is the ability to turn on and off the variables of the control object during its operation, as well as to adjust the prediction for cases where the model is not known exactly. The efficiency of the proposed approach is demonstrated using the example of experiments with a computer model of a rectification column for refining petroleum products.

Keywords: digital control, adaptivity, control in a given range.

References

1. Smirnova M. A., Smirnov M. N., Smirnov N. V. Sistema mnogocelevego upravleniya robotom-manipulyatorom [Multi-purpose robotic arm control system]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2022, vol. 18, iss. 4, pp. 621–630. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2022.415> (In Russian)
2. Burdick D. L., Leffler W. L. *Petrochemicals in nontechnical language*. Ed. 4. Oklahoma, USA, PennWell Corp. Publ., 2010, 460 p.
3. Lahiri S. K. *Multivariable predictive control: Applications in industry*. Hoboken, USA, John Wiley & Sons Publ., 2017, 304 p.
4. Kouvaritakis B., Cannon M. *Model predictive control: Classical, robust and stochastic*. Cham, Springer International Publishing, 2016, 397 p.
5. Camacho E. F., Bordons C. *Model predictive control*. Ed. 2. London, Springer-Verlag, 2007, 427 p.
6. Faulwasser T., Müller M. A., Worthmann K. *Recent advances in model predictive control: Theory, algorithms, and applications*. Cham, Springer, 2021, 253 p.
7. Sotnikova M. Plasma stabilization based on model predictive control. *International Journal of Modern Physics A*, 2009, vol. 24, no. 5, pp. 999–1008.

8. Sotnikova M. Ship dynamics control using predictive models. *IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline)*, 2012, vol. 45, no. 27, pt 1, pp. 250–255.
9. Corriou J. P. *Process control: Theory and applications*. Cham, Springer, 2018, 883 p.
10. Zhabko N. A., Karelin V. V., Provotorov V. V., Sergeev S. M. The method of penalty functions in the analysis of optimal control problems of Navier — Stokes evolutionary systems with a spatial variable in a network-like domain. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2023, vol. 19, iss. 2, pp. 162–175. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.203>
11. Sotnikova M. V. Sintez cifrovogo upravleniya s prognozom dlya uderzhaniya kontroliruemyyh peremennyh v zadannom diapazone [Digital control design based on predictive models to keep the controlled variables in a given range]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2019, vol. 15, iss. 3, pp. 397–409. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2019.309> (In Russian)
12. Sotnikova M. V., Sevostyanov R. A. Cifrovoe upravlenie kontroliruemymi peremennymi v zadannom diapazone s uchetom zapazdyvaniya [Digital control of output variables in a given range considering delay]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2021, vol. 17, iss. 4, pp. 449–463. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.412> (In Russian)
13. Sotnikova M., Sevostyanov R. Optimal control of output variables within a given range based on a predictive model. *Mathematical Optimization Theory and Operations Research: Recent Trends. MOTOR 2022. Communications in Computer and Information Science*, 2022, vol. 1661, pp. 272–285.

Received: October 25, 2024.

Accepted: December 12, 2024.

Authors' information:

Ruslan A. Sevostyanov — PhD in Physics and Mathematics, Assistant;
<https://orcid.org/0000-0001-5783-6931>, r.sevostianov@spbu.ru

Margarita V. Sotnikova — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Associate Professor;
<https://orcid.org/0000-0003-0726-7448>, m.sotnikova@spbu.ru