УДК 517.929.4
MSC 74G55
Вестник СПбГУ. Прикладная математика. Информатика... 2024. Т. 20. Вып. 4

Оптимальное управление напряженно-деформированными состояниями композиционной слоистой среды

А. П. Жабко[1], *В. В. Провоторов*[2], *Е. В. Игонина*[3], *С. М. Сергеев*[4]

[1] Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9
[2] Воронежский государственный университет,
Российская Федерация, 394006, Воронеж, Университетская пл., 1
[3] Елецкий государственный университет,
Российская Федерация, 399770, Елец, ул. Коммунаров, 28
[4] Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Российская Федерация, 195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, 29

Для цитирования: *Жабко А. П., Провоторов В. В., Игонина Е. В., Сергеев С. М.* Оптимальное управление напряженно-деформированными состояниями композиционной слоистой среды // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2024. Т. 20. Вып. 4. С. 534–549.
https://doi.org/10.21638/spbu10.2024.408

В предлагаемом исследовании рассматривается композиционная среда, которая представляет собой совокупность конечного числа объемных компонентов с четко выраженными поверхностями взаимного примыкания. Математическое описание такой среды осуществляется посредством слоистой области, которая определяет модель слоистой упругой композиционной среды в трехмерном евклидовом пространстве. Функции, описывающие количественные характеристики материала композиционной среды, принадлежат классу ограниченных суммируемых функций, обладающих обобщенными производными, являются элементами соболевского пространства. При этом принята следующая гипотеза: элементы поверхностей взаимного примыкания слоев при деформации (изгибе) не подвержены растяжению и сжатию (аналог одной из известных гипотез Кирхгофа). Работа состоит из трех частей. В первой математически описаны слоистая среда терминологией слоистых областей классических пространств функций с носителем в этих областях, а также явления вблизи поверхностей примыкания слоев композиционной среды. Вторая часть посвящена описанию деформаций композиционной среды и содержит формулировку задачи о напряженно-деформированном состоянии композиционной слоистой среды в слабой постановке, определения вспомогательных пространств и используемые классические утверждения для анализа поставленной задачи, устанавливаются достаточные условия слабой разрешимости краевой задачи. В третьей (основной) части решается задача оптимального распределенного управления напряженно-деформированными состояниями композиционной слоистой среды. Результаты исследования можно эффективно использовать при решении задач оптимального управления процессами деформации сложноструктурированных сплошных сред. При этом применяемые подходы анализа краевых задач механики сплошных сред распространяются на более общие представления компонентов тензорной функции деформации, а значит, могут существенно расширить возможности анализа более общих задач оптимизации деформируемых композиционных материалов.

Ключевые слова: напряженно-деформированное состояние композиционных материалов, краевая задача в слоистой области, слабая разрешимость, оптимальное управление деформациями слоистых композитов.

1. Введение. Ввиду особой практической важности конструкций из композиционных материалов (композитов) существуют различные типы этих материалов, содержащие армирующие элементы, т. е. включения в виде гранул, длинных или коротких волокон. Математическое описание гранулированного и однонаправленного волокнистого композита представлено в монографии [1, с. 330] с помощью формализмов периодической среды. В настоящей работе рассматривается другой тип композиционной среды, представляющий собой совокупность конечного числа объемных компонентов (в дальнейшем — слоев с четко выраженными поверхностями взаимного примыкания). Такая конструкция является основным элементом (матрицей) композиционной среды, несущим нагрузку. Армирующий наполнитель — мелкодисперсные порошки и наночастицы (например, металлические или стеклянные) — в структуре слоев располагается хаотически. Математическое описание такой среды осуществляется посредством слоистой области, которая определяет модель слоистой упругой композиционной среды в пространстве $\mathbb{R}^3$. Функции, описывающие количественные характеристики материала композиционной среды, принадлежат классу ограниченных суммируемых функций, обладающих обобщенными производными, и относятся к элементам конкретного соболевского пространства. При этом принята следующая гипотеза: элементы поверхностей взаимного примыкания слоев при деформации (изгибе) не подвержены растяжению и сжатию. Последнее — аналог одной из известных гипотез Кирхгофа [2, с. 13, 103]. Работа состоит из трех частей. В первой математически описаны слоистая среда терминологией слоистых областей классических пространств функций с носителем в этих областях, а также явления вблизи поверхностей примыкания слоев композиционной среды (п. 2–4). Вторая часть посвящена описанию деформаций композиционной среды и содержит формулировку задачи о напряженно-деформированном состоянии композиционной слоистой среды в слабой постановке, определения вспомогательных пространств и используемые классические утверждения для анализа поставленной задачи, устанавливаются достаточные условия слабой разрешимости краевой задачи (п. 5–7). В третьей (основной) части решена задача оптимального распределенного управления напряженно-деформированными состояниями композиционной слоистой среды (п. 8).

2. Описание структуры композиционной слоистой среды. Сложносочлененные структуры областей (например, сетеподобные области [3, 4]) удобны для математического описания носителей различного типа сетевых процессов. Слоистая область $\Im \subset \mathbb{R}^3$ ($\partial\Im$ — граница $\Im$) (см. [5]) представляет собой совокупность ограниченных подобластей $\Im_j$, $j = 0, 1, 2, ..., N$ ($\Im_j$ — слои области $\Im$, $\partial\Im_j$ — границы слоев), и совокупность поверхностей $S_j \subset \partial\Im_j$, $j = 1, 2, ..., N$, являющихся общими границами смежных слоев (S_j — поверхности взаимного примыкания слоев). Таким образом, имеют место соотношения

$$\Im = \left(\bigcup_{j=0}^{N} \Im_j\right) \bigcup \left(\bigcup_{j=1}^{N} S_j\right), \quad \partial\Im = \left(\bigcup_{j=0}^{N} \partial\Im_j\right) / \left(\bigcup_{j=1}^{N} S_j\right).$$

Все рассмотрения проводятся в предположении липшицевости подобластей $\Im_j$, $j = 0, 1, 2, ..., N$, и гладкости поверхностей S_j, $j = 1, 2, ..., N$, при этом $\Im_j$ — звездная относительно некоторого шара из $\Im_j$ для каждого фиксированного j. Допускается различие на $\Im_j$ свойств физического процесса, деформации вблизи поверхностей взаимного примыкания S_j слоев описаны полученными соотношениями.

3. Основные понятия и определения. Используются классические пространства действительных, измеримых по Лебегу функций $u(x)$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$:

• $L_2(\Omega)$ — пространство (классов) вещественных функций $u(x)$, измеримых на Ω, скалярное произведение и норма определены следующим образом:

$$(u, v)_\Omega = \int\limits_\Omega u(x)v(x)dx, \quad \|u\|_\Omega = \sqrt{(u,u)_\Omega}; \tag{1}$$

• $L_\infty(\Omega)$ — пространство (классов) измеримых, существенно ограниченных функций $u(x)$ на Ω, $\|u\|_\Omega = \operatorname{vrai}\max\limits_{\mathrm{x}\in\Omega} |\mathrm{u(x)}|$;

• $W_2^1(\Omega)$ — соболевское пространство функций $u(x) \in L_2(\Omega)$ с обобщенными производными $\frac{\partial u(x)}{\partial x_\iota} \in L_2(\Omega)$ $(\iota = 1, 2, 3)$, причем

$$(u, v)_\Omega^1 = \int\limits_\Omega \left(u(x)v(x) + \sum_{\iota=1}^{3} \frac{\partial u(x)}{\partial x_\iota} \frac{\partial v(x)}{\partial x_\iota} \right) dx, \quad \|u\|_\Omega^1 = \sqrt{(u,u)_\Omega^1}; \tag{2}$$

• $W_{2,0}^1(\Omega) = \{u : u \in W_2^1(\Omega), u|_{x\in\partial\Omega} = 0\}$ — ядро $W_2^1(\Omega)$, очевидно включение $W_{2,0}^1(\Omega) \subset W_2^1(\Omega)$.

Для слоистой области $\Im$ имеет место $\int\limits_\Im u(x)dx = \sum\limits_{j=0}^{N} \int\limits_{\Im_j} u(x)dx$, пространства $L_2(\Im)$, $L_\infty(\Im)$, $W_2^1(\Im)$, $W_{2,0}^1(\Im)$ определены, как показано выше, скалярные произведения и нормы представлены соотношениями

$$(u, v)_\Im = \sum_{j=0}^{N} \int\limits_{\Im_j} u(x)v(x)dx, \quad \|u\|_\Im = \sqrt{(u,u)_\Im}, \ , \tag{3}$$

$$(u, v)_\Im^1 = \sum_{j=0}^{N} \int\limits_{\Im_j} \left(u(x)v(x) + \sum_{\iota=1}^{3} \frac{\partial u(x)}{\partial x_\iota} \frac{\partial v(x)}{\partial x_\iota} \right) dx, \tag{4}$$

$$\|u\|_\Im^1 = \sqrt{(u,u)_\Im^1} = \left(\sum_{j=0}^{N} \int_{\Im_j} \left(u^2(x) + \sum_{\iota=1}^{3} (\frac{\partial u(x)}{\partial x_\iota})^2 \right) dx \right)^{1/2}, \tag{5}$$

аналогичными соотношениям (1) и (2), а именно, (3) для $L_2(\Im)$ и (4), (5) для $W_2^1(\Im)$, $W_{2,0}^1(\Im)$, $\|u\|_\Im = \operatorname{vrai}\max\limits_{\mathrm{x}\in\Im} |u(x)|$ для $L_\infty(\Im)$.

4. Описание явлений вблизи поверхностей примыкания слоев композиционной среды. В работе [3] приведены соотношения, описывающие явления переноса сплошных сред вблизи поверхностей примыкания слоев композиционной среды. Они формируются с помощью дифференциального выражения

$$\mathcal{A}u := -\sum_{\kappa,\,\iota=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_\kappa} \left(a_{\kappa\iota}(x) \frac{\partial u}{\partial x_\iota} \right),$$

которое определяет эллиптическую часть краевой задачи математической модели процесса переноса сплошной среды в сетеподобном носителе, обладающем слоистой областью $\Im$; здесь $a_{\kappa\iota}(x) \in L_2(\Im)$ — ограниченные функции (см. (8)). Пусть $\tilde{C}^1(\overline{\Im})$ — множество функций $u(x) \in C^1(\overline{\Im})$, для которых на S_j $(j = \overline{1, N})$ выполнены условия

$$u(x)|_{S_j^+} = u(x)|_{S_j^-}, \quad \int\limits_{S_j^+} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu_\Lambda} dS + \int\limits_{S_j^-} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu_\Lambda} dS = 0, \tag{6}$$

в которых $\frac{\partial u(x)}{\partial \nu_\Lambda} = \sum\limits_{\kappa,\,\iota=1}^{3} a_{\kappa\iota}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_\iota}\cos{(\bar{n},\, x_\kappa)}$, S_j^+, S_j^- — односторонние поверхности для S_j, $\cos{(\bar{n},\, x_\kappa)}$ — κ-й направляющий косинус внешней нормали к S_j^+ и S_j^-. Отметим, что соотношения (6) по сути своей характеризуют явления переноса сплошной среды через поверхности примыкания S_j смежных слоев $\Im_j$ композиционной среды: если, к примеру, осуществляется перенос теплового потока по композиционному материалу $\Im = \left(\bigcup\limits_{j=0}^{N} \Im_j\right) \bigcup \left(\bigcup\limits_{j=1}^{N} S_j\right)$, то первая формула (6) определяет равенство температур на S_j^+ и S_j^-, вторая — баланс тепловых потоков через S_j.

Замечание 1. Условия (6) могут принимать другой вид в соответствии с изменениями закономерностей явлений на поверхностях S_j, а именно,

$$u(x)|_{S_j^+} = u(x)|_{S_j^-}, \quad \int\limits_{S_j^+} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu_\Lambda} dS + \int\limits_{S_j^-} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu_\Lambda} dS + \int\limits_{S_j^-} g(x) dS = 0, \quad j = \overline{1, N}.$$

Выражение $\int\limits_{S_j^-} g(x)dS$ устанавливает воздействие сил с плотностью распределения $g(x)$ со стороны поверхности S_j^- (оно также возможно и со стороны S_j^+).

Рассмотрим иной подход, предложенный в работе [5] при анализе деформаций в окрестности поверхностей примыкания слоев композиционной среды, который базируется на использовании функций пространства $W_2^1(\Im)$ и также приводящий к соотношениям, аналогичным (6). При этом получим аналогичные $W_2^1(\Im)$ и $W_{2,0}^1(\Im)$ пространства, краевые задачи в которых определяются в слабой постановке.

Для функций $u(x), \eta(x) \in W_2^1(\Im)$ введем билинейную непрерывную, симметричную форму

$$\rho(u,\eta) = \int\limits_{\Im} \sum\limits_{\kappa,\iota=1}^{3} a_{\kappa\iota}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_\iota}\frac{\partial \eta(x)}{\partial x_\kappa}dx, \tag{7}$$

порожденную $\mathcal{A}$u. Функции $a_{\kappa\iota}(x)$ в (7) принадлежат пространству $L_2(\Im)$ и удовлетворяют условиям

$$a_{\kappa\,\iota}(x) = a_{\iota\,\kappa}(x), \quad a_*\xi^2 \leqslant \sum\limits_{\kappa,\iota=1}^{3} a_{\kappa\,\iota}(x)\xi_\kappa\xi_\iota \leqslant a^*\xi^2, \tag{8}$$

где $a_* > 0$, $a^* > 0$ — постоянные, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3$, $\xi^2 = \sum\limits_{\kappa=1}^{3} \xi_\kappa^2$; соотношения (8) имеют место почти всюду на $\Im$.

Пусть $f(x) \in L_2(\Im)$ и в $W_2^1(\Im)$ задана линейная форма (линейный непрерывный функционал)

$$\mathcal{L}(\eta) = \int\limits_{\Im} f(x)\eta(x)dx, \quad \eta(x) \in W_2^1(\Im). \tag{9}$$

Имеет место утверждение (лемма Лакса—Мильграма [6]): если $\rho(u,u) \geqslant a_*\|u\|^2_{W_2^1(\Im)}$ при любом $u \in W_2^1(\Im)$, тогда существует единственный элемент $u \in W_2^1(\Im)$, для которого

$$\rho(u,\eta) = \mathcal{L}(\eta) \quad \forall \eta \in W_2^1(\Im). \tag{10}$$

Замечание 2. В задачах механики деформированного тела билинейная форма $\rho(u,\eta)$ в соотношении (7) определяется кинетической энергией деформируемого материала, $f(x)$ в (9) — распределенная нагрузка деформируемого материала. Билинейная форма и нагрузка зависят от управляющих воздействий. Соотношение (10) с физической точки зрения является принципом возможных перемещений u, при этом множество перемещений принадлежит пространству $W_2^1(\Im)$.

Применяя формулу Грина (доказательство ее справедливости для $\Im$ дословно повторяет доказательство для сетеподобной области [3]), получим соотношение (10) в виде системы дифференциальных уравнений в слабой постановке. Определим функции $\eta_j(x) \in W_{2,0}^1(\Im)$ следующим образом:

$$\eta_j(x) = \eta(x),\ \ x \in \Im_j, \quad \eta_j(x) = 0,\ \ x \in \Im \backslash \Im_j,\ \ j = 0, 1, 2, ..., N.$$

Заменяя $\eta(x)$ в (9), (10) на $\eta_j(x)$ и используя формулу Грина ко всем $\Im_j$ ($j = 0, 1, 2, ..., N$), приходим к соотношениям

$$\int\limits_{\Im_j} (\mathcal{A}u)(x)\eta_j(x)dx = -\int\limits_{\partial\Im_j} \tfrac{\partial u}{\partial \nu_{\mathcal{A}}}\eta(x)dx + \rho(u, \eta_j) = \int\limits_{\Im_j} f(x)\eta_j(x)dx, \tag{11}$$

где

$$\tfrac{\partial u}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} = \sum_{\kappa,\iota=1}^{3} a_{\kappa\iota}(x)\tfrac{\partial u}{\partial x_\iota}\cos(n_j, x_\kappa), \tag{12}$$

$\cos(n_j, x_\kappa)$ — κ-й направляющий косинус внешней нормали n_j к сторонам поверхности S_j (j фиксировано: $j = 1, 2, ..., N$). Тогда $u(x)$ удовлетворяет уравнениям

$$\mathcal{A}u = f(x), \quad x \in \Im_j, \tag{13}$$

в слабой постановке (j фиксировано: $j = 0, 1, 2, ..., N$), а значит, $u(x)$, учитывая соотношения (13), удовлетворяет тождествам

$$\rho(u, \eta_j) = \int\limits_{\Im_j} f(x)\eta_j(x)dx \quad \forall \eta_j(x) \in W_{2,0}^1(\Im_j), \quad j = 0, 1, 2, ..., N.$$

Пусть функция $\eta(x) \in W_2^1(\Im_j)$ нулевая на всех поверхностях S_j, кроме S_j, $j = 1, 2, ..., m$, $1 \leqslant m \leqslant N$. Тогда, принимая во внимание (13), получаем выражение

$$\sum_{j=1}^{m} \int\limits_{\Im_j} \mathcal{A}u(x)\eta(x)dx = \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{\Im_j} f(x)\eta(x)dx.$$

Используя формулу Грина (см. соотношения (11)), а также учитывая представление (9) формы $\mathcal{L}(\eta)$, находим, что

$$-\sum_{j=1}^{m} \int S_j^+ \tfrac{\partial u}{\partial \nu_{\mathcal{A}}}\eta(x)dx - \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{S_j^-} \tfrac{\partial u}{\partial \nu_{\mathcal{A}}}\eta(x)dx + \rho(u, \eta_j) = \int\limits_{\Im} f(x)\eta(x)dx$$

или

$$-\sum_{j=1}^{m} \left(\int\limits_{S_j^+} \tfrac{\partial u}{\partial \nu_{\mathcal{A}}}\eta(x)dx + \int\limits_{S_j^-} \tfrac{\partial u}{\partial \nu_{\mathcal{A}}}\eta(x)dx \right) + \rho(u, \eta) = \int\limits_{\Im} f(x)\eta(x)dx, \tag{14}$$

пояснения для S_j^+, S_j^- и $\frac{\partial u}{\partial \nu_{\mathcal{A}}}$ установлены соотношениями (6) и (12) соответственно. Фиксируя в (14) поочередно $m = 1$, $m = 2$,..., $m = N$ и принимая во внимание (10), приходим к соотношениям

$$\int\limits_{S_j^+} \tfrac{\partial u(x)}{\partial \nu_{\mathcal{A}}}\eta(x)dx + \int\limits_{S_j^-} \tfrac{\partial u(x)}{\partial \nu_{\mathcal{A}}}\eta(x)dx = 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad 1 \leqslant m \leqslant N. \tag{15}$$

Добавление условий непрерывности функций $u(x)$ на поверхностях S_j

$$u(x)|_{S_j^+} = u(x)|_{S_j^-}, \quad j = \overline{1, N}, \tag{16}$$

характерных для границ слоев композиционных слоистых сред при анализе процессов деформации, приводит к условиям (6).

5. Описание упругих свойств композиционной среды. Как было показано выше, для состоящей из конечного числа слоев композиционной среды принята следующая гипотеза — элементы поверхностей примыкания слоев при деформации (изгибе) не подвергаются растяжению и сжатию.

Изучается задача о напряженно-деформированном состоянии композиционной слоистой среды, при анализе которой используются полученные выше результаты, причем учитываются особенности, порождаемые размерностью пространств функций, описывающие количественные характеристики слоистой среды.

Замечание 3. В монографии [1, с. 321] рассматривается сплошная композиционная среда, которая обладает периодической структурой. В данной статье проведен анализ напряженно-деформированного композиционного материала со слоями, имеющими различные характеристики.

Определим вектор-функцию $u = \{u_1, u_2, u_3\} \in \left(W_2^1(\Im)\right)^3$, описывающую перемещения точек среды, через $\sigma = \{\sigma_{il}\}$, $i, l = 1, 2, 3$, $\sigma \in L_2(\Im)$, обозначим тензорную функцию напряжений, которая связана с функцией перемещения u законом Гука [2, с. 105]:

$$\sigma_{il}(u) = \sum_{k,m=1}^{3} a_{ilkm}\varepsilon_{km}(u), \tag{17}$$

здесь $\varepsilon_{km}(u)$, $k, m = 1, 2, 3,$ — компоненты тензорной функции деформаций:

$$\varepsilon_{km}(u) := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_k}\right), \quad k, m = 1, 2, 3. \tag{18}$$

Считаем выполненными условия, аналогичные условиям (8):

$$a_{ilkm}(x) \in L_\infty(\Im), \tag{19}$$

$$a_{ilkm}(x) = a_{likm}(x) = a_{ilmk}(x) = a_{mkil}(x), \tag{20}$$

$$\sum_{i,l,k,m=1}^{3} a_{likm}(x)\xi_{il}\xi_{km} \geqslant C_0 \sum_{i,j=1}^{3} \xi_{i,l}^2 \quad \forall \xi_{i,l} = \xi_{l,i}, \tag{21}$$

где $C_0 > 0$ — постоянная; соотношения (20), (21) имеют место почти всюду в $\Im$.

6. Задача о напряженно-деформированном состоянии композиционной слоистой среды в слабой постановке. Для вектор-функций $u = \{u_1, u_2, u_3\}$ из $\left(W_2^1(\Im)\right)^3$ введем необходимые пространства. Описание пространств для краевой задачи о напряженно-деформированном состоянии сплошной среды должно учитывать изменения перемещений точек среды вблизи поверхностей примыкания слоев. Соотношения, описывающие такие изменения, аналогичны приведенным в п. 4 для характеристики явлений переноса сплошных сред через поверхности примыкания смежных слоев, где использовались скалярные функции. Далее будут описаны перемещения точек среды вблизи поверхностей примыкания слоев, при этом учитываются особенности, порождаемые размерностью пространств функций, оценивающие типичные свойства слоистой среды.

По аналогии с (7) относительно $u = \{u_1, u_2, u_3\}$ и $\upsilon = \{\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3\}$ из $\left(W_2^1(\Im)\right)^3$ рассмотрим билинейную форму

$$a(u, \upsilon) = \int\limits_{\Im} \sum_{i,l,k,m=1}^{3} a_{il\,km}(x)\varepsilon_{km}(u)\varepsilon_{ij}(\upsilon)dx. \tag{22}$$

Введем вектор-функции

$$f(x) := (f_1(x), f_2(x), f_3(x)) \in (L_2(\Im))^3,$$
$$F_j(x) := (F_1^j(x), F_2^j(x), F_3^j(x)) \in (L_2(\Im))^3, \ \ j = \overline{1, N},$$

и линейный функционал в $\left(W_2^1(\Im)\right)^3$

$$(\mathfrak{L}, \upsilon) = \int\limits_{\Im} \sum_{i=1}^{3} f_i(x)\upsilon_i dx + \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{S_j} \sum_{i=1}^{3} F_i^j(x)\upsilon_i dx. \tag{23}$$

В прикладных задачах механики сплошных сред функция $f(x)$ описывает распределенную внешнюю нагрузку на материал, $F_j(x)$ — функции влияния в местах $S_j(x)$ взаимного примыкания поверхностей слоев, причем могут использоваться односторонние поверхности $S_j^-(x)$ и $S_j^+(x)$ для $S_j(x)$.

Рассмотрим задачу о напряженно-деформированном состоянии композиционной среды в слабой постановке: необходимо определить функцию $u(x)$ такую, что

$$a(u, \upsilon) = (\mathfrak{L}, \upsilon) \tag{24}$$

для любых функций υ из некоторого подпространства пространства $\left(W_2^1(\Im)\right)^3$.

Подставим представления (22), (23) для $a(u, \upsilon)$, $(\mathfrak{L}, \upsilon)$ в соотношение (24). Рассуждения, аналогичные в п. 4 для (15), (16) на поверхностях примыкания слоев, приводят к соотношениям

$$u_{S_J^+} = u_{S_J^-}, \ \int\limits_{S_J^+} \sum_{il=1}^{3} a_{ilkm}(x)\varepsilon_{km}(u)ds +$$
$$+ \int\limits_{S_J^-} \sum_{il=1}^{3} a_{ilkm}(x)\varepsilon_{km}(u)ds + \int\limits_{S_J^-} \sum_{i=1}^{3} F_i^j ds = 0, \ \ j = \overline{1, N},$$

которые определяют элементы подпространства $\left(\tilde{V}^1(\Im)\right)^3$ пространства $\left(W_2^1(\Im)\right)^3$. Если при этом к соотношениям на поверхностях примыкания слоев добавить условие $u|_{\partial\Im} = 0$, получим пространство $\left(\tilde{V}_0^1(\Im)\right)^3 \subset \left(\tilde{V}^1(\Im)\right)^3$; нормы в пространствах $\left(\tilde{V}^1(\Im)\right)^3$ и $\left(\tilde{V}_0^1(\Im)\right)^3$ индуцированы метрикой $\left(W_2^1(\Im)\right)^3$.

Рассмотрим задачу (24) в пространстве $\left(\tilde{V}_0^1(\Im)\right)^3$ (пространство $\left(\tilde{V}^1(\Im)\right)^3$ используется для анализа задач с более общими краевыми условиями). Задача (24) порождает систему линейных непрерывных операторов N_i $(i = 1, 2, ..., 6)$, которые для $\upsilon = \{\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3\} \in \left(\tilde{V}_0^1(\Im)\right)^3$ определим так:

$$\begin{aligned} &N_1(\upsilon) = \tfrac{\partial \upsilon_1}{\partial x_1}, \quad N_2(\upsilon) = \sqrt{2}\left(\tfrac{\partial \upsilon_1}{\partial x_2} + \tfrac{\partial \upsilon_2}{\partial x_1}\right), \quad N_3(\upsilon) = \sqrt{2}\left(\tfrac{\partial \upsilon_1}{\partial x_3} + \tfrac{\partial \upsilon_3}{\partial x_1}\right), \\ &N_4(\upsilon) = \sqrt{2}\left(\tfrac{\partial \upsilon_2}{\partial x_3} + \tfrac{\partial \upsilon_3}{\partial x_2}\right), \quad N_5(\upsilon) = \tfrac{\partial \upsilon_2}{\partial x_2}, \quad N_6(\upsilon) = \tfrac{\partial \upsilon_3}{\partial x_3}. \end{aligned} \tag{25}$$

С точки зрения теории напряженно-деформированных состояний сплошных сред выражения $N_i \upsilon$ $(i = 1, 2, ..., 6)$ (см. (25)) задают с точностью до постоянных коэффициентов компоненты деформации (18) (а значит, напряжений (17)) композиционной среды, формируемые вектор-функцией перемещений $\upsilon = \{\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3\}$. Операторы N_i $(i = 1, 2, ..., 6)$ задают матрицу $\{N_{i\,r}(x, \xi)\}$ с элементами $N_{i\,r}(x,\xi) = \sum\limits_{|k|=1} g_{irk}(x)\xi_1^{k_1}\xi_2^{k_2}\xi_3^{k_3}$, $i = 1, 2, ..., 6$, $r = 1, 2, 3$, определяемые посредством соотношений ($g_{irk}(x)$ в (25) являются постоянными)

$$\begin{aligned} &N_1(\xi) = 2\xi_1, \quad N_2(\xi) = \sqrt{2}\,(\xi_2 + \xi_1)\,, \quad N_3(\xi) = \sqrt{2}\,(\xi_3 + \xi_1)\,, \\ &N_4(\xi) = \sqrt{2}\,(\xi_3 + \xi_2)\,, \quad N_5(\xi) = 2\xi_2, \quad N_6(\xi) = 2\xi_3, \end{aligned} \tag{26}$$

при любых комплексных числах $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \xi_n\}$ $(\xi \neq 0)$.

Для анализа слабой разрешимости задачи (24), следуя идеям работы [1, с. 59], предварительно введем понятие коэрцитивной системы операторов, установим свойства этой системы и утверждения, базирующиеся на оценках норм ее операторов. Используем определения и основные утверждения для классических областей $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Пусть $W = \left(W_2^1(\Omega)\right)^m$, $\|\upsilon\|_W^2 = \sum\limits_{r=1}^m \|\upsilon_r\|^2_{W_2^1(\Omega)}$. Рассмотрим систему линейных непрерывных операторов N_i $(i = 1, 2, ..., \nu)$: $W \to L_2(\Omega)$, определяемых выражениями

$$N_i \upsilon = \sum_{r=1}^m \sum_{|k|\leqslant 1} g_{irk} D^k \upsilon_r, \quad i = 1, 2, ..., \nu, \quad D^k \upsilon_r = \frac{\partial^k \upsilon_r}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\partial x_3^{k_3}},$$

здесь $g_{irk} \in L_\infty(\Omega)$.

Определение 1. *Система операторов N_i $(i = 1, 2, ..., \nu)$ называется W-коэрцитивной относительно $(L_2(\Omega))^m$, если существует положительная постоянная C, для которой выполнено неравенство*

$$\sum_{i=1}^{\nu} \|N_i \upsilon\|^2_{L_2(\Omega)} + \sum_{r=1}^{m} \|\upsilon_r\|^2_{L_2(\Omega)} \geqslant C\|\upsilon\|^2_W \quad \forall \upsilon \in W.$$

Пусть W' — замкнутое подпространство W: $W' \subseteq W$.

Определение 2. *Система операторов N_i $(i = 1, 2, ..., \nu)$ называется коэрцитивной в W', если существует положительная постоянная C, для которой выполнено неравенство*

$$\sum_{i=1}^{\nu} \|N_i \upsilon\|^2_{L_2(\Omega)} \geqslant C\|\upsilon\|^2_W \quad \forall \upsilon \in W'.$$

Определение 3. *Открытое множество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию конуса, если элемент $x + U(\varepsilon(x), h) \in \Omega$ для произвольного $x \in \Omega$, где $U(\varepsilon(x), h)$ — прямой круговой конус с вершиной в начале координат, фиксированным раствором, высотой h $(h < \infty)$ и вектором направления $e(x)$ оси.*

Для дальнейшего потребуются следующие утверждения: [7, теорема 1] и [1, теорема на с. 60].

Теорема 1. *Для ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, удовлетворяющей условию конуса, система дифференциальных операторов N_i $(i = 1, 2, ..., \nu)$ W-коэрцитивна относительно $(L_2(\Omega))^n$, если ранг матрицы с элементами*

$$N_{i\,r}(x, \xi) = \sum_{|k|=1} g_{irk}(x)\xi_1^{k_1}\cdots\xi_n^{k_n}, \quad i = \overline{1, \nu}, \quad r = \overline{1, m},$$

определенной операторами N_i, $i = 1, 2, ..., \nu$, равен m для любых комплексных $\xi = \{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\}$ $(\xi \neq 0)$ и любого $x \in \Omega$.

Теорема 2. *Пусть система операторов N_i $(i = 1, 2, ..., \nu)$ является W-коэрцитивной относительно $(L_2(\Omega))^3$ и пусть $a(u, v)$ — билинейная симметричная, непрерывная форма на $W \times W$, причем $a(v, v) \geqslant 0$ для произвольных $v \in W$, и пусть из условий*

$$\omega \in W, \quad \sum_{i=1}^{\nu} \|N_i\omega\|^2_{L_2(\Omega)} + a(\omega, \omega) = 0 \tag{27}$$

следует $\omega = 0$. Тогда существует постоянная $c > 0$ такая, что

$$\sum_{i=1}^{\nu} \|N_i v\|^2_{L_2(\Omega)} + a(v, v) \geqslant c\|v\|^2_W \quad \forall v \in W.$$

Далее для слоистой области $\Im$ рассмотрим задачу (24) в пространстве $\left(\tilde{V}_0^1(\Im)\right)^3$, и для удобства представления результатов также используем обозначение $V = \left(\tilde{V}_0^1(\Im)\right)^3$.

Замечание 4. Так как области $\Im_j$, $j = 0, 1, 2, ..., N$, липшицевы, то они удовлетворяют условию конуса, следовательно, $\Im$ также удовлетворяет условию конуса.

Следствие 1. Из теоремы 1 при $n = m = 3$, $\nu = 6$ непосредственно вытекает V-коэрцитивность относительно $(L_2(\Im))^3$ операторов N_i, $i = 1, 2, ..., 6$, представленных соотношениями (25) и матрицей $\{N_{i\,r}(x, \xi)\}$, определенных посредством соотношений (26).

Используя неравенства (19)–(21), нетрудно получить неравенства, связывающие нормы $\|N_i v\|_{L_2(\Im)}$ и $\|v\|_V$ для операторов N_i, $i = 1, 2, ..., 6$, как следствие из теоремы 2, а именно, справедлива такая теорема:

Теорема 3. *Пусть $a(u, v)$ — билинейная симметричная, непрерывная форма на $V \times V$, причем $a(v, v) \geqslant 0$ для произвольных $v \in V$, и пусть из условий*

$$\omega \in V, \quad \sum_{i=1}^{6} \|N_i\omega\|^2_{L_2(\Im)} + a(\omega, \omega) = 0,$$

аналогичных (27), следует $\omega = 0$. Тогда существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$\sum_{i=1}^{6} \|N_i v\|^2_{L_2(\Im)} + a(v, v) \geqslant C\|v\|^2_V \quad \forall v \in V. \tag{28}$$

Следствие 2. Обозначим через $V' = \{u : \ u \in V, \ \ a(u, u) = 0\}$ замкнутое подпространство в V. Тогда, в силу (28), приходим к неравенству $\sum\limits_{i=1}^{6} \|N_i v\|^2_{L_2(\Im)} \geqslant C\|v\|^2_V$ при любых $v \in V'$, т. е. система операторов N_i $(i = 1, 2, ..., 6)$ является коэрцитивной в V'.

Следствие 3. Пусть V' — замкнутое подпространство в V такое, что из условий $\sum\limits_{i=1}^{6} \|N_i\omega\|^2_{L_2(\Im)} = 0$ для произвольного элемента $v \in V'$ следует $\omega = 0$. Тогда существует постоянная $C_0 > 0$, при которой

$$\sum_{i=1}^{6} \|N_i v\|^2_{L_2(\Im)} \geqslant C_0\|v\|^2_V \quad \forall v \in V, \tag{29}$$

т. е. система операторов N_i $(i = 1, 2, ..., 6)$ является коэрцитивной в V'. Действительно, из $V' \subset V$ вытекает V'-коэрцитивность относительно $(L_2(\Im))^3$ системы N_i $(i = 1, 2, ..., 6)$. В качестве билинейной симметричной непрерывной формы $a(u, v)$ на $V \times V$ возьмем нулевую форму (см. следствие 2). Используя утверждение теоремы 2 для $V = V'$, получим неравенство (29).

Учитывая представления (25) операторов N_i $(i = 1, 2, ..., 6)$, утверждения теоремы 1 и следствие 1, получим, в силу определения 1,

$$\int\limits_{\Im} \sum_{i,l=1}^{3} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \right)^2 dx + \sum_{i=1}^{3} \|u_i\|^2_{L_2(\Im)} \geqslant C\|u\|^2_V \quad \forall u \in V, \tag{30}$$

здесь $\|u\|^2_V = \sum\limits_{i=1}^{3} \|u_i\|^2_{W^1_2(\Im)}$, C — положительная постоянная.

Для слоистых композиционных областей $\Im$ неравенство (30) является аналогом известного неравенства Корна [1, с. 62] (см. также, [2, с. 110]), где при анализе напряженно-деформированных состояний композитов используются классические области Ω.

Пусть функции $F_j(x) := (F^j_1(x), F^j_2(x), F^j_3(x),\ j = \overline{1, N})$, описывающие внешние воздействия на композиционную среду в поверхностях примыкания слоев, равны нулю. Определим подпространство Q функций $u \in V$ соотношением

$$Q = \{u:\ u \in V,\ \ \frac{\partial u_i}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} = 0, \quad i,\ l = 1, 2, 3\}. \tag{31}$$

Элементами этого пространства являются функции, с физической точки зрения определяющие так называемые жесткие смещения среды в малом (см. соотношения (17), (18)). Элементы $u = (u_1, u_2, u_2) \in Q$, как следует из (31), на каждой подобласти $\Im_j$, $j = 0, 1, 2, ..., N$, имеют вид [8]

$$u^j_1 = a^j_1 - b^j_3 x_2 + b^j_2 x_3, \quad u^j_2 = a^j_2 - b^j_1 x_3 + b^j_3 x_1, \quad u^j_3 = a^j_3 - b^j_2 x_1 + b^j_1 x_3, \tag{32}$$

где a^j_i, b^j_i $(i = 1, 2, 3,\ \ j = 0, 1, 2, ..., N)$ — постоянные. Выражением $a(u, v) = \int\limits_{\Upsilon} uv\, dx$, где Υ — открытое подмножество $\partial\Im$, определим билинейную симметричную форму на $V \times V$. В силу неравенств (19)–(21), имеем $\|a(u, v)\| \leqslant C\|u\|_V \|v\|_V$, а значит, форма $a(u, v)$ непрерывна на $V \times V$.

Пусть $u(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x)) \in Q$ и

$$\int\limits_{\Upsilon} (u_1(x)^2 + u_2(x)^2 + u_3(x)^2) ds = 0. \tag{33}$$

Исходя из соотношений (32), функция $u(x)$ на каждой подобласти $\Im_j$, $j = 0, 1, 2, ..., N$, имеет представление

$$u^j(x) = a^j + A_j x \quad (j = 0, 1, 2, ..., N), \tag{34}$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)$; $u^j(x) = \mathrm{col}\left(u^j_1(x), u^j_2(x), u^j_3(x)\right)$; $a^j = \mathrm{col}\left(a^j_1, a^j_2, a^j_3\right)$; элементы матриц A_j в (34) определяются постоянными b^j_i $(i = 1, 2, 3, j = 0, 1, 2, ..., N)$ из соотношений (32). Нетрудно убедиться, что, в силу (31) и выполнения условий примыкания, получим $a^j = a = (a_1, a_2, a_3)$ и $u^j(x) = u\,(x) = a$ $(j = 0, 1, 2, ..., N)$, а значит, учитывая соотношения $\varepsilon_{i\,l}(u) = \frac{\partial u_i}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} = 0$, i, $l = 1, 2, 3$, и (33), приходим к соотношению

$a=0$, т. е. $u(x)=0$. Таким образом, показано, что при $u(x)\in Q$ из соотношения (33) (напомним, что $u|_{\Upsilon\subset\partial\Im}=0$ и $Q\subset V=\left(\tilde V_0^1(\Im)\right)^3$) следует $u(x)=0$, а значит, из неравенства (30) и теоремы 2 вытекает неравенство

$$\int\limits_{\Im}\sum_{i,l=1}^{3}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_l}+\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\right)^2dx+\int\limits_{\Upsilon}(u_1(x)^2+u_2(x)^2+u_3(x)^2)ds\geqslant C\|u\|_V^2\quad\forall u\in V,\tag{35}$$

где $C=\mathrm{const}>0$. В соответствии со сказанным введем пространство $V'=\left\{u:\ \int\limits_{\Upsilon}(u_1(x)^2+u_2(x)^2+u_3(x)^2)ds=0\right\}$, которое замкнуто в V, так как отображение $u\to\int\limits_{\Upsilon}(u_1(x)^2+u_2(x)^2+u_3(x)^2)ds$ является непрерывным из V в $\{0\}\subset\mathbb{R}^1$. Тогда из неравенства (35) и представления пространства V вытекает неравенство

$$\int\limits_{\Im}\sum_{i,l=1}^{3}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_l}+\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\right)^2dx\geqslant C\|u\|_V^2\quad\forall u\in V.$$

7. Достаточные условия слабой разрешимости задачи (24). Сохраняя обозначения п. 3 и 4, рассмотрим в $\left(\tilde V_0^1(\Im)\right)^3$ задачу (24) о напряженно-деформированном состоянии слоистой среды.

Теорема 4. *Пусть для коэффициентов* $a_{i\,j\,k\,m}(x)$ *функций* $\sigma_{i\,j}(u)(x)$ *выполнены условия* (19)–(21), *билинейная* $a(u,v)$ *и линейная* $\mathfrak{L}$ *формы заданы соотношениями* (22) *и* (23) *соответственно. Тогда задача* (24) *однозначно слабо разрешима и справедлива оценка*

$$\|u\|_V^2\leqslant c,\quad c>0-\mathrm{const}.\tag{36}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из представления (22) билинейной формы $a(u,v)$, учитывая соотношение (21), вытекает, что

$$a(u,u)=\int\limits_{\Im}\sum_{i\,j\,k\,m=1}^{3}a_{i\,j\,k\,m}(x)\varepsilon_{k\,m}(u)\varepsilon_{i\,j}(u)dx\geqslant c_0\|u\|_H^2,\quad c_0>0-\mathrm{const},$$

для произвольного элемента $u\in\left(\tilde V_0^1(\Im)\right)^3$, где через $\|u\|_H^2$ обозначено

$$\|u\|_H^2=\int\limits_{\Im}\sum_{i\,j=1}^{3}\varepsilon_{i\,j}^2(u)dx.\tag{37}$$

Исходя из неравенства (30) и в силу следствия 2 теоремы 2, можно показать, что выражение (37) задает норму $\|\cdot\|_H$ в пространстве $V=\left(\tilde V_0^1(\Im)\right)^3$, эквивалентную введенной в п. 5. Это вытекает из неравенства

$$\int\limits_{\Im}\sum_{i,j=1}^{3}(\varepsilon_{i,j}(u))^2dx+\sum_{i=1}^{3}\|u_i\|^2_{L_2(\Im)}\leqslant\alpha\|u\|_V$$

(здесь используется очевидное соотношение $(\theta+\vartheta)^2\leqslant2(\theta^2+\vartheta^2)$) и, учитывая неравенство (30),

$$\int\limits_{\Im}\sum_{i,j=1}^{3}(\varepsilon_{i,j}(u))^2dx+\sum_{i=1}^{3}\|u_i\|^2_{L_2(\Im)}\geqslant\beta\|u\|_V^2\quad\forall u\in V,$$

с положительными постоянными α, β.

Доказательство завершает использование теоремы Лакса—Мильграма [1, с. 31]: из существования на $V \times V$ билинейной формы $a(u, v)$ со свойствами непрерывности и коэрцитивности вытекает существование единственного слабого решения задачи (24) и справедлива оценка (36). $\square$

8. Оптимальное управление деформациями слоистой композиционной среды. Пусть слоистая композиционная среда $\Im$ не может иметь жестких смещений, т. е. смещений без деформаций. Это означает, что элементы пространства состояний V удовлетворяют условиям теорем 3 и 4. В частности, на практике краевым условиям могут соответствовать заделанные границы (аналоги защемленных краев пластинки), а также закрепленные границы по аналогии с представленными в описании пространства V. Внешнее распределенное воздействие (в приложениях — нагрузка) задается функцией $\varphi(x) := (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)) \in (L_2(\Im))^3$ и определяется выражением

$$(\varphi, \eta) = \int_{\Im} \varphi(x)\eta(x)dx, \tag{38}$$

где $\eta(x) = (\eta_1(x), \eta_2(x), \eta_3(x)) \in (L_2(\Im))^3$ (возможны выражения, отличные от (38)), например, $\varphi(x) = F(x)$, как это представлено в (23).

Одной из важнейших характеристик композиционного изделия является вес, от которого зависят расход материала, идущего на его изготовление, а также некоторые его эксплуатационные свойства. Вес изделия определяется соотношением

$$J = \int_{\Im} \theta(x)dx = \sum_{j=0}^{N} \int_{\Im_j} \theta_j(x)dx, \tag{39}$$

в котором $\theta(x) = \{\theta_j(x),\ j = 0, 1, ..., N\}$, $\theta_j(x)$ — удельный вес (плотность) слоя $\Im_j$. Ввиду особой важности веса во многих задачах управления соотношение (39) выступает в качестве функционала цели (минимизируемого функционала) либо входит в множество допустимых управлений как одно из ограничений.

Могут накладываться ограничения и на векторную функцию $u = \{u_1, u_2, u_3\} \in \left(W_2^1(\Im)\right)^3$ перемещений точек композиционной среды:

$$\left| \int_{\Im_j} u(x)dx \right| \leqslant \vartheta_j, \ \ j = 0, 1, ..., N. \tag{40}$$

Управлением могут быть функции, характеризующие толщину слоев, а также функция, определяющая внешнюю нагрузку на композиционную среду изделия. В последующих рассуждениях внешняя нагрузка φ рассматривается в качестве управляющего воздействия.

Весьма важными являются ограничения по прочности, обуславливающиеся зависящим от внешней нагрузки φ и перемещений $u := u(\varphi)$ функционалом $\Psi(\varphi, u(\varphi))$, наделенным определенным свойством. Как обобщенный критерий ограничений по прочности для многих анизотропных материалов используется функционал [9]

$$\Psi(\varphi, u(\varphi)) = \sum_{i,k} \Pi_{ik}\sigma_{ik} + \left(\sum_{i,k,m,n} \Pi_{ikmn}\sigma_{ik}\sigma_{mn} \right)^{1/2} - 1 \leqslant 0, \tag{41}$$

здесь Π_{ik} и Π_{ikmn} — заданные компоненты тензора прочности, которые предполагаются непрерывными по совокупности своих переменных.

Будем считать, что для функционала Ψ имеет место следующее свойство: *φ, $u \to \Psi$ является непрерывным отображением в топологии, порожденной произведением* $(L_2(\Im))^3 \times \left(\tilde{V}_0^1(\Im)\right)^3$.

Замечание 5. Во многих случаях ограничения по прочности должны выполняться в каждой точке слоистой области $\Im$, а значит, чтобы соотношение (41) имело смысл, напряжения $\sigma \in L_2(\Im)$ для этого необходимо усреднить (регуляризировать). Операция усреднения законна, с одной стороны, в силу того, что при этом полученное из (41) соотношение имеет смысл, а с другой — в самом физическом понятии напряжения в точке заложено некоторое усреднение. В этой связи можно использовать интегральные ограничения по прочности и требовать выполнения неравенства (41) в интегральном смысле в некоторых достаточно малых окрестностях области $\Im$.

Теперь можно рассматривать различные задачи оптимизации слоистых композиционных материалов и в качестве управления выступает функция $f(x)$, определяющая внешнюю распределенную в области $\Im$ нагрузку на композиционное изделие (в задаче оптимизации управление будем обозначать через $\varphi(x)$). Для упрощения выкладок ограничения по весу не учитываются.

Введем оператор наблюдения Φ, который определяется посредством линейного оператора $C : (\tilde{V}_0^1(\Im))^3 \to (L_2(\Im))^3$ соотношением $\Phi u := Cu$, и сформируем множество управлений $U_\partial \in (L_2(\Im))^3$ следующим образом:

$$\begin{gathered} U_\partial = \{\varphi :\ \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in (L_2(\Im))^3 :\ \ \varphi_* \leqslant \varphi_i(x) \leqslant \varphi^*,\ i = 1, 2, 3, \\ \Psi(\varphi, u(\varphi)) \leqslant 0,\ u(\varphi) = (u_1(\varphi), u_2(\varphi), u_3(\varphi)) \in (\tilde{V}_0^1(\Im))^3\}, \end{gathered} \tag{42}$$

где φ_*, φ^* — фиксированные постоянные.

Пусть выполнены условия теорем 3 и 4. Тогда для $\varphi \in U_\partial$ существует единственная функция $u(\varphi) = u(x; \varphi)$ такая, что

$$a(u(\varphi), \eta) = (\varphi, \eta) \quad \forall \eta(x) \in (\tilde{V}_0^1(\Im))^3.$$

В качестве функционала цели (минимизируемого функционала) используется выражение

$$J(\varphi) = \int\limits_{\Im} (Cu(x; \varphi) - z(x))^2\, dx + (N\varphi, \varphi)|_{(L_2(\Im))^3}, \tag{43}$$

где $z(x) = (z_j(x), j = 0, 1, ..., N)$, функция $z_j(x)$ — фиксированная (заданная) деформация слоя $\Im_j$.

Задача оптимального управления напряженно-деформированными состояниями композиционной среды *при выполнении условий* (40) *сводится к отысканию внешнего воздействия φ_0 такого, что*

$$J(\varphi_0) = \inf_{\varphi \in U_\partial} J(\varphi). \tag{44}$$

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теорем 3 и 4, непустое множество U_∂ допустимых управлений φ и функционал цели $J(\varphi)$ задаются выражениями* (42) *и* (43) *соответственно. Тогда существует решение задачи* (44).

Доказательство. Пусть $\{\varphi_n\}$ — минимизирующая последовательность

$$\varphi_n = (\varphi_{1,n}, \varphi_{2,n}, \varphi_{3,n}) \in U_\partial,\ \ J(\varphi_n) \downarrow \inf_{\varphi \in U_\partial} J(\varphi).$$

Из соотношений (42), представляющих множество управлений U_∂, следует, что из последовательности $\{\varphi_n\}$ при условии непрерывности отображения $\varphi \to J(\varphi)$ можно выделить подпоследовательность $\{\varphi'_n\}$, слабо сходящую в $(L_2(\Im))^3$ к функции φ'. Нетрудно убедиться, что функция $\varphi_0 = \varphi'$ является решением задачи оптимального управления (44).

Теорема доказана. □

9. Заключение. Охарактеризованы описания структуры композиционной среды, основные свойства пространств функций с носителем в слоистой области для математического описания и анализа краевых задач процессов деформации сложноструктурированных сплошных сред. В работе изучены упругие свойства композиционной среды, формируется задача о напряженно-деформированном состоянии среды, для которой строится пространство допустимых решений, удовлетворяющих соотношениям, описывающим законы перемещения точек в местах примыкания слоев, и устанавливаются условия слабой разрешимости этой задачи. Результаты п. 4 можно эффективно использовать при решении задач оптимального управления, представленных в [10–13]. Результаты п. 6, 7 распространяются на более общие, чем представления компонентов тензорных функций деформаций (18) и напряжений (17) — основополагающих в анализе различного типа задач оптимизации деформируемых композиционных материалов.

Литература

1. *Литвинов В. Г.* Оптимизация в эллиптических граничных задачах с приложениями к механике. М.: Наука, 1987. 368 с.

2. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике / пер. с фр. С. Ю. Прищепионка, Т. Н. Рожковской. М.: Наука, 1989. 384 с.

3. *Zhabko A. P., Karelin V. V., Provotorov V. V., Sergeev S. M.* Optimal control of thermal and wave processes in composite materials // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2023. Т. 19. Вып. 3. С. 403–418. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.303

4. *Zhabko A. P., Shindyapin A. I., Provotorov V. V.* Stability of weak solutions of parabolic systems with distributed parameters on the graph // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2019. Т. 15. Вып. 4. С. 457–471. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2019.404

5. *Провоторов В. В., Сергеев С. М.* Математическое моделирование физических процессов в композиционных средах // Вестник российских университетов. Математика. 2024. Т. 29. Вып. 146. С. 188–203.

6. *Lax P. D., Milgram N.* Parabolic equations. Contributions to the theory of partial differential // Ann. Math. Studies. 1954. Vol. 33. P. 167–190.

7. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975. 480 с.

8. *Hlavacek I., Necas J.* On inequalities of Korn's type // Arch. Rat. Mech. and Anal. 1970. Vol. 36. N 4. P. 305–334.

9. *Гольденблат И. И., Копнов В. А.* Критерий прочности и пластичности конструкционных материалов. М.: Машиностроение, 1968. 192 с.

10. *Golosnoy A. S., Provotorov V. V., Sergeev S. M., Raikhelgauz L. B., Kravets O. Ja.* Software engineering math for network applications // Journal of Physics: Conference Series. 2019. Vol. 1399. N 4. Art. N 044047. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1399/4/044047

11. *Baranovskii E. S., Artemov M. A., Provotorov V. V., Zhabko A. P.* Non-isothermal creeping flows in a pipeline network: Existence results // Symmetry. 2021. Vol. 13. N 7. Art. ID 1300. https://doi.org/10.3390/sym13071300

12. *Zhabko A. P., Provotorov V. V., Shindyapin A. I.* Optimal control of a differential-difference parabolic system with distributed parameters on the graph // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2021. Т. 17. Вып. 4. С. 433–448. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.411

13. *Алфутов Н. А., Болотин В. В., Васильев В. В., Протасов В. Д., Тарнопольский Ю. М., Царахов Ю. С.* Композиционные материалы: Справочник. М.: Машиностроение, 1990. 512 с.

Статья поступила в редакцию 6 августа 2024 г.
Статья принята к печати 4 октября 2024 г.

Контактная информация:

Жабко Алексей Петрович — д-р физ.-мат. наук, проф.; https://orcid.org/0000-0002-6379-0682, zhabko.apmath.spbu@mail.ru

Провоторов Вячеслав Васильевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; https://orcid.org/0000-0001-8761-7174, wwprov@mail.ru

Игонина Елена Викторовна — канд. физ.-мат. наук, доц.; https://orcid.org/0000-0002-7369-6219, elenaigonina7@mail.ru

Сергеев Сергей Михайлович — канд. техн. наук, доц.; https://orcid.org/0000-0003-0195-4589, sergeev2@yandex.ru

Optimal control of the stress-deformed states of a composite layered medium

A. P. Zhabko[1], *V. V. Provotorov*[2], *E. V. Igonina*[3], *S. M. Sergeev*[4]

[1] St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation
[2] Voronezh State University, 1, Universitetskaja pl., Voronezh, 394006, Russian Federation
[3] Yelets State University, 28, Kommunarov ul., Yelets, 399770, Russian Federation
[4] Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, 29, Politehnicheskaya ul., St. Petersburg, 195251, Russian Federation

For citation: Zhabko A. P., Provotorov V. V., Igonina E. V., Sergeev S. M. Optimal control of stress-deformed states of a composite layered medium. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2024, vol. 20, iss. 4, pp. 534–549. https://doi.org/10.21638/spbu10.2024.408 (In Russian)

The proposed study considers the compositional medium, which is a set of a finite number of volumetric layers with clearly defined surfaces of mutual adjacency. The mathematical description of such a medium is carried out by means of a layered domain, which defines a model of a layered elastic compositional medium in three-dimensional Euclidean space. Functions describing the quantitative characteristics of the material of the compositional medium belong to the class of bounded summable functions that have generalized derivatives and are elements of Sobolev space. At the same time, the following hypothesis is adopted: the elements of the surfaces of mutual adjoining layers are not subject to tension and compression during deformation (bending) (analogous to one of the well-known Kirchhoff hypotheses). The work consists of three parts: the first part presents a mathematical description of a layered medium with the terminology of layered domains, classical function spaces with a carrier in these domains, a description of phenomena near the surfaces of adjoining layers of a compositional medium; the second part is devoted to the description of deformations of the compositional medium and contains the formulation of the problem of the stress-deformed state of the compositional layered medium in a weak formulation, the definitions of auxiliary spaces and the classical statements used to analyze the problem, sufficient conditions for the weak solvability of the boundary value problem are established; the third (main) part is devoted to solving the problem of optimal distributed control of stress-deformed states of a compositional layered medium. The results of the study can be effectively used to solve the problems of optimal control of deformation processes of complexly structured continuous media. At the same time, the approaches used to analyze boundary value problems of continuum mechanics extend to more general representations of the components of the tensor function of deformations, which means that they can significantly expand the possibilities of analyzing more general problems of optimizing deformable composite materials.

Keywords: stress-deformed state of composite materials, boundary value problem in the layered domain, weak solvability, optimal control of deformations the layered composite.

References

1. Litvinov V. G. *Optimizatsiya v ellipticheskih granichnih zadachah s prilozeniiami k mehanike* [*Optimization in elliptic boundary problems with applications in mechanics*]. Moscow, Nauka Publ., 1987, 368 p. (In Russian)

2. Duvaut G., Lions J.-L. *Neravenstva v mehanike i fizike* [*Les inequations en mecanique et en physique*]. Moscow, Nauka Publ., 1989, 384 p. (In Russian)

3. Zhabko A. P., Karelin V. V., Provotorov V. V., Sergeev S. M. Optimal control of thermal and wave processes in composite materials. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2023, vol. 19, iss. 3, pp. 403–418. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.303

4. Zhabko A. P., Shindyapin A. I., Provotorov V. V. Stability of weak solutions of parabolic systems with distributed parameters on the graph. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2019, vol. 15, iss. 4, pp. 457–471. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2019.404

5. Provotorov V. V., Sergeev S. M. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskih protsessov v kompozitsionnih sredah [Mathematical modeling of physical processes in composite media]. *Russian Universities Reports. Mathematics*, 2024, vol. 29, iss. 146, pp. 188–203. (In Russian)

6. Lax P. D., Milgram N. Parabolic equations. Contributions to the theory of partial differential. *Ann. Math. Studies*, 1954, vol. 33, pp. 167–190.

7. Besov O. V., Il'in V. P., Nikol'skii S. M. *Integral'nie predstavleniia funktsii i teoremi vlozheniia* [*Integral representations of functions and embedding theorems*]. Moscow, Nauka Publ., 1975, 480 p. (In Russian)

8. Hlavacek I., Necas J. On inequalities of Korn's type. *Arch. Rat. Mech. and Anal.*, 1970, vol. 36, no. 4, pp. 305–334.

9. Gol'denblat I. I., Kopnov V. A. *Kriterii prochnosti i plastichnosti konstruktsionnih materialov* [*Criterion of strength and plasticity of structural materials*]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1968, 192 p. (In Russian)

10. Golosnoy A. S., Provotorov V. V., Sergeev S. M., Raikhelgauz L. B., Kravets O. Ja. Software engineering math for network applications. *Journal of Physics: Conference Series*, 2019, vol. 1399, no. 4, art. ID 044047. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1399/4/044047

11. Baranovskii E. S., Artemov M. A., Provotorov V. V., Zhabko A. P. Non-isothermal creeping flows in a pipeline network: Existence results. *Symmetry*, 2021, vol. 13, no. 7, art. ID 1300. https://doi.org/10.3390/sym13071300

12. Zhabko A. P., Provotorov V. V., Shindyapin A. I. Optimal control of a differential-difference parabolic system with distributed parameters on the graph. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2021, vol. 17, iss. 4, pp. 433–448. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.411

13. Alfutov N. A., Bolotin V. V., Vasil'ev V. V., Protasov V. D., Tarnopol'skii Ju. M., Carahov Ju. S. *Kompozicionnie materiali.* Spravochnik [*Composite materials.* Handbook]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1990, 512 p. (In Russian)

Received: August 6, 2024.
Accepted: October 4, 2024.

Authors' information:

Aleksei P. Zhabko — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; https://orcid.org/0000-0002-6379-0682, a.zhabko@spbu.ru

Vyacheslav V. Provorotov — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; https://orcid.org/0000-0001-8761-7174, wwprov@mail.ru

Elena V. Igonina — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor; https://orcid.org/0000-0002-7369-6219, elenaigonina7@mail.ru

Sergey M. Sergeev — PhD in Engineering, Associate Professor; https://orcid.org/0000-0003-0195-4589, sergeev2@yandex.ru