

## Редуцированные модели переноса нейтралов в плазме токамака в одномерной геометрии

А. А. Кожурин<sup>1</sup>, М. Л. Дубров<sup>2</sup>, В. Е. Жоголев<sup>1</sup>, Р. Р. Хайрутдинов<sup>1</sup>, В. Э. Лукаш<sup>1</sup>,  
А. А. Кавин<sup>3</sup>, Р. Р. Андрианова<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт»,  
Российская Федерация, 123182, Москва, пл. Академика Курчатова, 1

<sup>2</sup> Международная организация ИТЭР,  
Франция, 13067, Сен-Поль-ле-Дюранс, Дорога Вион-сюр-Вердон, CS 90 046

<sup>3</sup> Научно-исследовательский институт электрофизической аппаратуры им. Д. В. Ефремова,  
Российская Федерация, 196641, Санкт-Петербург, пос. Металлострой, дорога на Металлострой, 3

**Для цитирования:** Кожурин А. А., Дубров М. Л., Жоголев В. Е., Хайрутдинов Р. Р., Лукаш В. Э., Кавин А. А., Андрианова Р. Р. Редуцированные модели переноса нейтралов в плазме токамака в одномерной геометрии // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2025. Т. 21. Вып. 1. С. 28–46. <https://doi.org/10.21638/spbu10.2025.103>

Численно реализованы модели транспорта нейтралов в плазме токамака для расширения функционала кода ДИНА и оценены их эффективности: двумерная модель на основе метода Монте-Карло (новый двумерный код MCN-2D), редуцированные кинетические модели Ю. Н. Днестровского с моноэнергетическими распределениями первичных нейтралов и ионов и диффузионная модель. Выполнен обзор моделей на основе метода Монте-Карло. В качестве эталонных профилей параметров нейтралов использованы результаты расчетов Монте-Карло кодом EIRENE. Показано, что редуцированная кинетическая модель в плоскоодномерной геометрии может быть использована в быстрых расчетах при выполнении условий применимости, диффузионная модель может давать существенные отклонения в баланс энергии. Для более точных вычислений с точки зрения интегрального баланса частиц и энергии предлагается применять код MCN-2D, который может учитывать геометрию плазменного шнура, а также будет иметь возможность самосогласованно считать транспорт нейтралов с захватом пристеночной области, или цилиндрический вариант редуцированной кинетической модели.

**Ключевые слова:** транспортные процессы, нейтралы, токамак, код ДИНА, метод Монте-Карло.

**1. Введение.** Подпитка новыми частицами осуществляется через периферическую область (SOL — Scrape-off layer) либо накачкой нейтрального газа, либо инъекцией топливных таблеток (пеллет), либо инъекцией высокоэнергетических нейтралов. Возможно существенное влияние на разряд подачей нейтралов инертных газов, например, для переизлучения мощности в SOL и соответственно снижения тепловых нагрузок на пластины дивертора токамака или подавления последствий срыва [1]. Нейтралы за счет распыления стенки служат основным источником загрязнения плазмы тяжелыми ионами. Потому транспортные процессы нейтральной компоненты [2, 3] имеют большое практическое значение. При этом важным направлением для правильного описания физических процессов является совершенствование численных моделей переноса нейтралов для прогнозирования их распределения по объ-

ему плазмы. В настоящей работе рассматриваются транспортные модели переноса нейтралов в плазме токамака. Часть из них уже реализована в плазмозфизическом коде ДИНА [4, 5], широко применяемом для моделирования эволюции плазмы как во многих действующих токамаках, так и при проектировании токамака-реактора ИТЭР (<https://www.iter.org/contact-us>) [6, 7].

Дву- и трехмерные по координатам транспортные модели нейтралов на основе метода Монте-Карло [8, 9] зарекомендовали себя в задачах моделирования периферийной плазмы, поскольку сочетают в себе высокую надежность и полноту описываемых процессов, но при этом требуют значительного количества расчетов, поскольку для уменьшения статистического разброса значений концентраций (и других кинетических характеристик) нейтралов необходимо большое число пробных частиц. Трехмерная модель, использующая аппарат функций Грина и итерации при решении уравнений для источников нейтралов, приведена в [10]. Двумерная по координатам модель на основе метода ТЕР (transmission-escape probabilities) [11], применявшаяся изначально для моделирования переноса нейтронов в атомных реакторах, была адаптирована для расчетов переноса нейтралов в плазме токамака. Редуцированные до одномерного по координате случая кинетические модели [12–15] приближаются по подробности к методам Монте-Карло в случаях, близких к цилиндрической или плоскоодномерной симметрии моделируемого участка плазменного шнура и сетки, и превосходят по точности методы Монте-Карло при моделировании проникновения нейтралов в область центральной плазмы. Некоторые другие модели также представлены в таблице в конце работы [16, с. 307].

В данной работе будут рассмотрены следующие модели переноса нейтралов: модели на основе метода Монте-Карло (в частности, код MCN-2D [17]), редуцированные кинетические транспортные модели нейтралов Ю. Н. Днестровского в плоскоодномерной (Dn-Kin-1D) и цилиндрической геометрии (Dn-Kin-CYL) [13], двухгрупповая диффузионная транспортная модель (Diffus) [18]. В таблице представлены численные реализации моделей. Приняты такие сокращения:  $R$  — допустимое количество реальных пространственных координат для вывода профилей,  $D$  — количество учитываемых в переносе координат (дробное значение означает, что по одной из координат имеет место симметрия и однородность параметров фона, либо она учитывается приближенно),  $V$  — количество учитываемых компонент скорости. Для диффузионной модели знак усреднения в  $D$  показывает, что проводится усреднение метрических коэффициентов, а знак модуля в  $V$  — что в модели используется приближение изотропной скорости. В коде MCN-2D также планируется реализация временного режима для нестационарных расчетов, а неупругое отражение нейтралов на границе не рассматривается, поскольку не является критичным блоком для общей производительности кодов Монте-Карло.

*Таблица. Качественные параметры моделей, используемых в кодах переноса нейтралов*

Код (метод)	$R$	$D$	$V$	Учет потоковой скорости иона при перезарядке	Группы по энергиям	Временной режим
EIRENE в SOLPS	2	2.5	3	+	+	+
MCN-2D	2	2	3	+	+	—
Dn-Kin-CYL	1	1.5	2	—	+	—
Dn-Kin-1D	1	1	1	—	+	—
Diffus	1	<3>	V	—	—	+

**2. Описание моделирования переноса нейтралов на основе метода Монте-Карло.** Теперь перейдем к рассмотрению метода Монте-Карло для задач транспорта нейтралов в плазме. Используются ячеечные сетки, внутри ячейки параметры плазмы фиксированы. Ключевую роль играет следующее выражение [19–21]:

$$\xi = \exp\left(-\int_0^L \frac{ds}{\lambda(s)}\right), \quad \lambda = \frac{v_N}{n_e \langle \sigma v \rangle_{\text{ion}} + n_i \langle \sigma v \rangle_{\text{cx}}}, \quad (1)$$

где  $\xi$  — случайное число, равномерно распределенное в пределах  $0 < \xi < 1$ ;  $L$  — длина свободного пробега нейтрала;  $\lambda(s)$  — средняя длина свободного пробега нейтрала (постоянная в пределах выбранной ячейки). Выражение (1) задает распределение длин  $L$  свободного пробега нейтралов. Величина  $\xi$  генерируется в начале пути нейтрала, в том числе после перезарядки иона или рекомбинации. Случайные числа применяются также для того, чтобы определить, какой процесс (ионизации или перезарядки) имеет место при столкновении нейтрала с полевыми частицами, вероятность перезарядки дается отношением частоты перезарядок к частоте всех возможных реакций.

Важно отметить, что для получения величины концентрации нейтралов в ячейках возможны два основных пути: оценка по столкновениям [19, 22] и оценка по длине пробега [22]. Первый метод применялся в коде транспорта нейтралов DEGAS [9, 19]. Если подсчитать число ионизаций в ячейке для всех расчетных траекторий нейтралов, можно определить плотность нейтралов в ячейке:

$$n_e N \langle \sigma v \rangle_{\text{ion}} = \frac{J}{V N_{\text{test}}} S_{\text{ion}},$$

здесь  $N$  — концентрация нейтралов;  $J$  — число нейтралов в единицу времени (первичный источник);  $S_{\text{ion}}$  — число ионизаций;  $V$  — объем ячейки;  $N_{\text{test}}$  — число пробных частиц (нейтралов) или траекторий для заданного первичного источника. В новой версии DEGAS 2 [9] и в коде EIRENE [8, 23] по умолчанию используется оценка по длине пробега. Расчет концентрации проводится по формуле

$$N = \frac{J}{V N_{\text{test}}} \sum_{j,k} t_{jk},$$

где  $\sum_{j,k} t_{jk}$  — сумма времен пребывания пробных нейтралов в ячейке для всех расчетных траекторий в пределах заданного источника, определяется отношением длин пролета нейтралов в ячейке к скорости нейтралов; индекс  $j$  — номер траектории (пробного нейтрала); индекс  $k$  нумерует число пребываний пробного нейтрала в ячейке, в том числе и последующих поколений после процессов перезарядки. Для определения концентраций нейтралов лучше использовать оценку по длине пробега, поскольку при оценке по столкновениям теряется информация о присутствии пробного нейтрала в ячейке, если он в ней не сталкивался.

Значение проекции потоковой скорости нейтралов в ячейке дается формулой

$$u_\alpha = \frac{J}{N_{\text{test}} N V} \sum_{j,k} t_{jk} v_{jk\alpha},$$

в которой  $\nu_{jk\alpha}$  — значение мгновенной проекции скорости пробной частицы (нейтрала). Тогда для температуры нейтралов в ячейке имеем выражение

$$T_N = \frac{M}{3} \left( \frac{J}{N_{\text{test}}NV} \sum_{j,k} t_{jk} \nu_{jk}^2 - u^2 \right),$$

где  $\nu_{jk}$ ,  $M$  — мгновенная скорость и масса пробной частицы (нейтрала) соответственно;  $u$  — потоковая скорость нейтралов в ячейке. Стоит отметить, что в коде EIRINE при расчете температуры не вычитается энергия направленного движения, поскольку оценка для проекций скорости сходится медленнее, а энергией направленного движения можно пренебречь по сравнению с энергией теплового движения.

В коде EIRENE также реализована оценка условного ожидания (conditional expectation estimator) [23]:

$$N = \frac{J}{VN_{\text{test}}} \sum_{j=1}^{N_{\text{test}}} \left[ \sum_{l=0}^{n-1} \left\{ \int_{x_l}^{x_{\text{end}}} ds \frac{g(s)}{\nu_l} \exp \left( \int_0^s \frac{ds'}{\lambda(s')} \right) \right\} \prod_{l=1}^{l-1} c_{\text{cx}}(x_i) \right]_j.$$

Здесь функция  $g(s)$  равна 1 в пределах рассматриваемой ячейки и 0 вне ее, некоторые обозначения могут отличаться. Внутри квадратной скобки индекс  $j$  опущен, для разных значений  $j$  стартовые параметры и случайные величины на пути пробной частицы генерируются независимо. В пределах каждой ячейки величина  $\lambda(s)$  постоянна. Индекс  $l$  нумерует столкновения. Точка  $x_{\text{end}}$  может быть продлена за пределы точки столкновения для набора статистики, в этом преимущество оценки, но есть недостаток: в привычном физическом понимании траекторий пробных частиц уже не будет. Статистика будет набираться за пределами точки столкновения, а сама точка для отсчета нового поколения перезарядочных нейтралов по-прежнему определяется формулой (1). Более высокие моменты скорости в оценке условного ожидания записываются аналогично. В таком виде запись влияния перезарядок отвечает методу подавления поглощения [24], что означает не уничтожение частицы при ионизации, а введение веса и его умножение на долю выживших нейтралов (перезаряжающихся) при ответвлении траектории от точки столкновения.

В двумерном варианте метод Монте-Карло позволяет кроме задания величины первичного источника и его распределения по скоростям задавать распределение по углам, что особенно полезно для источников нейтралов в пристеночной области. Коды DEGAS 2 и EIRENE работают в трехмерной геометрии, при этом в DEGAS 2 и EIRENE версии SOLPS предполагается тороидальная симметрия.

В представленном виде в выражениях для оценки по длине пробега опущен статистический вес пробной частицы, который равен единице. Тем не менее для перераспределения вычислительных ресурсов на сетке статистические веса используют в методах не-аналогового розыгрыша [20, 22, 24]: рулетка, расщепление и подавление поглощения. Последнее обычно не используется из-за численной неэффективности. В кодах JOREK [25] и Double-MC [26] используются другие методы не-аналогового розыгрыша, основанные на разбиении траектории частицы в соответствии с заданной величиной шага по времени.

Для строгого математического обоснования изложенного метода Монте-Карло можно проинтегрировать кинетическое уравнение вдоль характеристик и получить интегральное уравнение Фредгольма второго рода [27, 28]. Перечисленные выше оцен-

ки по столкновениям и длинам пробега и процесс расчета траекторий по методу Монте-Карло сходятся к решению уравнения при увеличении числа пробных частиц.

В работе [27] выполнены расчеты распределения концентрации нейтралов кодом EIRENE с оценкой по длине пробега для токамака TEXTOR в пределах всей камеры с концентрацией дейтериевой плазмы  $n_{e,i} = 4 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}$  и температурой  $T_{e,i} = 1500 \text{ эВ}$  в центре с учетом источника нейтралов на границе и рекомбинацией. Также для моделирования H-моды [29] в токамаке JT-60U нейтралы считались кодом DEGAS версии 63 [30] с захватом центральной области камеры в полностью трехмерной постановке. Основная проблема метода — это реализация столкновения нейтрала с перезарядкой, летящего с периферийной области, в центре плазмы. Вероятность не испытать столкновений на всем пути очень мала.

В продолжение работы по развитию экономичного к вычислительным ресурсам кода [31] для программного комплекса SOL-DINA [32, 33] был численно реализован метод Монте-Карло для транспорта нейтралов в токамаке в двумерной геометрии: код Monte-Carlo Neutrals Two-Dimensional (MCN-2D) на Fortran. Предполагается его адаптация на стандартах распараллеливания OpenMP и CUDA. Был применен генератор равномерно распределенных случайных чисел на интервале  $(0, 1)$  из кода EIRENE [21] для одинаковой статистической сходимости [34], все остальные распределения (нормальное, экспоненциальное, косинусное) используют этот генератор и понятие функции распределения. Реализована и протестирована оценка по длине пробега. Не реализован метод выборки с исключением [23, 24] для расчета скорости нейтрала после резонансной перезарядки, что незначительно замедлило бы расчеты. Для разных двумерных задач переноса топливных нейтралов скорости расчетов MCN-2D на порядок выше, чем у EIRENE без распараллеливания, что частично может быть связано с набором статистики в большее число рассчитываемых параметров (например, стоки импульса за счет перезарядки).

**3. Моделирование переноса атомарных нейтралов основной компоненты в одномерной геометрии.** Для задачи расширения функционала кода ДИНА [4, 5] рассматриваются следующие транспортные модели переноса нейтралов в плазме токамака, указанные в п. 1. Будет оценена эффективность численных реализаций перечисленных моделей применительно к задачам подпитки плазмы частицами: оцениваются отклонения в интегральном балансе частиц и энергии. В качестве эталонных значений общего числа нейтралов и их суммарной энергии примем расчеты EIRENE. Малые величины отклонений в интегральном балансе не могут быть единственным критерием точности модели, тогда как большие показывают ее неточность. Считаем, что температура нейтралов определяет их среднюю энергию теплового движения с точностью до коэффициента, понимая, что на самом деле распределение нейтралов по скоростям не является максвелловским.

Некоторые перечисленные модели уже реализованы в плазмозфизическом коде ДИНА [4, 5]. В составе ДИНА также имеются модели инжекции высокоэнергетических нейтралов [35] и пеллет [36], в которых рассчитываются источники частиц для перезарядочных нейтралов.

В центральной области плазмы токамака пробеги нейтралов по отношению к нейтрал-ионным столкновениям, как правило, малы по сравнению с характерными масштабами неоднородностей параметров плазмы [37, 38]:

$$\frac{\lambda_{cx}}{A} \frac{dA}{dx} \ll 1, \quad (2)$$

где  $\lambda_{cx}$  — средняя длина свободного пробега нейтрала до столкновения с ионом;  $A$  —

кинетический параметр плазмы (поточная скорость, температура);  $x$  — пространственная переменная. При высокой плотности плазмы поточная скорость и температура нейтралов близки к плазменным за счет высокой интенсивности процессов перезарядки, поэтому возможно применение специальных гидродинамических моделей для нейтралов без диффузии потоков [39]. Плотности нейтралов могут сильно отличаться от плазменных, потому в случае с диффузионной моделью транспорта нейтралов ее нужно дополнить условием применимости

$$\frac{\lambda_{cx}}{N} \frac{dN}{dx} \ll 1,$$

в котором  $N$  — плотность нейтралов. Но, как следует из работы [18], оно выполняется, если верно выражение (2) для температуры ионов.

Константы скоростей процессов взаимодействия нейтралов с плазмой определяют ослабление потока нейтралов в плазме, интенсивность его превращений и соответственно длины свободного пробега; при этом будем учитывать следующие процессы: ионизация электронным ударом, перезарядка, излучательная рекомбинация. В качестве нейтралов мы рассматриваем атомарный дейтерий и не учитываем возбужденных состояний, тогда константы скоростей процессов не будут зависеть от плотностей. Также рассматриваем плазму с одним сортом ионов — дейтерия. Ионизация ионным ударом становится заметной при температурах  $T_i \geq 10$  кэВ [13] и в данной работе не учитывается. Рекомбинация в центральной области может играть решающую роль в качестве источника нейтралов [40, 41] из-за высокой плотности плазмы и сильного затухания потока первичных нейтралов, которые летят с границы. Сечение процесса зависит от относительной скорости сталкивающихся частиц. Для ионизации нейтрала электронным ударом (или рекомбинации) можно заменить скорость электрона относительно нейтрала (или иона) на скорость электрона из-за большой разницы масс, т. е. считать нейтралы (ионы) неподвижными в акте столкновения с электроном, а в случае перезарядки справедлива замена относительной скорости нейтрала и иона на скорость иона из-за слабой зависимости сечения от скорости в интересующем нас диапазоне. Тогда, проинтегрировав  $\sigma v$  по соответствующим максвелловским распределениям по скоростям, можно получить выраженные через температуры константы скоростей процессов. Воспользуемся следующими выражениями для констант скоростей ионизации электронным ударом, перезарядки и излучательной рекомбинации [42–44]:

$$\begin{aligned} \langle \sigma v \rangle_{\text{ion}} &= 2 \cdot 10^{-13} \sqrt{\frac{T_e}{Ry}} \frac{\exp\left(-\frac{Ry}{T_e}\right)}{\left(6 + \frac{T_e}{Ry}\right)}, \\ \langle \sigma v \rangle_{\text{cx}} &= 10^{-14} T_i^{0.327}, \\ \langle \sigma v \rangle_{\text{rec}} &= \frac{1.9 \left[ \ln\left(1 + \frac{Ry}{T_e}\right) + 3.5 \right] \cdot 10^{-20}}{\sqrt{\frac{T_e}{Ry}} + 0.65 \left(\frac{T_e}{Ry}\right) + 0.21 \left(\frac{T_e}{Ry}\right)^{1.5}}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $T_{e,i}$  измеряются в электронвольтах (эВ), а константы скоростей — в кубических метрах в секунду ( $\text{м}^3/\text{с}$ ).

Время пролета нейтралов поперек плазменного шнура много меньше характерного времени изменения макроскопических параметров плазмы [13], поэтому распределение нейтралов успевает установиться на плазменном фоне раньше, чем параметры

плазмы заметно изменятся, тогда в задачу переноса нейтралов время не входит явно. Будем рассматривать такие стационарные модели, не затрагивая ранние стадии разряда, в которых заметную роль в уравнениях для нейтралов может играть частная производная по времени.

Моделировать нейтралы в одномерной геометрии можно кодами с размерностью по координатам 1 и выше.

**3.1. Описание одномерных моделей переноса нейтралов.** В [13] приводится редуцированная к одномерному случаю модель на основе стационарного кинетического уравнения с источниками и стоками нейтралов. Интегрирование вдоль характеристик дает обыкновенное дифференциальное уравнение относительно времени  $t$ . Получившаяся задача с граничным условием аналитически решается, после чего выполняются интегрирование решения по скоростям и замена переменных. В результате в цилиндрическом случае, где  $\rho$  — радиус, имеем интегральное уравнение Фредгольма второго рода:

$$s_1 = n_i \langle \sigma v \rangle_{\text{cx}}, \quad s_2 = n_i \langle \sigma v \rangle_{\text{rec}}, \quad s_3 = n_e \langle \sigma v \rangle_{\text{ion}}, \quad s = s_1 + s_3, \quad (4)$$

$$N(\rho) = \int_0^a K(\rho, \xi) s_1(\xi) N(\xi) d\xi + N_0(\rho), \quad (5)$$

$$K(\rho, \xi) = \begin{cases} 2\xi \int_0^{\arcsin(\xi/\rho)} \frac{d\psi}{\sqrt{\xi^2 - \rho^2 \sin^2 \psi}} \int_0^\infty \left[ \exp\left(-\frac{I(\rho \sin \psi, \xi, \rho \sin \psi)}{w}\right) - \right. \\ \left. - \frac{I(\rho \sin \psi, \rho, \rho \sin \psi)}{w} \right] + \exp\left(-\frac{I(\xi, \rho, \rho \sin \psi)}{w}\right) \Big] f_1(\xi, w) \frac{dw}{w}, & \xi \leq \rho, \\ 2\xi \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{\xi^2 - \rho^2 \sin^2 \psi}} \int_0^\infty \left[ \exp\left(-\frac{I(\rho \sin \psi, \xi, \rho \sin \psi)}{w}\right) - \right. \\ \left. - \frac{I(\rho \sin \psi, \rho, \rho \sin \psi)}{w} \right] + \exp\left(-\frac{I(\rho, \xi, \rho \sin \psi)}{w}\right) \Big] f_1(\xi, w) \frac{dw}{w}, & \xi \geq \rho, \end{cases}$$

$$I(a, b, c) = \int_a^b \frac{s(\eta) \eta d\eta}{\sqrt{\eta^2 - c^2}},$$

$$N_0(\rho) = N_1(\rho) + N_{\text{rec}}(\rho),$$

$$N_1(\rho) = 2 \int_0^{\pi/2} d\psi \int_0^\infty \left[ \exp\left(-\frac{I(\rho \sin \psi, a, \rho \sin \psi)}{w}\right) - \right. \\ \left. - \frac{I(\rho \sin \psi, \rho, \rho \sin \psi)}{w} \right] + \exp\left(-\frac{I(\rho, a, \rho \sin \psi)}{w}\right) \Big] F(w) dw,$$

$$N_{\text{rec}}(\rho) = \int_0^a K(\rho, \xi) s_2(\xi) n_e(\xi) d\xi,$$

где (4) — частоты процессов перезарядки, излучательной рекомбинации и ионизации электронным ударом;  $N(\rho)$  — профиль концентрации нейтралов;  $f_1(\xi, w)$  — изотропная функция распределения ионов по скоростям (величине проекции скорости на полоидальную плоскость), нормированная на единицу;  $F(w)$  — распределение первичных нейтралов по скоростям (величине проекции скорости на полоидальную плоскость) на границе  $\rho = a$ , нормированное на концентрацию на внешней границе сетки,

распределение первичных нейтралов по углам, изотропное в полусфере; интегральный оператор в (5) отвечает учету вторичных нейтралов перезарядки;  $N_1(\rho)$  — первичные нейтралы со стенки;  $N_{\text{rec}}(\rho)$  — нейтралы рекомбинации.

При малых средних свободных пробегах нейтралов по сравнению с размерами плазмы экспоненты сильно затухают. Поэтому основной вклад дают нейтралы, летящие по кратчайшему пути вдоль радиуса, и можно применить одномерную модель с учетом симметрии относительно точки  $x = 0$  на отрезке  $-a \leq x \leq a$ . Более простая одномерная модель отличается от цилиндрической только ядром и уравнением для распределения первичных нейтралов.

Зная профиль плотности нейтралов в редуцированной кинетической модели, можно определить их температуру в каждой точке. Здесь воспользуемся тем, что функции распределения ионов и нейтралов по скоростям заданы дельта-функциями. Тогда интегрирование кинетического уравнения по скоростям с весом  $\frac{1}{3}Mu^2$  дает температуру нейтралов:

$$T_N(\rho) = \frac{1}{N(\rho)} \left[ T_0 N_1(\rho) + \int_0^a K(\rho, \xi) T_i(\xi) (s_1(\xi) N(\xi) + s_2(\xi) n_e(\xi)) d\xi \right].$$

Здесь  $K(\rho, \xi)$  — ядро интегрального оператора;  $T_0$  — температура первичных нейтралов.

Рассмотрим простейшую двухгрупповую диффузионную модель. Среднее значение проекции скорости первичного нейтрала на заданное направление равно  $u_1$ , скорость вторичного нейтрала  $u_2$  в точке определяется температурой ионов в ней. Данное приближение верно, если средняя длина свободного пробега нейтрала до перезарядки меньше, чем характерный масштаб неоднородности температуры ионов. Задача с уравнением непрерывности для первичных нейтралов ( $N_1$ ) и диффузии для вторичных нейтралов ( $N_2$ ) имеет следующий вид [18, 45]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\langle h_\theta h_r R \rangle} \frac{\partial}{\partial r} [\langle h_\theta R \rangle N_1 u_1] &= -n_e N_1 \langle \sigma v \rangle_{\text{ion}} - n_i N_1 \langle \sigma v \rangle_{\text{cx}}, \\ \frac{1}{\langle h_\theta h_r R \rangle} \frac{\partial}{\partial r} \left[ - \left\langle \frac{h_\theta R}{h_r} \right\rangle D \frac{\partial N_2}{\partial r} \right] &= -n_e N_2 \langle \sigma v \rangle_{\text{ion}} + n_i N_1 \langle \sigma v \rangle_{\text{cx}} + n_e n_i \langle \sigma v \rangle_{\text{rec}}, \\ u_1 &= \sqrt{\frac{2T_0}{\pi M}}, \quad u_2 = \sqrt{\frac{8T_i}{\pi M}}, \\ D &= \frac{1}{3} u_2 \lambda_2 = \frac{1}{3} \frac{u_2^2}{n_e \langle \sigma v \rangle_{\text{ion}} + n_i \langle \sigma v \rangle_{\text{cx}}}, \\ N_1|_{r \in S} &= N_{\text{ext}}, \quad \pm D \frac{\partial N_2}{\partial r} \Big|_{r \in S} = \frac{N_2 u_2}{2}, \end{aligned} \quad (6)$$

где по сравнению с [18] выполнено усреднение метрических коэффициентов по полоидальному обходу в тороидальной системе координат [46];  $N_{\text{ext}}$  — концентрация первичных нейтралов на внешней границе;  $M$  — масса нейтрала; граничное условие соответствует полному поглощению нейтралов на границе. Стоит отметить, что проекция скорости первичного нейтрала  $u_r$  на радиус меняется при движении нейтрала под углом к радиусу, поэтому точное решение уравнения непрерывности в цилиндре соответствует уравнению редуцированной кинетической модели для первичных

нейтралов в цилиндрической геометрии. Далее вместо первого уравнения будем использовать его плоскоодномерный аналог — экспоненту, что допустимо, если пробеги нейтралов достаточно малы по сравнению с размером плазмы. В граничном условии (6) для вторичных нейтралов [45] знак разный для внешней и внутренней границ, их источник на границе отсутствует, для них в граничном условии задано полное поглощение.

**3.2. Численная реализация одномерных моделей.** В коде ДИНА численно реализована редуцированная кинетическая модель Ю. Н. Днестровского для плоскоодномерной и цилиндрической геометрии (две версии) на основе уравнений из работы [13]. Разбиением интегрального оператора на сумму интегралов по отрезкам и выносом из-под интегрального оператора слабо меняющейся на отрезке между узлами сетки функции получена система линейных алгебраических уравнений относительно концентраций нейтралов в точках (число уравнений равно числу точек на радиальной сетке), которая решается методом Гаусса с выбором главного элемента [47]. В качестве функций распределения ионов по величине проекции скорости на пологоидальную плоскость в цилиндрической модели используются дельта-функции (с соответствующей нормировкой) при средних значениях этих проекций, которые неотрицательны. В случае с функцией распределения проекции скорости ионов на радиальное направление в плоскоодномерной модели будут две дельта-функции при значениях  $-u_2$  и  $u_2$ , где  $u_2$  — среднее значение модуля проекции. Для распределения первичных нейтралов по скоростям также применяются дельта-функции.

Двухгрупповая диффузионная модель для транспорта нейтралов реализована в базовой версии кода ДИНА [5]. Вместо уравнения непрерывности для концентраций первичных нейтралов применяется экспонента. Граничная стационарная задача для уравнения диффузии решается методом потоковой прогонки [48].

**3.3. Тестирование моделей.** Выполним расчеты транспорта нейтралов, отвечающие геометрии ИТЭР: большой радиус  $R_0 = 6.2$  м, малый радиус  $r_0 = 2$  м. В качестве эталонных профилей концентрации и температуры нейтралов будем использовать результаты расчета по коду EIRENE [8] с оценкой условного ожидания и учетом тороидальности, все отклонения вычисляются относительно этих расчетов. Источники нейтралов за счет инжекции высокоэнергетических нейтралов [36] и пеллет [37], численно реализованные в коде ДИНА, в данной работе не рассматриваются. Примем следующие сокращения: EIRENE с оценкой условного ожидания — EIR-CE; EIRENE с оценкой по длине пробега — EIR-TL; редуцированная кинетическая модель в плоскоодномерной геометрии — Dn-Kin-1D; редуцированная кинетическая модель в цилиндрической геометрии — Dn-Kin-CYL; диффузионная модель — Diffus. В MCN-2D использована оценка по длине пробега (TL). Для задания профилей параметров плазмы (температура, плотность) используется следующий полином:

$$A(a) = A_{\text{bnd}} + (1 - a^2)(A_{\text{cen}} - A_{\text{bnd}}),$$

здесь  $a$  — метка магнитной поверхности [49] (аналог малого радиуса, определяющий магнитную поверхность, изменяется в пределах  $0 \leq a \leq 1$ );  $A_{\text{cen}}$  — значение параметра в центре сетки;  $A_{\text{bnd}}$  — значение параметра на внешней границе сетки. Для соответствия результатов все профили (на входе и выходе в моделях нейтралов) будем строить по малому радиусу  $r$ .

Далее рассмотрим два случая длин свободного пробега нейтралов, соответствующие выполнению и слабому нарушению условия применимости диффузионного приближения (2). Условие применимости для Dn-Kin-1D формулируется как отношение

средней длины свободного пробега до столкновения с ионом или электроном к размеру плазмы; оно должно быть много меньше единицы. Оценим характерный масштаб неоднородности температуры ионов в случае  $T_{\text{ceni}} = 500$  эВ,  $T_{\text{bndi}} = 1$  эВ и  $r_0$  (равен размеру плазмы):  $r_0 T_{\text{ceni}} / (T_{\text{ceni}} - T_{\text{bndi}}) \sim r_0$ ; если же значения температур близки, масштаб неоднородности стремится к бесконечности, т. е. в случае плавных зависимостей параметров плазмы (монотонных, без скачков) характерный масштаб неоднородности равен либо больше размера плазмы. Характерный масштаб неоднородности температуры можно приближенно положить равным размеру плазмы и тогда задавать соответствующий разброс температуры ионов, в случае с концентрацией плазмы градиент может быть слабее, т. е. масштаб неоднородности будет большой, но нам важно выделить самый малый по величине характерный масштаб неоднородности. Средняя длина свободного пробега до столкновения с любой фоновой частицей плазмы ( $\lambda_{\text{sum}}$ ) меньше, чем в случае столкновения только с ионами ( $\lambda_{\text{cx}}$ ), поэтому можно считать выполненным неравенство  $\lambda_{\text{cx}}/r_0 > \lambda_{\text{sum}}/r_0$ . Тогда если выполнено условие (2), т. е. если  $\lambda_{\text{cx}}/r_0 \ll 1$ , то  $\lambda_{\text{sum}}/r_0 \ll 1$ . То есть если применимо диффузионное приближение, то плоскоодномерные кинетические модели работают хорошо. Следовательно, достаточно рассмотреть два случая:  $\lambda_{\text{cx}}/r_0 \ll 1$  и  $\lambda_{\text{sum}}/r_0 \sim 1$ , модели при нарушении условий применимости не представлены на графиках и в таблицах. Нужное значение средней длины свободного пробега выбирается масштабированием плотности фоновой плазмы, распределение по температурам плазмы при этом покрывает достаточно большой диапазон. Средние длины свободного пробега для условий применимости рассчитываются для первичных нейтралов, движущихся со скоростью  $\sqrt{8T_0/\pi M}$ , и для вторичных нейтралов, движущихся с тепловой скоростью  $\sqrt{8T_i/\pi M}$ , определяемой локальной температурой ионов в точке. Мы рассматриваем дейтериевую плазму. На внешней границе установлено полное поглощение нейтралов. Для реализации вывода величин первичных и вторичных нейтралов по отдельности в EIRENE был создан отдельный сорт частиц, участвующих в тех же реакциях, что и дейтерий, но трекинг пробной частицы после столкновения прекращается. Все константы атомных процессов в разных моделях приведены в соответствие и рассчитываются по формулам (3). Постановка задачи для методов Монте-Карло отличается от диффузионной и редуцированных кинетических моделей, в методах Монте-Карло задается поток первичных частиц, а в других моделях — концентрация первичных нейтралов на внешней границе. Поэтому подбором величины напуска газа мы добились равенства расчетных величин концентраций первичных нейтралов на границе для всех методов, поскольку задача линейна относительно граничной концентрации и потока первичных нейтралов.

Распределение направлений скорости по полярному углу, отсчитываемому от нормали к поверхности, в методах Монте-Карло будет равно  $f(\theta) = 2 \cos \theta \sin \theta$ , поскольку распределение задается с поверхности в потоке, в отличие от функции распределения в редуцированных кинетических моделях, которые задаются в малом объеме вокруг граничной точки. Можно ввести виртуальную ячейку с изотропным распределением скорости, при этом поток через границу в телесный угол внутрь первой ячейки у границы будет распределен по косинусу [50]. Синус входит в распределение через телесный угол. Распределение модуля скорости в потоке также будет отличаться [51] от распределения в объеме, эта скорость в среднем будет больше.

Числа пробных частиц для расчетов MCN-2D и EIR-TL одинаковы и выбираются так, чтобы время вычислений не менялось от задачи к задаче. Для MCN-2D время вычислений по итогу было порядка Dn-Kin-CYL. Представим средние по всем сериям

расчетов времени расчетов  $t_{\text{calc}}$  для разных моделей:

Модель .....	Diffus	Dn-Kin-1D	Dn-Kin-CYL	MCN-2D (TL)	EIR-TL
$\langle t_{\text{calc}} \rangle, \text{с} \dots$	0.002	0.001	0.12	0.1	8

Время расчета для MCN-2D и Dn-Kin-CYL почти на два порядка меньше, чем для EIR-TL, при условии, что в MCN-2D не учитывается тороидальность и не реализован метод выборки с исключением [23, 24], что по оценкам не дает заметного увеличения времени расчетов.

Задачи с рекомбинационным источником рассмотрены не будут, так как источник распределен по всей сетке, в отличие от постановки с источником на границе, которая является более важной, поскольку отклонения в точках, удаленных от источника, могут быть высокими из-за различий в моделях переноса.

Для первой серии расчетов при  $\lambda_{\text{cx}}/r_0 \ll 1$  используются следующие параметры на концах расчетной сетки: для электронов  $T_{\text{cene}} = 1000$  эВ,  $T_{\text{bnde}} = 4$  эВ,  $n_{\text{cene}} = 7 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}$ ,  $n_{\text{bnde}} = 2 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}$ , для ионов  $T_{\text{ceni}} = 500$  эВ,  $T_{\text{bndi}} = 4$  эВ,  $n_{\text{ceni}} = 7 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}$ ,  $n_{\text{bndi}} = 2 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}$ . Соответствующие профили с вероятностью перезарядки  $c_{\text{cx}}$  и оценками длин свободного пробега приведены на рис. 1, а и б. Источник нейтралов задан на внешней границе, при этом концентрация нейтралов на границе равна  $N_{\text{ext}} = 6 \cdot 10^{14} \text{ м}^{-3}$ . Температура первичных нейтралов в методах Монте-Карло  $T_0 = 4$  эВ, для других моделей первичные нейтралы моноэнергетические.

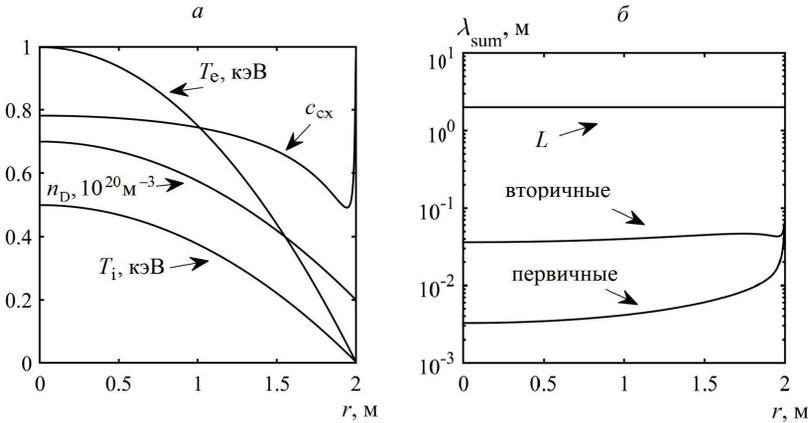


Рис. 1. Профили параметров фоновой плазмы (а) и профили длин свободного пробега (б) для первичных и вторичных нейтралов и размер плазмы  $L$

Профили концентрации первичных нейтралов, рассчитанные по разным моделям, представлены на рис. 2, I, а: результаты расчета по диффузионной (экспонента) и численно реализованным редуцированным кинетическим моделям Dn-Kin существенно отклоняются от расчетов по методам Монте-Карло. Это связано с тем, что эти реализации моделей не описывают хвосты распределений первичных нейтралов по скоростям, поэтому нейтралы проникают вглубь меньше.

Профили концентраций вторичных нейтралов представлены на рис. 2, I, б: видно существенное отклонение диффузионной модели от расчетов EIR-CE во всем рассматриваемом диапазоне, как и Dn-Kin-1D.

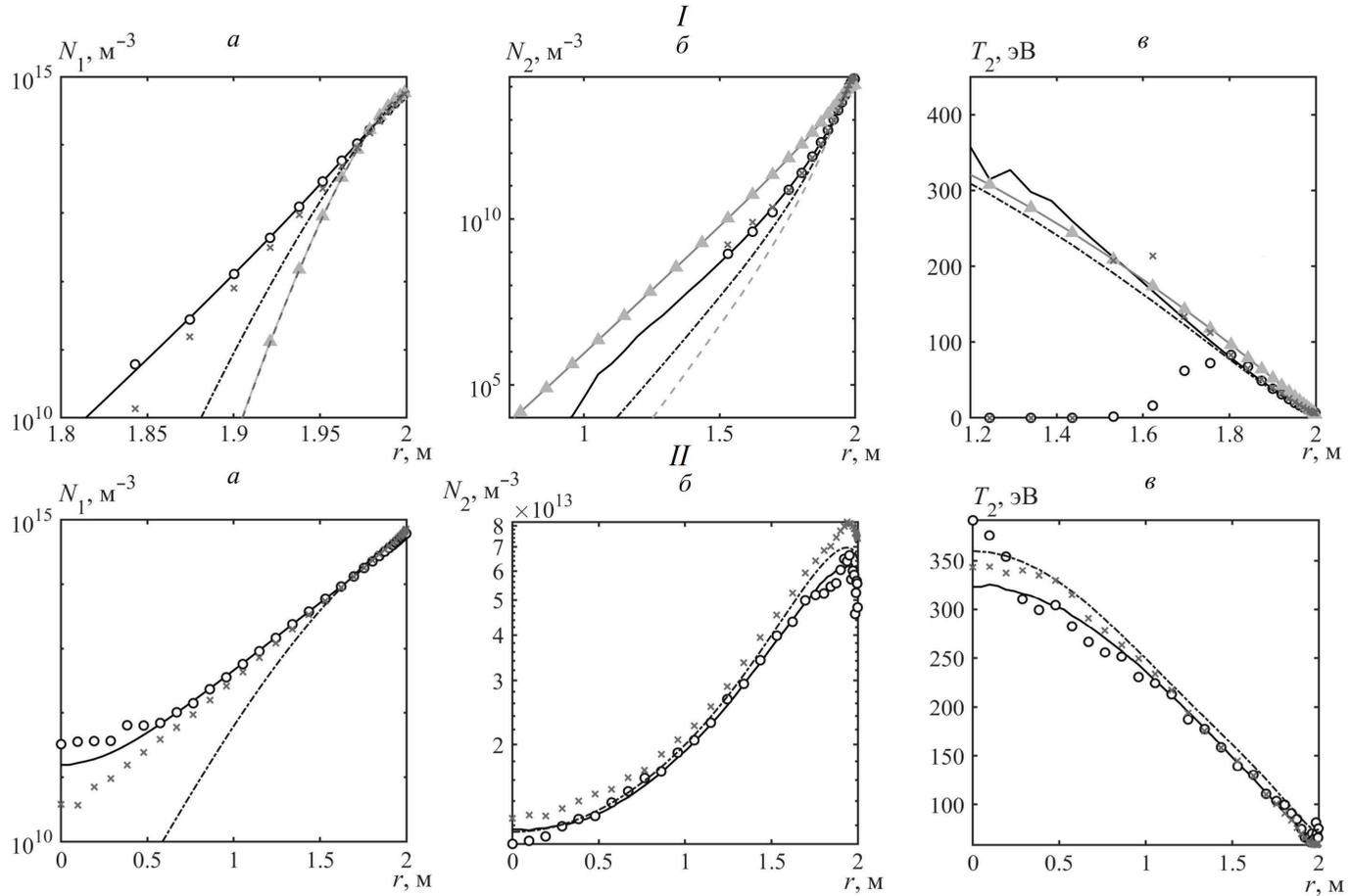


Рис. 2. Профили концентрации первичных нейтралов (а), профили концентрации (б) и температуры (в) вторичных нейтралов. Рассчитаны по EIR-CE (сплошная кривая), EIR-TL (маркеры-кружки), Dn-Kin-CYL (штрихпунктирная кривая), Dn-Kin-1D (штриховая кривая), Diffus (кривая с маркерами-треугольниками), MCN-2D (маркеры-кресты). Источник нейтралов на внешней границе. I — первая серия расчетов; II — вторая серия расчетов.

Температура вторичных диффузионных нейтралов равна температуре ионов. Можно видеть (рис. 2, I,  $\epsilon$ ), что наибольшее отклонение температур для разных моделей от расчетов по EIR-CE наблюдается во всех областях (области с меньшим радиусом не показаны ввиду снижения точности расчетов Монте-Карло). Относительное отклонение в интегральный баланс редуцированных кинетических моделей и MCN-2D незначительно.

Представим относительные отклонения суммарного числа нейтралов  $S_N$  и энергии  $S_E$  для разных моделей:

Модель ....	Diffus	Dn-Kin-1D	Dn-Kin-CYL	MCN-2D (TL)	EIR-TL
$S_N$ , % .....	3	-5	-4	-3	0.2
$S_E$ , % .....	58	-13	-7	0.3	-0.4

Суммарные числа нейтралов и энергии для разных моделей вычислялись с одинаковыми объемами ячеек, поскольку при равных концентрациях увеличение тороидальной длины приведет к большему числу частиц.

Для второй серии расчетов при  $\lambda_{\text{sum}}/r_0 \sim 1$  концентрации плазмы уменьшены в 35 раз. Источник нейтралов задан на границе с температурой  $T_0 = 4$  эВ, концентрация на границе — как в первой серии расчетов. Отклонения от расчетов EIR-CE для концентраций первичных нейтралов (рис. 2, II,  $a$ ) наблюдаются в основном для Dn-Kin-CYL из-за отсутствия в модели учета максвелловских хвостов распределений по скоростям.

Во вторичных нейтралах (рис. 2, II,  $b, \epsilon$ ) расчеты по представленным моделям хорошо совпадают. Кривая температур вторичных нейтралов должна быть более гладкая, чем кривая температуры ионов, из-за относительно больших пробегов.

Из анализа интегральных отклонений:

Модель ....	Dn-Kin-CYL	MCN-2D (TL)	EIR-TL
$S_N$ , % .....	6	3	0.06
$S_E$ , % .....	13	3	0.2

следует, что MCN-2D несколько точнее считает баланс энергии (особенно в области низких температур нейтралов), чем Dn-Kin-CYL, при этом обе модели не дают существенных отклонений в балансе частиц.

**4. Заключение.** Время вычислений для всех сравниваемых моделей практически не менялось: для диффузионной модели и плоскоодномерного варианта редуцированной кинетической модели Ю. Н. Днестровского  $t_{\text{calc}} \sim 0.002$  с, для многогрупповой по энергиям модели с уравнениями диффузионного типа  $t_{\text{calc}} \sim 0.02$  с, для MCN-2D и цилиндрического варианта редуцированной кинетической модели Ю. Н. Днестровского  $t_{\text{calc}} \sim 0.1$  с, для EIRENE с теми же числами пробных частиц, как в MCN-2D,  $t_{\text{calc}} \sim 8$  с. В результате тестирования можно сделать следующие выводы:

- 1) интегральные отклонения результатов расчетов кодов MCN-2D, Dn-Kin-CYL, Dn-Kin-1D (при выполнении условий применимости) от EIRENE малы;
- 2) допустимая точность результатов расчетов по коду MCN-2D и на порядок меньше время вычислений по сравнению с EIRENE.

Работа была выполнена с использованием оборудования центра коллективного пользования «Комплекс моделирования и обработки данных исследовательских установок мега-класса» НИЦ «Курчатовский институт», <http://ckp.nrcki.ru/>.

## Литература

1. Lehnen M., Alonso A., Arnoux G., Baumgarten N., Bozhenkov S. A., Brezinsek S., Brix M., Eich T., Gerasimov S. N., Huber A., Jachmich S., Kruezi U., Morgan P. D., Plyusnin V. V., Reux C.,

- Riccardo V., Sergienko G., Stamp M. F. Disruption mitigation by massive gas injection in JET // Nuclear Fusion. 2011. Vol. 51. N 12. Art. N 123010.
2. Chapman S., Cowling T. G. The mathematical theory of non-uniform gases: An account of the kinetic theory of viscosity, thermal conduction and diffusion in gases. Cambridge: Cambridge University Press, 1990. 423 p.
  3. Коган М. Н. Динамика разреженного газа: кинетическая теория. М.: Наука, 1967. 440 с.
  4. Азизов Э. А., Буржинский О. И., Васильев Н. Н., Лукаш В. Э., Недоспасов А. В., Хайрутдинов Р. Р. Полутораметрическая модель эволюции плазмы токамака. Препринт. М.: Институт высоких температур Академии наук, 1988, № 3–251. 28 с.
  5. Khayrutdinov R. R., Lukash V. E. Studies of plasma equilibrium and transport in a tokamak fusion device with the inverse-variable technique // Journal of Computational Physics. 1993. Vol. 109. Iss. 2. P. 193–201.
  6. Sugihara M., Shimada M., Fujieda H., Gribov Yu., Ioki K., Kawano Y., Khayrutdinov R., Lukash V., Ohmori J. Disruption scenarios, their mitigation and operation window in ITER // Nuclear Fusion. 2007. Vol. 47. N 4. P. 337–347.
  7. Lukash V., Gribov Yu., Kavin A., Khayrutdinov R., Cavinato M. Simulations of ITER scenarios // Plasma Devices and Operations. 2005. Vol. 13. N 2. P. 143–156.
  8. Reiter D., Baelmans M., Boerner P. The EIRENE and B2-EIRENE codes // Fusion Science and Technology. 2005. Vol. 47. N 2. P. 172–186.
  9. Stotler D., Karney C. Neutral gas transport modeling with DEGAS 2 // Contributions to Plasma Physics. 1994. Vol. 34. P. 392–397.
  10. Valanju P. M. NUT: A fast 3-dimensional neutral transport code // Journal of Computational Physics. 1990. Vol. 88. N 1. P. 114–130.
  11. Stacey W. M., Mandrekas J. A transmission/escape probabilities model for neutral particle transport in the outer regions of a diverted tokamak // Nuclear Fusion. 1994. Vol. 34. N 10. P. 1385–1399.
  12. Жоголев В. Е. Редуцированные кинетические модели переноса нейтралов в плазме токамаков // Физика плазмы. 2012. Т. 38. № 10. С. 855–865.
  13. Днестровский Ю. Н., Костомаров Д. П. Математическое моделирование плазмы. М.: Физико-математическая литература, 1993. 336 с.
  14. Duchs D. F., Post D. E., Rutherford P. H. A computer model of radial transport in tokamaks // Nuclear Fusion. 1977. Vol. 17. N 3. P. 565–609.
  15. Kukushkin A. B., Kukushkin A. S., Lisitsa V. S., Neverov V. S., Pshenov A. A., Shurygin V. A. Ballistic model of recycling of atomic and molecular hydrogen and its application to the ITER main chamber // Plasma Physics and Controlled Fusion. 2021. Vol. 63. N 3. Art. N 035025.
  16. Tendler M., Heifetz D. Neutral particle kinetics in fusion devices // Fusion Technology. 1987. Vol. 11. N 2. P. 289–310.
  17. Кожурин А. А., Дубров М. Л., Хайрутдинов Р. Р., Лукаш В. Э. Одномерное моделирование переноса нейтралов в плазме токамака // Лазерные, плазменные исследования и технологии. ЛаПлаз-2023: Сборник научных трудов IX Международной конференции. Москва, 28–31 марта 2023 г. М.: Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», 2023. С. 183.
  18. Vold E. L., Prinja A. K., Najmabadi F., Conn R. W. The neutral diffusion approximation in a consistent tokamak edge plasma-neutral computation // Journal of Nuclear Materials. 1990. Vol. 176. P. 570–577.
  19. Heifetz D., Post D., Petravic M., Weisheit J., Bateman G. A Monte-Carlo model of neutral-particle transport in diverted plasmas // Journal of Computational Physics. 1982. Vol. 46. N 2. P. 309–327.
  20. Hughes M. H., Post D. E. A Monte Carlo algorithm for calculating neutral gas transport in cylindrical plasmas // Journal of Computational Physics. 1978. Vol. 28. N 1. P. 43–55.
  21. Reiter D., Nicolai A. Monte Carlo simulation of the neutral gas density and temperature distribution due to the recycling processes at a poloidal, toroidal or mushroom limiter and at the divertor plate of a poloidal divertor // Journal of Nuclear Materials. 1982. Vol. 111. P. 434–439.
  22. Spanier J., Gelbard E. M. Monte Carlo principles and neutron transport problems. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1969. 421 p.
  23. Reiter D. “The EIRENE Code User Manual. Version: 11/2005”.  
URL: <https://eirene.de/manuals/eirene/eirene.pdf> (дата обращения: 1 июля 2019 г.).
  24. Kotov V., Reiter D., Kukushkin A. S. Numerical study of the ITER divertor plasma with the B2-EIRENE code package. Forschungszentrum Juelich (Germany). Institut fuer Energieforschung (IEF), 2007. N JUEL-4257. URL: [https://juser.fz-juelich.de/record/828181/files/J%C3%BCI\\_4257\\_Kotov.pdf](https://juser.fz-juelich.de/record/828181/files/J%C3%BCI_4257_Kotov.pdf) (дата обращения: 1 декабря 2023 г.).
  25. Korving S. Q., Huijsmans G. T. A., Park J. S., Loarte A. Development of the neutral model in the nonlinear MHD code JOREK: Application to E×B drifts in ITER PFPO-1 plasmas // Physics of Plasmas. 2023. Vol. 30. Iss. 4. Art. N 042509.

26. Mironov M. I., Chernyshev F. V., Afanasyev V. I., Melnik A. D., Navolotsky A. S., Nesenevich V. G., Petrov M. P., Petrov S. Ya. DOUBLE-MC code: Modeling of neutral fluxes from plasma // Plasma Physics Reports. 2021. Vol. 47. P. 18–27.
27. Reiter D. Computational many-particle physics. Berlin; Heidelberg: Springer, 2008. 141 p.
28. Ермаков С. М., Михайлов Г. А. Курс статистического моделирования. М.: Наука, 1982. 296 с.
29. Taylor R. J., Brown M. L., Fried B. D., Grote H., Liberati J. R., Morales G. J., Pribyl P., Darrow D., Ono M. H-mode behavior induced by cross-field currents in a tokamak // Physical Review Letters. 1989. Vol. 63. N 21. P. 2365–2368.
30. Nakashima Y., Higashizono Y., Kawano H., Takenaga H., Asakura N., Oyama N., Kamada Y., Yatsu K. Three-dimensional neutral transport simulation in the JT-60U H-mode plasmas // Journal of Physics: Conference Series. 2008. Vol. 123. Iss. 1. Art. N 012029.
31. Коожурин А. А., Семенов Ю. М., Хайрутдинов Р. Р., Лукаш В. Э. Двумерная транспортная модель нейтралов на основе вероятностей прохода и ухода потоков с группами по энергиям // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Термоядерный синтез. 2021. Т. 44. № 1. С. 80–90.
32. Lukash V. E., Khayrutdinov R. R., Mirnov S. V., Lazarev V. B., Ivanov A. A., Zogolev V. E. Numerical modeling of Li limiter experiments in T-11M tokamak // Proceedings 22<sup>nd</sup> IAEA Fusion Energy Conference. 2008. P. 13–18.
33. Semenets Yu. M., Khayrutdinov R. R. A 2D tokamak edge and divertor model (SOL-DINA code) and its comparison with the UEDGE code. Preprint TRINITI N 0087-A. Troitsk, 2002. 36 p.
34. Соболев И. М. Численные методы Монте-Карло. М.: Наука, 1973. 311 с.
35. Polevoi A., Shirai H., Takizuka T. Report of scientific group // Japan Atomic Energy Research Institute. 1997. N JAERI-DATA/CODE-97-014. URL: <https://jopss.jaea.go.jp/pdfdata/JAERI-Data-Code-97-014.pdf> (дата обращения: 1 октября 2023 г.).
36. Parks P. B., Turnbull R. J. Effect of transonic flow in the ablation cloud on the lifetime of a solid hydrogen pellet in a plasma // The Physics of Fluids. 1978. Vol. 21. N 10. P. 1735–1741.
37. Matthews G. F. Plasma detachment from divertor targets and limiters // Journal of Nuclear Materials. 1995. Vol. 220. P. 104–116.
38. Loarte A., Monk R. D., Martin-Solis J. R., Campbell D. J., Chan Kin A. V., Clement S., Davies S. J., Ehrenberg J., Erents S. K., Guo H. Y., Harbour P. J., Horton L. D., Ingesson L. C., Jackel H., Lingertat J., Lowry C. G., Maggi C. F., Matthews G. F., McCormick K., O'Brien D. P., Reichle R., Saibene G., Smith R. J., Stamp M. F., Stork D., Vlases G. C. Plasma detachment in JET Mark I divertor experiments // Nuclear Fusion. 1998. Vol. 38. N 3. P. 331–371.
39. Knoll D. A., McHugh P. R., Krasheninnikov S. I., Sigmar D. J. Simulation of dense recombining divertor plasmas with a Navier–Stokes neutral transport model // Physics of Plasmas. 1996. Vol. 3. N 1. P. 293–303.
40. Гордеев Ю. С., Зиновьев А. П., Петров М. П. Рекомбинация водорода в квазистационарной термоядерной плазме // Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1977. Т. 25. С. 223–227.
41. Заверьяев В. С., Извозчиков А. Б., Лысенко С. Е., Петров М. П. Нагрев ионов в установке Токамак-10 // Физика плазмы. 1978. Т. 4. № 6. С. 1205–1210.
42. Елецкий А. В., Смирнов Б. М. Элементарные процессы в плазме // Основы физики плазмы. М.: Энергоиздат, 1983. Т. 1. С. 58–81.
43. Недоспасов А. В., Токарь М. З. Пристеночная плазма в токамаках // Вопросы теории плазмы / под ред. Б. Б. Кадомцева. М.: Энергоатомиздат, 1990. № 18. С. 68–203.
44. Kotelnikov I. A., Milstein A. I. Electron radiative recombination with a hydrogen-like ion // Physica Scripta. 2019. Vol. 94. Art. N 055403.
45. Hasan M. Z., Conn R. W. A two-dimensional finite element multigroup diffusion theory for neutral atom transport in plasmas // Journal of Computational Physics. 1987. Vol. 71. N 2. P. 371–390.
46. Vold E. L., Najmabadi F., Conn R. W. Fluid model equations for the tokamak plasma edge // Physics of Fluids B: Plasma Physics. 1991. Vol. 3. N 11. P. 3132–3152.
47. Калиткин Н. Н. Численные методы. 2-е изд. СПб.: БХВ-Петербург, 2011. 592 с.
48. Дегтярев Л. М., Фаворский А. П. Поточковый вариант метода прогонки // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1968. Т. 8. № 3. С. 679–687.
49. Захаров Л. Е., Шафранов В. Д. Равновесие плазмы с током в тороидальных системах // Вопросы теории плазмы. М.: Энергоиздат, 1982. № 11. С. 118–233.
50. Greenwood J. The correct and incorrect generation of a cosine distribution of scattered particles for Monte-Carlo modelling of vacuum systems // Vacuum. 2002. Vol. 67. N 2. P. 217–222.
51. Stangeby P. C. The plasma boundary of magnetic fusion devices. Philadelphia: Institute of Physics Publishing, 2000. 717 p.

Статья поступила в редакцию 21 октября 2024 г.  
Статья принята к печати 12 декабря 2024 г.

Контактная информация:

Кожурин Александр Андреевич — kozhurin.aa14@physics.msu.ru

Дубров Максим Леонидович — канд. физ.-мат. наук; maksim.dubrov@iter.org

Жоголев Виктор Евгеньевич — канд. физ.-мат. наук; v.zhogolev@mail.ru

Хайрутдинов Рустам Рашитович — д-р физ.-мат. наук; khayrutd@mail.ru

Лукаш Виктор Эммануилович — д-р физ.-мат. наук; lukash08@yandex.ru

Кавин Андрей Александрович — канд. физ.-мат. наук; kavina57@mail.ru

Андрианова Раиса Рустамовна — raisa\_khayr@mail.ru

## One-dimensional neutral transport modelling in a tokamak

A. A. Kozhurin<sup>1</sup>, M. L. Dubrov<sup>2</sup>, V. E. Zhogolev<sup>1</sup>, R. R. Khayrutdinov<sup>1</sup>, V. E. Lukash<sup>1</sup>,  
A. A. Kavin<sup>3</sup>, R. R. Andrianova<sup>1</sup>

<sup>1</sup> National Research Centre “Kurchatov Institute”, 1, Akademika Kurchatova pl., Moscow, 123182, Russian Federation

<sup>2</sup> ITER Organization, CS 90 046, Route de Vinon-sur-Verdon, St. Paul Lez Durance Cedex, 13067, France

<sup>3</sup> D. V. Efremov Institute of Electrophysical Apparatus, 3, Doroga na Metallostroy, St. Petersburg, 196641, Russian Federation

**For citation:** Kozhurin A. A., Dubrov M. L., Zhogolev V. E., Khayrutdinov R. R., Lukash V. E., Kavin A. A., Andrianova R. R. One-dimensional neutral transport modelling in a tokamak. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2025, vol. 21, iss. 1, pp. 28–46. <https://doi.org/10.21638/spbu10.2025.103> (In Russian)

Neutral transport models in tokamak plasmas for expanding functionality of the DINA code have been numerically implemented and their efficiencies have been estimated: a new two-dimensional Monte Carlo code MCN-2D, the reduced kinetic models of Yu. N. Dnestrovskii with monoenergetic distributions of primary neutrals and ions and the diffusion model. Monte Carlo models have been reviewed. Monte Carlo code EIRENE calculation results are selected as referenced neutral parameters profiles. It is shown that the reduced kinetic model in the flat geometry can be used in fast calculations with applicability conditions are satisfied. The presented diffusion model yields significant deviations in the energy balance. For more accurate calculations it is proposed to use MCN-2D code, which will be able to self-consistently calculate neutral transport over core and edge plasmas taking into account a plasma column shape or the cylindrical version of the reduced kinetic model.

*Keywords:* transport processes, neutrals, tokamak, DINA code, Monte Carlo method.

## References

1. Lehnen M., Alonso A., Arnoux G., Baumgarten N., Bozhnikov S. A., Brezinsek S., Brix M., Eich T., Gerasimov S. N., Huber A., Jachmich S., Kruezi U., Morgan P. D., Plyusnin V. V., Reux C., Riccardo V., Sergienko G., Stamp M. F. Disruption mitigation by massive gas injection in JET. *Nuclear Fusion*, 2011, vol. 51, no. 12, art. no. 123010.

2. Chapman S., Cowling T. G. *The mathematical theory of non-uniform gases: An account of the kinetic theory of viscosity, thermal conduction and diffusion in gases*. Cambridge, Cambridge University Press, 1990, 423 p.

3. Kogan M. N. *Dinamika razrezhennogo gaza: kineticheskaia teoriia* [Rarefied gas dynamics: kinetic theory]. Moscow, Nauka Publ., 1967, 423 p. (In Russian)
4. Azizov E. A., Buzhinskii O. I., Vasil'ev N. N., Lukash V. E., Nedospasov A. V., Khayrutdinov R. R. *Polutoramernaia model' evoliutsii plazmy tokamaka* [One and a half dimensional model of plasma evolution in a tokamak]. Preprint. Moscow, Institute of High Temperatures of Academy of Sciences Publ., 1988, no. 3–251, 28 p. (In Russian)
5. Khayrutdinov R. R., Lukash V. E. Studies of plasma equilibrium and transport in a tokamak fusion device with the inverse-variable technique. *Journal of Computational Physics*, 1993, vol. 109, iss. 2, pp. 193–201.
6. Sugihara M., Shimada M., Fujieda H., Gribov Yu., Ioki K., Kawano Y., Khayrutdinov R., Lukash V., Ohmori J. Disruption scenarios, their mitigation and operation window in ITER. *Nuclear Fusion*, 2007, vol. 47, no. 4, pp. 337–347.
7. Lukash V., Gribov Yu., Kavin A., Khayrutdinov R., Cavinato M. Simulations of ITER scenarios. *Plasma Devices and Operations*, 2005, vol. 13, no. 2, pp. 143–156.
8. Reiter D., Baelmans M., Boerner P. The EIRENE and B2-EIRENE codes. *Fusion Science and Technology*, 2005, vol. 47, no. 2, pp. 172–186.
9. Stotler D., Karney C. Neutral gas transport modeling with DEGAS 2. *Contributions to Plasma Physics*, 1994, vol. 34, pp. 392–397.
10. Valanju P. M. NUT: A fast 3-dimensional neutral transport code. *Journal of Computational Physics*, 1990, vol. 88, no. 1, pp. 114–130.
11. Stacey W. M., Mandrekas J. A transmission/escape probabilities model for neutral particle transport in the outer regions of a diverted tokamak. *Nuclear Fusion*, 1994, vol. 34, no. 10, pp. 1385–1399.
12. Zhogolev V. E. Redutsirovannnye kineticheskie modeli perenosa neutralov v plazme tokamakov [Reduced kinetic models of neutral transport in tokamak plasmas]. *Plasma Physics*, 2012, vol. 38, no. 10, pp. 855–865. (In Russian)
13. Dnestrovskii Yu. N., Kostomarov D. P. *Matematicheskoe modelirovanie plazmy* [Mathematical modelling of plasmas]. Moscow, Fiziko-matematicheskaiia literature Publ., 1993, 336 p. (In Russian)
14. Duchs D. F., Post D. E., Rutherford P. H. A computer model of radial transport in tokamaks. *Nuclear Fusion*, 1977, vol. 17, no. 3, pp. 565–609.
15. Kukushkin A. B., Kukushkin A. S., Lisitsa V. S., Neverov V. S., Pshenov A. A., Shurygin V. A. Ballistic model of recycling of atomic and molecular hydrogen and its application to the ITER main chamber. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 2021, vol. 63, no. 3, art. no. 035025.
16. Tendler M., Heifetz D. Neutral particle kinetics in fusion devices. *Fusion Technology*, 1987, vol. 11, no. 2, pp. 289–310.
17. Kozhurin A. A., Dubrov M. L., Khayrutdinov R. R., Lukash V. E. Odnomernoe modelirovanie perenosa neutralov v plazme tokamaka [One-dimensional modelling of neutral transport in tokamak plasmas]. *Lazernye, plazmennye issledovaniia i tekhnologii. Sbornik nauchnykh trudov IX Mezhdunarodnoi konferentsii "LaPlaz-2023"*. [Laser, Plasma Research and Technologies. Proceedings of IX International Conference "LaPlaz-2023"]. Moscow, March 28–31, 2023. Moscow, Natsional'nyi issledovatel'skii iadernyi universitet "MIFI" Publ., 2023, p. 183. (In Russian)
18. Vold E. L., Prinja A. K., Najmabadi F., Conn R. W. The neutral diffusion approximation in a consistent tokamak edge plasma-neutral computation. *Journal of Nuclear Materials*, 1990, vol. 176, pp. 570–577.
19. Heifetz D., Post D., Petravic M., Weisheit J., Bateman G. A Monte-Carlo model of neutral-particle transport in diverted plasmas. *Journal of Computational Physics*, 1982, vol. 46, no. 2, pp. 309–327.
20. Hughes M. H., Post D. E. A Monte Carlo algorithm for calculating neutral gas transport in cylindrical plasmas. *Journal of Computational Physics*, 1978, vol. 28, no. 1, pp. 43–55.
21. Reiter D., Nicolai A. Monte Carlo simulation of the neutral gas density and temperature distribution due to the recycling processes at a poloidal, toroidal or mushroom limiter and at the divertor plate of a poloidal divertor. *Journal of Nuclear Materials*, 1982, vol. 111, pp. 434–439.
22. Spanier J., Gelbard E. M. *Monte Carlo principles and neutron transport problems*. Massachusetts, Addison-Wesley Publishing Company, 1969, 421 p.
23. Reiter D. "The EIRENE Code User Manual. Version: 11/2005". Available at: <https://eirene.de/manuals/eirene/eirene.pdf> (accessed: July 1, 2019).
24. Kotov V., Reiter D., Kukushkin A. S. *Numerical study of the ITER divertor plasma with the B2-EIRENE code package*. Forschungszentrum Juelich (Germany). Institut fuer Energieforschung (IEF), 2007, no. JUEL-4257. Available at: [https://juser.fz-juelich.de/record/828181/files/J%C3%BC1\\_4257\\_Kotov.pdf](https://juser.fz-juelich.de/record/828181/files/J%C3%BC1_4257_Kotov.pdf) (accessed: December 1, 2023).
25. Korving S. Q., Huijsmans G. T. A., Park J. S., Loarte A. Development of the neutral model in the nonlinear MHD code JOREK: Application to E×B drifts in ITER PFPO-1 plasmas. *Physics of Plasmas*, 2023, vol. 30, iss. 4, art. no. 042509.

26. Mironov M. I., Chernyshev F. V., Afanasyev V. I., Melnik A. D., Navolotsky A. S., Nesenevich V. G., Petrov M. P., Petrov S. Ya. DOUBLE-MC code: Modeling of neutral fluxes from plasma. *Plasma Physics Reports*, 2021, vol. 47, pp. 18–27.
27. Reiter D. *Computational many-particle physics*. Berlin, Heidelberg, Springer, 2008, 141 p.
28. Ermakov S. M., Mikhailov G. A. *Kurs statisticheskogo modelirovaniia [The course of statistic modelling]*. Moscow, Nauka Publ., 1982, 296 p. (In Russian)
29. Taylor R. J., Brown M. L., Fried B. D., Grote H., Liberati J. R., Morales G. J., Pribyl P., Darrow D., Ono M. H-mode behavior induced by cross-field currents in a tokamak. *Physical Review Letters*, 1989, vol. 63, no. 21, pp. 2365–2368.
30. Nakashima Y., Higashizono Y., Kawano H., Takenaga H., Asakura N., Oyama N., Kamada Y., Yatsu K. Three-dimensional neutral transport simulation in the JT-60U H-mode plasmas. *Journal of Physics: Conference Series*, 2008, vol. 123, iss. 1, art. no. 012029.
31. Kozhurin A. A., Semenets Yu. M., Khayrutdinov R. R., Lukash V. E. Dvumernaia transportnaia model' neutralov na osnove veroiatnostei prokhoda i ukhoda potokov s gruppami po energiiam [Two-dimensional neutral transport model based on flux transmission and escape probabilities with energy groups]. *Problems of Atomic Science and Technology. Series Thermonuclear Fusion*, 2021, vol. 44, no. 1, pp. 80–90. (In Russian)
32. Lukash V. E., Khayrutdinov R. R., Mirnov S. V., Lazarev V. B., Ivanov A. A., Zogolev V. E. Numerical modeling of Li limiter experiments in T-11M tokamak. *Proceedings 22<sup>nd</sup> IAEA Fusion Energy Conference*, 2008, pp. 13–18.
33. Semenets Yu. M., Khayrutdinov R. R. *A 2D tokamak edge and divertor model (SOL-DINA code) and its comparison with the UEDGE code*. Preprint TRINITI no. 0087-A. Troitsk, 2002, 36 p.
34. Sobol' I. M. *Chislennye metody Monte-Karlo [Numerical Monte Carlo methods]*. Moscow, Nauka Publ., 1973, 311 p. (In Russian)
35. Polevoi A., Shirai H., Takizuka T. *Report of scientific group*. Japan Atomic Energy Research Institute, 1997, no. JAERI-DATA/CODE-97-014. Available at: <https://jopss.jaea.go.jp/pdfdata/JAERI-Data-Code-97-014.pdf> (accessed: October 1, 2023).
36. Parks P. B., Turnbull R. J. Effect of transonic flow in the ablation cloud on the lifetime of a solid hydrogen pellet in a plasma. *The Physics of Fluids*, 1978, vol. 21, no. 10, pp. 1735–1741.
37. Matthews G. F. Plasma detachment from divertor targets and limiters. *Journal of Nuclear Materials*, 1995, vol. 220, pp. 104–116.
38. Loarte A., Monk R. D., Martin-Solis J. R., Campbell D. J., Chanin A. V., Clement S., Davies S. J., Ehrenberg J., Erents S. K., Guo H. Y., Harbour P. J., Horton L. D., Ingesson L. C., Jackel H., Lingertat J., Lowry C. G., Maggi C. F., Matthews G. F., McCormick K., O'Brien D. P., Reichle R., Saibene G., Smith R. J., Stamp M. F., Stork D., Vlases G. C. Plasma detachment in JET Mark I divertor experiments. *Nuclear Fusion*, 1998, vol. 38, no. 3, pp. 331–371.
39. Knoll D. A., McHugh P. R., Krasheninnikov S. I., Sigmar D. J. Simulation of dense recombining divertor plasmas with a Navier–Stokes neutral transport model. *Physics of Plasmas*, 1996, vol. 3, no. 1, pp. 293–303.
40. Gordeev Yu. S., Zinov'ev A. P., Petrov M. P. Rekombinatsiia vodoroda v kvazistatsionarnoi termoiadernoi plazme [Hydrogen recombination in quasistationary fusion plasmas]. *Pis'ma v Zhurnal eksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki [JETP Letters]*, 1977, vol. 25, pp. 223–226. (In Russian)
41. Zaveriaev V. S., Izvozchikov A. B., Lysenko S. E., Petrov M. P. Nagrev ionov v ustanovke Tokamak-10 [Ion heating in Tokamak-10 device]. *Plasma Physics*, 1978, vol. 4, no. 6, pp. 1205–1210. (In Russian)
42. Eletskaia A. V., Smirnov B. M. Elementarnye protsessy v plazme [Elementary processes in plasmas]. *Osnovy fiziki plazmy [Plasma physics basics]*. Moscow, Energoizdat Publ., 1983, vol. 1, pp. 58–81. (In Russian)
43. Nedospasov A. V., Tokar' M. Z. Pristenochnaia plazma v tokamakakh [Peripheral plasmas in tokamaks]. *Voprosy teorii plazmy [Questions on the theory of plasmas]*. Pod red. B. B. Kadomtseva. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1990, no. 18, pp. 68–203. (In Russian)
44. Kotelnikov I. A., Milstein A. I. Electron radiative recombination with a hydrogen-like ion. *Physica Scripta*, 2019, vol. 94, art. no. 055403.
45. Hasan M. Z., Conn R. W. A two-dimensional finite element multigroup diffusion theory for neutral atom transport in plasmas. *Journal of Computational Physics*, 1987, vol. 71, no. 2, pp. 371–390.
46. Vold E. L., Najmabadi F., Conn R. W. Fluid model equations for the tokamak plasma edge. *Physics of Fluids B: Plasma Physics*, 1991, vol. 3, no. 11, pp. 3132–3152.
47. Kalitkin N. N. *Chislennye metody*. 2-e izd. [Numerical methods. 2<sup>nd</sup> ed.]. St. Petersburg, BKhV-Peterburg Publ., 2011, 592 p. (In Russian)

48. Degtiarev L. M., Favorskii A. P. Potokovyi variant metoda progonki [The flux version of the double-sweep method]. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1968, vol. 8, no. 3, pp. 679–687. (In Russian)
49. Zakharov L. E., Shafranov V. D. Ravnovesie plazmy s tokom v toroidal'nykh sistemakh [Equilibrium of plasmas' with current in toroidal systems]. *Voprosy teorii plazmy [Questions on the theory of plasmas]*. Moscow, Energoizdat Publ., 1982, no. 11, pp. 118–233. (In Russian)
50. Greenwood J. The correct and incorrect generation of a cosine distribution of scattered particles for Monte-Carlo modelling of vacuum systems. *Vacuum*, 2002, vol. 67, no. 2, pp. 217–222.
51. Stangeby P. C. *The plasma boundary of magnetic fusion devices*. Philadelphia, Institute of Physics Publishing, 2000, 717 p.

Received: October 21, 2024.

Accepted: December 12, 2024.

Authors' information:

Alexander A. Kozhurin — kozhurin.aal4@physics.msu.ru

Maksim L. Dubrov — PhD in Physics and Mathematics; maksim.dubrov@iter.org

Victor E. Zhogolev — PhD in Physics and Mathematics; v.zhogolev@mail.ru

Rustam R. Khayrutdinov — Dr. Sci. in Physics and Mathematics; khayrutd@mail.ru

Victor E. Lukash — Dr. Sci. in Physics and Mathematics; lukash08@yandex.ru

Andrei A. Kavin — PhD in Physics and Mathematics; kavina57@mail.ru

Raisa R. Andrianova — raisa\_khayr@mail.ru