УДК 519.62, 519.622
MSC 65L05, 65L06

Прямой метод интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка*

И. В. Олемской, А. С. Еремин, А. В. Матросов

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Олемской И. В., Еремин А. С., Матросов А. В.* Прямой метод интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2024. Т. 20. Вып. 3. С. 324–334. https://doi.org/10.21638/spbu10.2024.302

Статья посвящена разработке экономичного явного метода численного интегрирования систем структурно разделенных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Приведена общая схема метода, алгоритмически учитывающая выделенные структурные особенности рассматриваемой системы. Для описываемого вложенного явного одношагового семиэтапного метода использование технологии FSAL позволило построить шестиэтапный метод с оценкой *контрольного члена* погрешности. Проведено численное тестирование и представлены результаты сравнительного анализа эффективности работы предложенного метода с наиболее популярным методом Дорманда — Принса 5(4)7F.

Ключевые слова: методы Рунге — Кутты, уравнения второго порядка, структурные особенности системы, шестой порядок.

1. Введение. В [1–4] для *полной канонической формы* структурно разделенной системы g обыкновенных дифференциальных уравнений

$$y_0' = f_0(t, y_0, ..., y_n), \tag{1}$$

$$y_i' = f_i(t, y_0, ..., y_{i-1}, y_{l+1}, ..., y_n), \qquad i = 1, ..., l, \tag{2}$$

$$y_j' = f_j(t, y_0, ..., y_{j-1}), \qquad j = l+1, ..., n, \tag{3}$$

где $t \in [T_0, T_k] \subset \mathbb{R}$, $y_s : [T_0, T_k] \longrightarrow \mathbb{R}^{r_s}$, $s = 0, ..., n$,

$$f_0 : [T_0, T_k] \times \mathbb{R}^{g} \longrightarrow \mathbb{R}^{r_0}, \qquad g = \sum_{s=0}^{n} r_s,$$

$$f_i : [T_0, T_k] \times \mathbb{R}^{g-\hat{r}_i} \longrightarrow \mathbb{R}^{r_i}, \quad \hat{r}_i = \sum_{s=i}^{l} r_s, \quad i = 1, ..., l,$$

$$f_j : [T_0, T_k] \times \mathbb{R}^{g-\hat{r}_j} \longrightarrow \mathbb{R}^{r_j}, \quad \hat{r}_j = \sum_{s=j}^{n} r_s, \quad j = l+1, ..., n,$$

представлены экономичные явные одношаговые методы численного интегрирования.

Две группы уравнений (2), (3) структурно тождественны. Уравнения в этих группах расположены в определенном порядке: правая часть любого из них не зависит

* Работа А. С. Еремина поддержана грантом Российского научного фонда № 23-21-00027, https://rscf.ru/project/23-21-00027/

от искомых функций, поведение которых описывается этим и всеми последующими уравнениями этой же группы. Группа уравнений (1), в которую вошли все уравнения, не имеющие структурных особенностей указанного выше типа, называется *общей*. Она, как и группа уравнений (2), может отсутствовать. Такие системы нередко рассматриваются в задачах описания движения материальных объектов, например, в небесной механике или физике высоких энергий.

В [5, 6] представлен алгоритм приведения произвольных систем обыкновенных дифференциальных уравнений $\Psi'_k = \varphi_k(t, ..., \dots, \Psi_g)$, $k = 1, ..., g$, к виду (1)–(3), а в работах [2, 3] предложено обобщение явного метода Рунге — Кутты, алгоритмически использующее выделенные структурные особенности для построения экономичных методов интегрирования систем (1)–(3).

Эффективность методов [7–12] интегрирования систем (1)–(3) определяется тем, что для общей группы уравнений (1) численное интегрирование по соотношению порядка метода (q) и минимально возможного числа этапов (m) тождественно методам Рунге — Кутты ($m > q$, $q \geqslant 5$), а для структурно выраженных групп уравнений (2), (3) предложенная модификация дает возможность уменьшить число этапов при сохранении порядка метода. При этом в случае отсутствия общей группы уравнений такое уменьшение еще более значительно. Например, метод пятого порядка [7, 8] получен не за шесть этапов, а за четыре, а метод шестого порядка — за шесть вместо семи [9–12].

В основе описываемого расширения лежит алгоритмическое использование выделенных структурных особенностей. Для полной канонической формы системы (1)–(3), содержащей общую группу уравнений, рассматриваются алгоритмы [9–12] построения шестипараметрического семейства экономичных методов шестого порядка, семиэтапных по общей группе и шестиэтапных по структурно разделенным.

В работе [12] для полной канонической формы системы (1)–(3) (содержащей общую группу уравнений) построено семейство экономичных вложенных методов шестого порядка, семиэтапных по общей группе и шестиэтапных по выделенным структурно разделенным группам (2), (3) с использованием технологии FSAL оценки контрольного члена.

Здесь для структурно разделенных систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{cases} x'' = F(t, x, y, y'), \\ y'' = G(t, x, y, x'), \end{cases} \tag{4}$$

$t \in [T_0, T_k] \subset \mathbb{R}$, $x : [T_0, T_k] \longrightarrow \mathbb{R}^{r_1}$, $y : [T_0, T_k] \longrightarrow \mathbb{R}^{r_2}$, $F : [T_0, T_k] \times \mathbb{R}^{r_1+2r_2} \longrightarrow \mathbb{R}^{r_1}$, $G : [T_0, T_k] \times \mathbb{R}^{2r_1+r_2} \longrightarrow \mathbb{R}^{r_2}$, на основе метода RKS6(4)[8,7,7]F, представленного в [12], построен экономичный шестиэтапный явный одношаговый метод шестого порядка с автоматическим выбором шага прямого интегрирования системы (4).

Уравнения системы (4) структурно тождественны. Правая часть каждого из них не зависит от первой производной искомой функции, поведение которой описывается этим уравнением.

Рассматриваемая система (4), приведенная заменой $\psi_1 = y$, $\psi_2 = x'$, $\psi_3 = x$, $\psi_4 = y'$ к нормальной форме систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, может быть рассмотрена как система (1)–(3), не содержащая общую группу (1). Применение для ее интегрирования метода RKS6(4)[8,7,7]F из [12] и последующее сведение расчетной схемы к алгоритмически простому виду позволили построить вычислительную схему шестиэтапного метода шестого порядка прямого интегрирования системы (4).

2. Метод интегрирования. Полагаем достаточно гладкими правые части рассматриваемой системы (4) и $r_i = 1,\ i = 1, 2$. Считаем, что в некоторой точке $t \in [T_0, T_k]$ известно ее точное решение $\big(x(t), y(t), x'(t), y'(t)\big)$. Ищем два приближения к точному решению $\big(x(t+h), y(t+h), x'(t+h), y'(t+h)\big)$ в точке $t+h \in [T_0, T_k]$: $\big(X, Y, X', Y'\big)$ шестого порядка и $\big(\hat{X}, \hat{Y}, \hat{X}', \hat{Y}'\big)$ — четвертого. Их компоненты имеют вид

$$
\begin{aligned}
&X = x(t) + h\, x'(t) + h^2 \sum_{s=1}^{6} D_s^1 K_s^1, && X' = x'(t) + h \sum_{s=1}^{6} Q_s^1 K_s^1,\\
&Y = y(t) + h\, y'(t) + h^2 \sum_{s=1}^{6} D_s^2 K_s^2, && Y' = y'(t) + h \sum_{s=1}^{6} Q_s^2 K_s^2,\\
&\hat{X} = x(t) + h\, x'(t) + h^2 \sum_{s=1}^{7} \hat{D}_s^1 K_s^1, && \hat{X}' = x'(t) + h \sum_{s=1}^{7} \hat{Q}_s^1 K_s^1,\\
&\hat{Y} = y(t) + h\, y'(t) + h^2 \sum_{s=1}^{7} \hat{D}_s^2 K_s^2, && \hat{Y}' = y'(t) + h \sum_{s=1}^{7} \hat{Q}_s^2 K_s^2,\\
&x(t+h) = X + O(h^7) = \hat{X} + O(h^5), && y(t+h) = Y + O(h^7) = \hat{Y} + O(h^5),\\
&x'(t+h) = X' + O(h^7) = \hat{X}' + O(h^5), && y'(t+h) = Y' + O(h^7) = \hat{Y}' + O(h^5),
\end{aligned}
\tag{5}
$$

где функции K_s^1 и K_s^2 из соображений явности вычисляются в строгом порядке K_1^1, K_1^2, K_2^1, K_2^2, ..., K_7^1, K_7^2 по правилам

$$
\begin{aligned}
K_s^1 = F\Big(t + C_s^1 h,\ & x + C_s^1 h x' + h^2 \sum_{\nu=1}^{s-1} A_{s,\nu}^{11} K_\nu^1,\\
& y + C_s^1 h y' + h^2 \sum_{\nu=1}^{s-1} A_{s,\nu}^{12} K_\nu^2,\ y' + h \sum_{\nu=1}^{s-1} B_{s,\nu}^{12} K_\nu^2\Big),\\
K_s^2 = G\Big(t + C_s^2 h,\ & x + C_s^2 h x' + h^2 \sum_{\nu=1}^{s} A_{s,\nu}^{21} K_\nu^1,\\
& y + C_s^2 h y' + h^2 \sum_{\nu=1}^{s-1} A_{s,\nu}^{22} K_\nu^2,\ x' + h \sum_{\nu=1}^{s} B_{s,\nu}^{21} K_\nu^1\Big).
\end{aligned}
$$

Здесь h — шаг интегрирования. Значения параметров $A_{p,\nu}^{11}$, $A_{p,\nu}^{12}$, $A_{p,\nu}^{21}$, $A_{p,\nu}^{22}$, $B_{p,\nu}^{12}$, $B_{p,\nu}^{21}$, D_s^1, D_s^2, $\hat{D}_s^1$, $\hat{D}_s^2$, Q_s^1, Q_s^2, $\hat{Q}_s^1$, $\hat{Q}_s^2$ представлены в табл. 1.

Полученное приближение шестого порядка принимаем в качестве искомого, если выполняется неравенство

$$
\|E\| = \sqrt{E_x^2 + E_{x'}^2 + E_y^2 + E_{y'}^2} \leqslant \mathrm{tol}. \tag{6}
$$

Здесь E — *контрольный член*, входящие в него $E_x = |X - \hat{X}|$, $E_{x'} = |X' - \hat{X}'|$, $E_y = |Y - \hat{Y}|$, $E_{y'} = |Y' - \hat{Y}'|$ — это оценки двух последних членов разложения решения в ряд Тейлора, учтенных в приближенном решении шестого порядка, а величина tol — допуск на максимальное значение контрольного члена.

Метод (5), (6) по способу получения приближения и оценки его качества можно отнести к классу методов Егорова—Дорманда—Принса [13, 14]. При практической

Таблица 1. **Метод SRK6(4)7F интегрирования системы** (4)

C_s^1	$A_{s,\nu}^{11}$						$A_{s,\nu}^{12}$					
0	0						0					
$\frac{1}{5}$	0						$\frac{1}{50}$					
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$					$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$				
$\frac{3}{10}$	$\frac{19}{800}$	$\frac{61}{2400}$	$-\frac{1}{240}$				$\frac{191}{8000}$	$\frac{67}{3200}$	$\frac{3}{16000}$			
$\frac{8}{11}$	$\frac{14350}{131769}$	$-\frac{7922}{131769}$	$-\frac{15196}{131769}$	$\frac{43616}{131769}$			$-\frac{34016}{483153}$	$\frac{956885}{483153}$	$\frac{768413}{805255}$	$-\frac{2093568}{805255}$		
1	$-\frac{124}{747}$	$\frac{551}{2988}$	$\frac{20378}{21663}$	$-\frac{22624}{35109}$	$\frac{83853}{452516}$		$-\frac{1819}{4980}$	$\frac{8975}{996}$	$\frac{3991}{830}$	$-\frac{5376}{415}$	0	
1	$\frac{23}{288}$	0	$\frac{25}{348}$	$\frac{100}{423}$	$\frac{14641}{130848}$	0	$\frac{13}{160}$	0	$\frac{27}{260}$	$\frac{64}{315}$	$\frac{14641}{131040}$	0
C_s^2	$A_{s,\nu}^{21}$						$A_{s,\nu}^{22}$					
0	0						0					
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$					$\frac{1}{50}$					
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	0				$\frac{1}{54}$	$\frac{1}{27}$				
$\frac{1}{4}$	$\frac{239}{13824}$	$\frac{59}{3072}$	$-\frac{55}{9216}$	$\frac{5}{6912}$			$\frac{161}{7680}$	$\frac{31}{3072}$	$\frac{1}{5120}$			
$\frac{8}{11}$	$\frac{60979}{1581228}$	$-\frac{2668}{43923}$	$\frac{61100}{347391}$	$\frac{1711840}{18579429}$	$\frac{12285}{659692}$		$-\frac{166432}{2415765}$	$\frac{957302}{483153}$	$\frac{769574}{805255}$	$-\frac{419328}{161051}$		
1	$\frac{7055}{38448}$	$\frac{199}{1068}$	$-\frac{11755}{23229}$	$\frac{61400}{112941}$	$\frac{179685}{1940912}$	0	$-\frac{983}{2670}$	$\frac{2405}{267}$	$\frac{2138}{445}$	$-\frac{1152}{89}$	0	
1	$\frac{23}{288}$	0	$\frac{25}{348}$	$\frac{100}{423}$	$\frac{14641}{130848}$	0	$\frac{13}{160}$	0	$\frac{27}{260}$	$\frac{64}{315}$	$\frac{14641}{131040}$	0

C_s^1	$B_{s,\nu}^{12}$						D_s^1	Q_s^1	$\hat{D}_s^1$	$\hat{Q}_s^1$
0	0						$\frac{23}{288}$	$\frac{23}{288}$	$\frac{343}{3456}$	$\frac{1}{12}$
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$						0	0	0	0
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$					$\frac{25}{348}$	$\frac{125}{1392}$	$-\frac{185}{5568}$	$\frac{25}{348}$
$\frac{3}{10}$	$\frac{27}{400}$	$\frac{39}{160}$	$-\frac{9}{800}$				$\frac{100}{423}$	$\frac{1000}{2961}$	$\frac{5995}{17766}$	$\frac{50}{141}$
$\frac{8}{11}$	$-\frac{47852}{73205}$	$\frac{195970}{14641}$	$\frac{516954}{73205}$	$-\frac{1395712}{73205}$			$\frac{14641}{130848}$	$\frac{161051}{392544}$	$\frac{422411}{4710528}$	$\frac{6655}{16356}$
1	$\frac{1601}{415}$	$-\frac{11255}{166}$	$-\frac{36555}{1079}$	$\frac{40448}{415}$	$\frac{14641}{10790}$		0	$\frac{83}{1008}$	$\frac{83}{12096}$	0
1	$\frac{13}{160}$	0	$\frac{81}{520}$	$\frac{256}{945}$	$\frac{161051}{393120}$	$\frac{89}{1080}$	0	0	0	$\frac{1}{12}$
C_s^2	$B_{s,\nu}^{21}$						D_s^2	Q_s^2	$\hat{D}_s^2$	$\hat{Q}_s^2$
0	0						$\frac{13}{160}$	$\frac{13}{160}$	$-\frac{4817}{21120}$	$\frac{1}{12}$
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$					0	0	$\frac{975}{176}$	0
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{18}$	$-\frac{5}{54}$	$\frac{10}{27}$				$\frac{27}{260}$	$\frac{81}{520}$	$\frac{65947}{22880}$	$\frac{9}{52}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{49}{576}$	$\frac{5}{128}$	$\frac{55}{384}$	$-\frac{5}{288}$			$\frac{64}{315}$	$\frac{256}{945}$	$-\frac{241216}{31185}$	$\frac{16}{63}$
$\frac{8}{11}$	$\frac{329}{2178}$	$\frac{20}{1331}$	$-\frac{40240}{115797}$	$\frac{39520}{51183}$	$\frac{4095}{29986}$		$\frac{14641}{131040}$	$\frac{161051}{393120}$	$\frac{161051}{4717440}$	$\frac{1331}{3276}$
1	$-\frac{1067}{6408}$	$-\frac{5}{178}$	$\frac{11060}{7743}$	$-\frac{34360}{37647}$	$\frac{658845}{970456}$		0	$\frac{89}{1080}$	$\frac{89}{12960}$	0
1	$\frac{23}{288}$	0	$\frac{125}{1392}$	$\frac{1000}{2961}$	$\frac{161051}{392544}$	$\frac{83}{1008}$	0	0	0	$\frac{1}{12}$

реализации методов этого типа регулируют величину $\|E\|/(h{\cdot}\mathrm{tol})$ контрольного члена, отнесенную к единичному шагу интегрирования, который обеспечивает ее ограниченность заданным допуском. Метод считается надежным, если он с этим справляется.

Управляющим параметром такого регулирования является шаг интегрирования

$$h_{\mathrm{new}} = 0.9h\left(\frac{\mathrm{tol}}{\|E\|}\right)^{\frac{1}{5}}. \tag{7}$$

При выполнении ограничения (6) результат вычисления производных на последней стадии K_7^1, K_7^2 может снова использоваться на следующем шаге (так называемый подход FSAL — First same as last). Это дополнительно повышает его эффективность.

Предложенный метод (5)–(7) будем в дальнейшем обозначать SRK6(4)7F. Аббревиатура отражает то, что он явный структурно ориентированный (S), принадлежит к семейству методов Рунге—Кутты (RK), имеет основной шестой порядок и «оценщик» четвертого (6(4)). Формально являясь семиэтапным (7), он применяет подход FSAL (F), что практически делает его шестиэтапным.

3. Сравнительное тестирование. Для проведения сравнительного тестирования метода SRK6(4)7F в качестве оппонента использовалась вложенная пара методов Дорманда—Принса пятого и четвертого порядков — DP5(4)7F [15]. Выбор связан с тем, что они одного типа по способу получения приближения к решению и регулирования величины шага [13–15], и к тому же имеют один и тот же порядок контрольных членов. Отметим, что метод DP5(4)7F можно назвать одним из стандартов явных методов решения нежестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Например, процедура `ode45` в Matlab является его реализацией.

Тестирование метода прямого интегрирования SRKS6(4)7F проводилось на решении двух задач. На всех рисунках результаты для метода DP5(4)7F показаны штриховыми линиями и обозначены *1*, а для метода SRK6(4)7F — непрерывной линией и обозначены *2*.

3.1. Модельная система. Рассматривается линейная задача

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 3\dot{y} + 2x, \\ \ddot{y} &= -3\dot{x} + 2y \end{aligned} \tag{8}$$

с начальными условиями $x(0) = \dot{y}(0) = 1$, $\dot{x}(0) = y(0) = 0$, имеющая общее решение

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 \cos t + C_2 \sin t + C_3 \cos 2t + C_4 \sin 2t, \\ y(t) &= -C_1 \sin t + C_2 \cos t - C_3 \sin 2t + C_4 \cos 2t. \end{aligned}$$

Численное интегрирование и сравнительное тестирование проводились на интервале $t \in [0, 2\pi]$ по трем критериям качества алгоритма: надежность, точность, объем вычислений. Результаты тестирования по критериям точность и объем вычислений представлены в табл. 2 и на рис. 1 при различных допусках на значение контрольного члена ($\mathrm{tol} = 10^k$, $k = -15, ..., -9$). Использованы обозначения: N_f — число вычислений правых частей системы (8), N_h — число принятых шагов интегрирования, N_d — число отвергнутых шагов интегрирования, $\|R\|$ — норма полной погрешности.

Проверка надежности используемого алгоритма выбора шага интегрирования (рис. 2), основанного на регулировании контрольного члена $\|E\|$, сводилась к контролю значений двух функций $\delta(t)$ и $\xi(t)$ на каждом шаге:

$$\delta_{j+1} = \frac{\|E_{j+1}\|}{h_j \cdot \mathrm{tol}}, \quad \xi_{j+1} = \frac{\|l_{j+1}\|}{\|E_{j+1}\|},$$

где $\|l_{j+1}\|$ и $\|E_{j+1}\|$ — нормы истинной локальной погрешности и контрольного члена на шаге h_j (рис. 3, 4).

Таблица 2. **Результаты сравнительного тестирования на системе** (8)

tol	SRK6(4)7F				DP5(4)7F			
	N_h	N_d	N_f	$-\lg\|R\|$	N_h	N_d	N_f	$-\lg\|R\|$
10^{-6}	48	5	636	5.8546	66	4	840	5.2883
10^{-7}	74	4	936	6.9842	102	0	1224	6.2808
10^{-8}	115	1	1392	8.1513	162	0	1944	7.2849
10^{-9}	181	0	2172	9.3442	255	0	3060	8.2870
10^{-10}	286	0	3432	10.5431	404	0	4848	9.2875
10^{-11}	454	1	5460	11.7427	639	1	7680	10.2875
10^{-12}	719	1	8640	12.9425	1013	1	12168	11.2876
10^{-13}	1139	1	13680	14.1425	1606	1	19272	12.2876
10^{-14}	1805	2	21684	15.3424	2544	1	30540	13.2875
10^{-15}	2860	2	34344	16.5425	4032	2	48408	14.2876

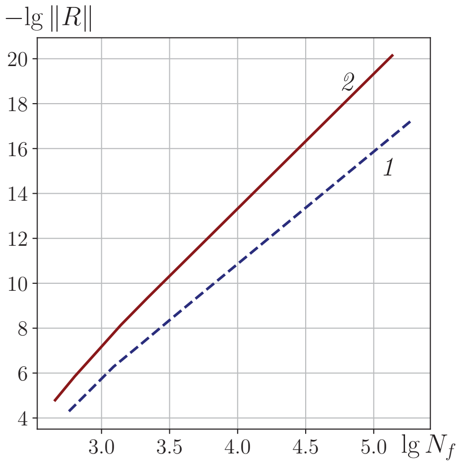

Рис. 1. Зависимость полной погрешности R от общего числа N_f вычислений правых частей при решении системы (8)

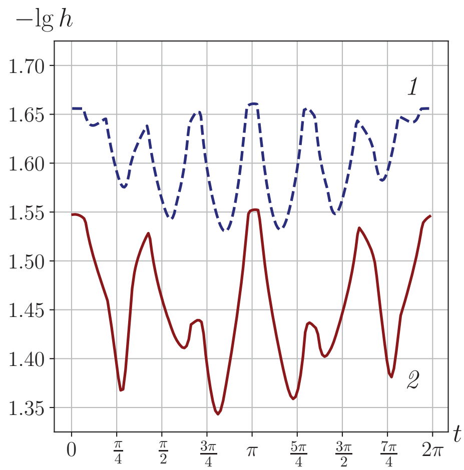

Рис. 2. Изменение шага интегрирования h при решении системы (8) с $\mathrm{tol} = 10^{-9}$

3.2. Орбиты Аренсторфа. В качестве второй тестовой задачи использовалась плоская ограниченная задача трех тел. Плоское движение космического аппарата (КА) с координатами (x_1, x_2) в гравитационном поле, создаваемом Землей $(0, 0)$ и Луной $(1, 0)$, описывается [8] системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= x_1 + 2\dot{x}_2 - \mu' \frac{x_1 + \mu}{D_1} - \mu \frac{x_1 - \mu'}{D_2}, \\ \ddot{x}_2 &= x_2 - 2\dot{x}_1 - \mu' \frac{x_2}{D_1} - \mu \frac{x_2}{D_2}, \end{aligned} \tag{9}$$

где $D_1 = ((x_1 + \mu)^2 + x_2^2)^{3/2}$; $D_2 = ((x_1 - \mu')^2 + x_2^2)^{3/2}$; $\mu = 0.012277471$; $\mu' = 1 - \mu$. При начальных условиях

$$x_1(0) = 0.994, \quad x_1(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = 0, \quad \dot{x}_2(0) = -2.00158510637908252240537862224$$

КА движется по орбите с периодом $T_{\rm per} = 17.0652165601579625588917206249$.

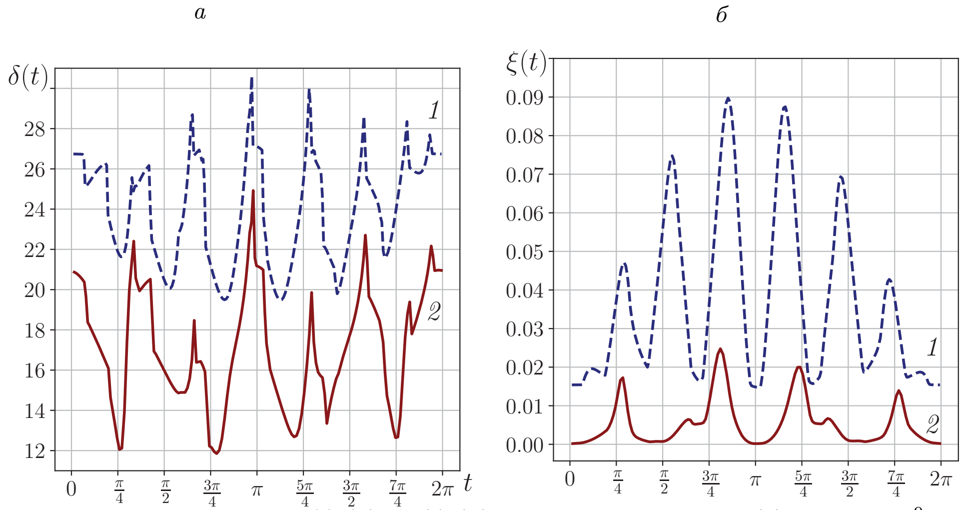

Рис. 3. Значения функций $\delta(t)$ (*а*) и $\xi(t)$ (*б*) при решении системы (8) с $\mathrm{tol} = 10^{-9}$

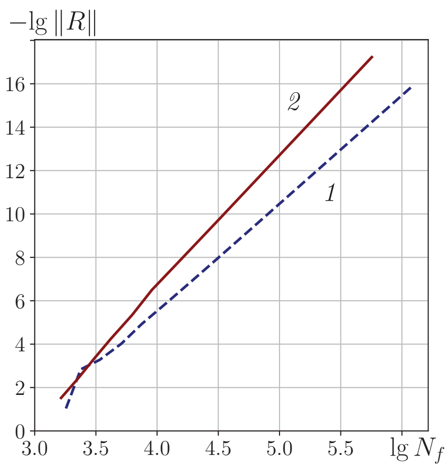

Рис. 4. Зависимость полной погрешности R от общего числа N_f вычислений правых частей при решении системы (9)

Результаты сравнительного тестирования по критерию «общее количество вычислений правых частей системы (9) / глобальная погрешность» при $\mathrm{tol} = 10^k$, $k = -19, ..., -5$, представлены на рис. 4.

На рис. 5 и 6 для тестируемых методов при $\mathrm{tol} = 10^{-9}$ приведены графики поведения функций величины шага $h(t)$ интегрирования системы (9) и регулирующих их функций $\delta(t)$.

Анализ результатов сравнительного тестирования подтверждает:

1) заявленный порядок методов;

2) надежность (при автоматическом выборе шага интегрирования);

3) преимущество метода SRK6(4)7F по всем рассмотренным критериям перед методом DP5(4)7F в рассмотренном точностном диапазоне.

Таким образом, алгоритмическое использование структурных особенностей поз-

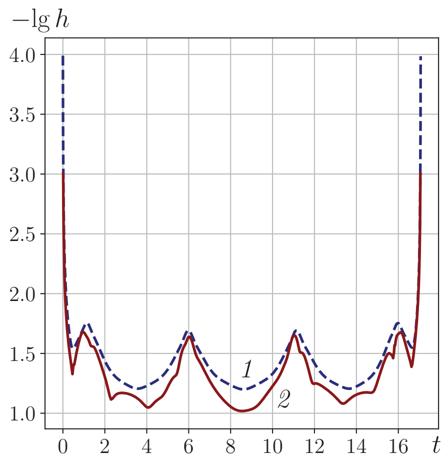

Рис. 5. Изменение шага интегрирования h при решении системы (9) с $\mathrm{tol} = 10^{-9}$

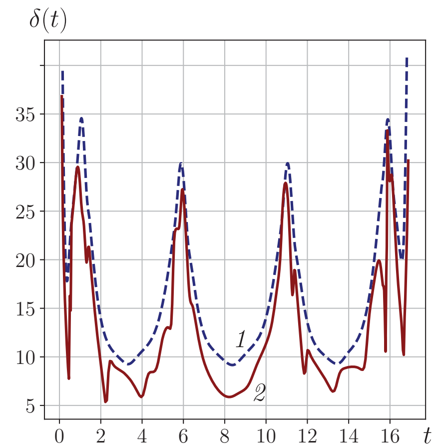

Рис. 6. Значения функции $\delta(t)$ при решении системы (9) с $\mathrm{tol} = 10^{-9}$

волило построить экономичный явный одношаговый метод шестого порядка с автоматическим выбором шага прямого интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, правая часть которых специальным образом зависит от первых производных искомого решения.

4. Заключение. Представленный в работе метод при тех же затратах на шаге, что и широко применяемый метод Дорманда — Принса пятого порядка точности, дает приближение шестого порядка для задач рассмотренного вида. Это позволяет получать бóльшую точность при тех же затратах на единицу длины и, как следствие, при тех же требованиях на точность совершать более длинные шаги, что снижает общие вычислительные затраты. Несмотря на различие между точностью основного метода и оценщика на два порядка, тестовые задачи подтверждают не только заявленное преимущество метода по соотношению «затраты — точность», но и надежность алгоритма управления длиной шага на основе выполняемой оценки контрольного члена в асимптотическом разложении решения. Дальнейшие исследования предполагают рассмотрение более полных систем уравнений второго порядка, которые будут иметь *общую* группу в представлении (1)–(3), и построение для них прямых решателей на основе структурного подхода.

Литература

1. *Олемской И. В.* Структурный подход в задаче конструирования явных одношаговых методов // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2003. Т. 43. № 7. С. 918–931.

2. *Олемской И. В.* Методы интегрирования систем структурно разделенных дифференциальных уравнений. СПб.: Изд-во Санкт-Петербургского университета, 2009. 180 с.

3. *Еремин А. С., Олемской И. В.* Вложенный метод интегрирования систем структурно разделенных обыкновенных дифференциальных уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2010. Т. 50. № 3. С. 434–448.

4. *Олемской И. В., Коврижных Н. А., Фирюлина О. С.* Двухпараметрическое семейство методов шестого порядка интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2019. Т. 15. Вып. 4. С. 502–517. https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2019.407

5. *Олемской И. В.* Алгоритм выделения структурных особенностей // Николай Ефимович Кирин: сб. ст.; под ред. В. В. Жука, В. Ф. Кузютина. СПб.: Научно-исследовательский институт химии Санкт-Петербургского государственного университета, 2003. С. 224–250.

6. *Олемской И. В.* Модификация алгоритма выделения структурных особенностей // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2006. Вып. 2. С. 55–64.

7. *Олемской И. В.* Четырехэтапный метод пятого порядка численного интегрирования систем специального вида // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2002. Т. 42. № 8. С. 1135–1145.

8. *Олемской И. В.* Вложенный метод пятого порядка типа Дормана — Принса // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2005. Т. 45. № 7. С. 1140–1150.

9. *Олемской И. В., Коврижных Н. А.* Семейство шестиэтапных методов шестого порядка // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2018. Т. 14. Вып. 3. С. 215–229. https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2018.303

10. *Eremin A. S., Kovrizhnykh N.A., Olemskoy I. V.* An explicit one-step multischeme sixth order method for systems of special structure // Applied Mathematics and Computation. 2019. Vol. 347. P. 853–864.

11. *Olemskoy I. V., Eremin A. S.* Algorithm of construction of effective explicit methods for structurally partitioned systems of ordinary differential equations // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2021. Т. 17. Вып. 4. С. 353–369. https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2021.404

12. *Олемской И. В., Еремин А. С., Фирюлина О. С.* Девятипараметрическое семейство вложенных методов шестого порядка // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2023. Т. 19. Вып. 4. С. 449–468. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.403

13. *Арушанян О. Б., Залеткин С. Ф.* Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на Фортране. М.: Изд-во Московского государственного университета, 1990. 336 с.

14. *Hairer E., Nørsett S. P., Wanner G.* Solving ordinary differential equations. I: Nonstiff problems. 2nd ed., 3rd corr. print. Heidelberg; Berlin: Springer-Verlag, 2008. 528 p.

15. *Dormand J. R., Prince P. J.* A family of embedded Runge — Kutta formulae // Journal of Computational and Applied Mathematics. 1980. Vol. 6. Iss. 1. P. 19–26.

Статья поступила в редакцию 16 мая 2024 г.
Статья принята к печати 25 июня 2024 г.

Контактная информация:

Олемской Игорь Владимирович — д-р физ.-мат. наук, проф.; https://orcid.org/0000-0001-8897-9898, i.olemskoj@spbu.ru

Еремин Алексей Сергеевич — канд. физ.-мат. наук, доц.; https://orcid.org/0000-0001-8196-8256, a.eremin@spbu.ru

Матросов Александр Васильевич — д-р физ.-мат. наук, доц.; https://orcid.org/0000-0003-2140-5210, a.matrosov@spbu.ru

Direct method for solving systems of second order ordinary differential equations*

I. V. Olemskoy, A. S. Eremin, A. V. Matrosov

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg,
199034, Russian Federation

For citation: Olemskoy I. V., Eremin A. S., Matrosov A. V. Direct method for solving systems of second order ordinary differential equations. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2024, vol. 20, iss. 3, pp. 324–334. https://doi.org/10.21638/spbu10.2024.302 (In Russian)

* The A. S. Eremin's work is supported by the Russian Science Foundation, project N 23-21-00027, https://rscf.ru/project/23-21-00027/

In the paper a direct solver for systems of structurally partitioned second order differential equations is proposed. a general scheme of the method algorithmically oriented towards the particular structure of the system is presented. With the last stage reuse (also known as FSAL approach) an embedded pair of sixth and fourth order methods with just six stages is constructed, which provides an easy step-size control. Numerical comparison is made with the well-known Dormand — Prince method 5(4)7F having the same computation cost, showing the advantage of the proposed method.

Keywords: Runge — Kutta methods, second order equations, structurall partitioned system, sixth order.

References

1. Olemskoy I. V. Strukturnyi podkhod v zadache konstruirovaniia iavnykh odnoshagovykh metodov [Structural approach to the design of explicit one-stage methods]. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2003, vol. 43, iss. 7, pp. 918–931. (In Russian)

2. Olemskoy I. V. *Metody integrirovaniia sistem strukturno razdelennykh differentsial'nykh uravnenii* [*Integration of structurally partitioned systems of ordinary differential equations*]. St. Petersburg, St. Petersburg University Press, 2009, 180 p. (In Russian)

3. Eremin A. S., Olemskoy I. V. Vlozhennyi metod integrirovaniia sistem strukturno razdelennykh obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii [An embedded method for integrating systems of structurally separated ordinary differential equations]. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2010, vol. 50, iss. 3, pp. 434–448. (In Russian)

4. Olemskoy I. V., Kovrizhnykh N. A., Firyulina O. S. Dvukhparametricheskoe semeistvo metodov shestogo poriadka integrirovaniia sistem obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii [Two-parametric family of sixth order numerical methods for solving systems of ordinary differential equations]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2019, vol. 15, iss. 4, pp. 502–517. https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2019.407 (In Russian)

5. Olemskoy I. V. Algoritm vydeleniia strukturnykh osobennostei [An algorithm for finding the structural properties]. *Nikolai Efimovich Kirin.* Papers dedicated to the memory. Eds: V. V. Zhuk, V. F. Kuzutin. St. Petersburg, Research Institute of Chemistry of St. Petersburg State University Press, 2003, pp. 224–250. (In Russian)

6. Olemskoy I. V. Modifikatsiia algoritma vydeleniia strukturnykh osobennostei [Updating of algorithm of allocation structural features]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 10. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2006, iss. 2, pp. 55–64. (In Russian)

7. Olemskoy I. V. Chetyrekhetapnyi metod piatogo poriadka chislennogo integrirovaniia sistem spetsial'nogo vida [Fifth-order four-stage method for numerical integration of special systems]. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2002, vol. 42, iss. 8, pp. 1135–1145. (In Russian)

8. Olemskoy I. V. Vlozhennyi metod piatogo poriadka tipa Dormana — Prinsa [A fifth-order five-stage embedded method of the Dormand — Prince type]. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2005, vol. 45, iss. 7, pp. 1140–1150. (In Russian)

9. Olemskoy I. V., Kovrizhnykh N. A. Semeistvo shestietapnykh metodov shestogo poriadka [A family of sixth-order methods with six stages]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2018, vol. 14, iss. 3, pp. 215–229. https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2018.303 (In Russian)

10. Eremin A. S., Kovrizhnykh N. A., Olemskoy I. V. An explicit one-step multischeme sixth order method for systems of special structure. *Applied Mathematics and Computation*, 2019, vol. 347, pp. 853–864.

11. Olemskoy I. V., Eremin A. S. Algorithm of construction of effective explicit methods for structurally partitioned systems of ordinary differential equations. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2021, vol. 17, iss. 4, pp. 353–369. https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2021.404

12. Olemskoy I. V., Eremin A. S., Firyulina O. S. Deviatiparametricheskoe semeistvo vlozhennykh metodov shestogo poriadka [A nine-parametric family of embedded methods of sixth order]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2023, vol. 19, iss. 4, pp. 449–468. https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2023.403 (In Russian)

13. Arushanyan O. B., Zaletkin S. F. *Chislennoe reshenie obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii na Fortrane* [*Numerical solution of ordinary differential equations with Fortran*]. Moscow, Moscow University Press, 1990, 336 p. (In Russian)

14. Hairer E., Nørsett S. P., Wanner G. *Solving ordinary differential equations. I: Nonstiff problems.* 2nd ed., 3rd corr. print. Heidelberg, Berlin, Springer-Verlag, 2008, 528 p.

15. Dormand J. R., Prince P. J. a family of embedded Runge — Kutta formulae. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1980, vol. 6, iss. 1, pp. 19–26.

Received: May 16, 2024.
Accepted: June 25, 2024.

Authors' information:

Igor V. Olemskoy — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; https://orcid.org/0000-0001-8897-9898, i.olemskoj@spbu.ru

Alexey S. Eremin — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor; https://orcid.org/0000-0001-8196-8256, a.eremin@spbu.ru

Alexander V. Matrosov — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Associate Professor; https://orcid.org/0000-0003-2140-5210, a.matrosov@spbu.ru