

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519.635.1, 519.635.4
MSC 35C11

Математическое моделирование изгиба защемленной по контуру тонкой ортотропной пластины*

О. В. Гермидер, В. Н. Попов

Северный (Арктический) федеральный университет им. М. В. Ломоносова,
Российская Федерация, 163002, Архангельск, наб. Северной Двины, 17

Для цитирования: Гермидер О. В., Попов В. Н. Математическое моделирование изгиба защемленной по контуру тонкой ортотропной пластины // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2024. Т. 20. Вып. 3. С. 310–323. <https://doi.org/10.21638/spbu10.2024.301>

В рамках теории Кирхгофа предложен новый подход к построению решения задачи моделирования изгиба защемленной по контуру тонкой прямоугольной ортотропной пластины, которая находится под действием нормально распределенной по ее поверхности нагрузки. Решение неоднородного бигармонического уравнения для ортотропной пластины получено в виде частичной суммы двойного ряда по многочленам Чебышёва первого рода. Для нахождения коэффициентов в этом разложении краевая задача методом коллокации сведена к системе линейных алгебраических уравнений в матричной форме с применением свойств этих многочленов. На основе матричных и дифференциальных преобразований получены выражения изгибающих моментов и перерезывающих сил. Представлены результаты вычислений изгиба срединной поверхности пластины при различном действии нагрузки на пластину, которые демонстрируют эффективность предложенного подхода.

Ключевые слова: метод коллокации, бигармоническое уравнение, многочлены Чебышёва первого рода, изгиб тонкой ортотропной пластины.

1. Введение. Моделирование изгиба тонких прямоугольных ортотропных и изотропных пластин, согласно теории Кирхгофа [1], приводит к решению дифференциальных уравнений в частных производных, получение аналитического решения которых возможно только для ограниченного круга задач. Численные методы решения таких уравнений разрабатываются уже достаточно давно, однако вопрос об оптимальном методе с точки зрения скорости сходимости и достоверности полученных результатов остается открытым. Так, в [2] предложен и реализован вариант метода

* Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00381, <https://rscf.ru/project/24-21-00381/>

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2024

коллокаций и наименьших невязок для расчета напряженно-деформированного состояния изотропных прямоугольных пластин, в том числе пластин, находящихся на упругом основании, под действием поперечных нагрузок различного вида. В [3] на основе hp-варианта этого метода с интегральными коллокациями осуществлено численное моделирование изгиба шарнирно закрепленной изотропной пластины, проведен анализ сходимости полученных решений. В [4] для решения задачи о моделировании изгиба защемленной по всем четырём сторонам квадратной ортотропной пластины, находящейся под воздействием нормальной равномерно распределенной по ее поверхности нагрузки, использован метод начальных функций, который позволил представить компоненты напряженно-деформированного состояния пластины в виде линейной комбинации компонентов, определенных на одной из сторон пластины. В [5] для исследования изгиба ортотропных прямоугольных тонких пластин, подвергнутых равномерной нагрузке, гидростатическому давлению и центральной сосредоточенной нагрузке, применено интегральное преобразование с функциями специального вида, в [6, 7] — разложение в двойной ряд Фурье. В [8] метод коллокации и наименьших невязок использован для расчета компонент тензора напряжений и прогиба пластин, состоящих из ортотропных слоев, направления ортотропии которых являются произвольными, в рамках теорий Кирхгофа — Лява, Тимошенко и теории ломанной линии Григolloка — Куликова. В [9] рассмотрены краевые задачи о равновесии пластины Кирхгофа — Лява, содержащей тонкое жесткое включение, с некоэрцитивными краевыми условиями, установлены необходимые и достаточные условия разрешимости. В [10] предложен метод статического анализа пластины Кирхгофа под действием равномерно распределенной поперечной нагрузки. В [11] с применением теории градиента микроструктурной деформации создана модифицированная модель изгиба пластины Кирхгофа — Лява. В [12] построены асимптотические разложения собственных чисел и функций задачи Дирихле для пластины Кирхгофа с защемленными краями с использованием бигармонического оператора, где главные члены асимптотически определены из задачи Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. В [13] исследована деформация длинной пластины Кирхгофа с быстроосциллирующей границей. Моделирование прогиба выполнено с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого и второго порядков, рассмотрены точечные опоры (условия Соболева), конфигурация которых существенно влияет на результат осреднения бигармонического уравнения. В [14] изучена краевая задача Соболева — Неймана для бигармонического уравнения, описывающая изгиб пластины Кирхгофа со свободной кромкой, но закрепленной в двух шеренгах точек. В [15] осуществлен анализ распределения изгибающих моментов и перерезывающих сил изотропной прямоугольной пластины в окрестностях угловых точек. В этой работе подчеркивается актуальность проведения исследований по применению различных систем полиномов при аппроксимации решений краевых задач теории упругости, обозначена проблема строгого удовлетворения граничным условиям.

В настоящей работе в рамках теории Кирхгофа для решения задачи моделирования изгиба защемленной по контуру тонкой ортотропной прямоугольной пластины, находящейся под воздействием нормально распределенной нагрузки по ее поверхности, предлагается новый подход, основанный на разложении решения неоднородного бигармонического уравнения для ортотропной пластины по многочленам Чебышёва. Новизна предлагаемого подхода заключается в том, что для нахождения коэффициентов в этом разложении используются свойства многочленов Чебышёва, бинарные операции над матрицами, явное представление матрицы дифференцирования для

данных многочленов. Выбор в качестве узлов коллокации корней таких многочленов позволяет с малой чувствительностью по отношению к вычислительной погрешности находить значения коэффициентов в разложении, а полученное представление искомой функции в этом случае приближается к многочлену наилучшего равномерного приближения [16]. В результате для соответствующей дискретной задачи метода коллокации составлена переопределенная система линейных алгебраических уравнений в матричной форме, обеспечивающая выполнение граничных условий для решения рассматриваемого бигармонического уравнения в выбранных узлах и согласование значений искомой функции на границе между соседними узлами. Записаны выражения изгибающих моментов и перерезывающих сил на основе построенного решения. Представлены результаты вычислений максимального изгиба срединной поверхности пластины, изгибающих моментов и перерезывающих сил. Выполнен их анализ и осуществлена визуализация распределений этих величин. Показано, что в малых окрестностях угловых точек значения изгибающих моментов и перерезывающих сил приближаются к нулю.

2. Постановка задачи. Рассмотрим задачу моделирования изгиба тонкой ортотропной прямоугольной пластины ($0 \leq x \leq d_1$, $0 \leq y \leq d_2$, $-h/2 \leq z \leq h/2$) под действием поперечной нагрузки $q(x, y)$ на основе гипотез Кирхгофа. Предположим, что материал пластины в отношении своих упругих свойств обладает тремя плоскостями симметрии, тогда дифференциальное уравнение в частных производных для нахождения изгиба срединной поверхности пластины $\omega(x, y)$ запишем следующим образом [1]:

$$D_x \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = q, \quad (1)$$

где $D_x = E'_x h^3/12$; $D_y = E'_y h^3/12$; $H = D_1 + 2D_{xy}$; $D_1 = E'' h^3/12$; $D_{xy} = Gh^3/12$; E'_x , E'_y , E'' , G — упругие постоянные; h — толщина пластины. Для D_x , D_y и D_1 имеют место соотношения [6, 17] $D_1 = \nu_2 D_x = \nu_1 D_y$, в которых ν_1 , ν_2 — коэффициенты Пуассона.

В случае изотропии $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, $D_1 = \nu D_x$, $D_{xy} = (1 - \nu)D/2$, $D_x = D_y = D$ и $H = D$ [6]. Здесь $D = Eh^3/(12(1 - \nu^2))$ — цилиндрическая жесткость пластины, E — модуль Юнга [1].

Граничные условия для защемленной по контуру пластины имеют вид [1]

$$\omega = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0, \quad x = 0, d_1, \quad (2)$$

$$\omega = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0, \quad y = 0, d_2. \quad (3)$$

Изгибающие моменты и перерезывающие силы определяем в соответствии с [1] через $\omega(x, y)$:

$$M_x = -D_x \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - D_1 \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}, \quad M_y = -D_1 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - D_y \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2},$$

$$Q_x = -\frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + H \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right), \quad Q_y = -\frac{\partial}{\partial y} \left(H \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right).$$

Следуя [1, 4], введем безразмерные величины физических параметров, обозначив их как *: $x = x^* d_1$, $y = y^* d_1$, $q = q_0 q^*$, $\omega = \frac{\omega^* q_0 d_1^4}{D_x}$, $M_x = M_x^* q_0 d_1^2$, $M_y = M_y^* q_0 d_1^2$, $Q_x = Q_x^* q_0 d_1$ и $Q_y = Q_y^* q_0 d_1$.

Уравнение (1) и граничные условия (2) и (3) в новых переменных примут вид

$$\frac{\partial^4 \omega^*}{\partial x^{*4}} + \frac{2H}{D_x} \frac{\partial^4 \omega^*}{\partial x^{*2} \partial y^{*2}} + \frac{D_y}{D_x} \frac{\partial^4 \omega^*}{\partial y^{*4}} = q^*, \quad (4)$$

$$\omega^* = 0, \quad \frac{\partial \omega^*}{\partial x^*} = 0, \quad x^* = 0, 1, \quad (5)$$

$$\omega^* = 0, \quad \frac{\partial \omega^*}{\partial y^*} = 0, \quad y^* = 0, d_2^*, \quad d_2^* = \frac{d_2}{d_1}. \quad (6)$$

Построим решение краевой задачи (4)–(6) методом коллокации, используя полиномы Чебышёва первого рода и их корни в качестве точек коллокации.

3. Построение решения задачи. Полиномы Чебышёва первого рода образуют ортогональную систему функций на отрезке $[-1, 1]$ и определяются, согласно [16], следующим образом:

$$T_j(t) = \cos(j \arccos t), \quad t \in [-1, 1], \quad j \geq 0. \quad (7)$$

Для них имеют место рекуррентные соотношения [16]

$$T_0(t) = 1, \quad T_1(t) = t, \quad T_{j+1}(t) = 2tT_j(t) - T_{j-1}(t), \quad j \geq 1. \quad (8)$$

Для представления функции $\omega^*(x^*, y^*)$, где $x^* \in [0, 1]$ и $y^* \in [0, d_2^*]$, как частичной суммы двойного ряда по полиномам Чебышёва введем переменные $x_i \in [-1, 1]$ ($i = 1, 2$): $x_1 = 2x^* - 1$, $x_2 = \frac{2}{d_2^*} y^* - 1$.

Запишем краевую задачу (4)–(6) в переменных x_1 и x_2 :

$$\kappa_1 \frac{\partial^4 \omega^*}{\partial x_1^4} + \kappa_2 \frac{\partial^4 \omega^*}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \kappa_3 \frac{\partial^4 \omega^*}{\partial x_2^4} = q^*, \quad (9)$$

$$\omega^* = 0, \quad \kappa_4 \frac{\partial \omega^*}{\partial x_1} = 0, \quad x_1 = -1, 1, \quad (10)$$

$$\omega^* = 0, \quad \kappa_5 \frac{\partial \omega^*}{\partial x_2} = 0, \quad x_2 = -1, 1, \quad (11)$$

где $\kappa_1 = 16$; $\kappa_2 = \frac{32H}{D_x d_2^{*2}}$; $\kappa_3 = \frac{16D_y}{D_x d_2^{*4}}$; $\kappa_4 = 2$; $\kappa_5 = \frac{2}{d_2^*}$.

Представим ω^* в виде частичной суммы двойного ряда по полиномам Чебышёва первого рода:

$$\omega^*(x_1, x_2) = \sum_{\substack{k_i=0 \\ i=1,2}}^{n_i} a_{k_1 k_2} T_{k_1}(x_1) T_{k_2}(x_2) = (\mathbf{T}_1(x_1) \otimes \mathbf{T}_2(x_2)) \mathbf{A}. \quad (12)$$

В (12) вектор-строка $\mathbf{T}_i(x_i) = (T_0(x_i) T_1(x_i) \dots T_{n_i-1}(x_i) T_{n_i}(x_i))$ имеет размерность n'_i ($n'_i = n_i + 1$, $i = 1, 2$), элементами искомого вектор-столбца \mathbf{A} размерностью $n'_1 n'_2$ являются коэффициенты $a_{k_1 k_2}$: $\mathbf{A} = (a_{00} a_{01} \dots a_{n_1 n_2-1} a_{n_1 n_2})^T$, знак \otimes используется для обозначения тензорного произведения Кронекера двух матриц [18].

В качестве точек коллокации в (9) для переменных x_1 и x_2 выберем нули многочленов T_{n_1+1} и T_{n_2+1} соответственно:

$$x_{i,k_i} = \cos\left(\frac{\pi(2n_i - 2k_i + 1)}{2(n_i + 1)}\right), \quad k_i = \overline{0, n_i}, \quad i = 1, 2. \quad (13)$$

Подставив (13) в (7), получим, что

$$T_{j_i}(x_{i,k_i}) = \cos\left(\frac{\pi j_i(2n_i - 2k_i + 1)}{2(n_i + 1)}\right), \quad j_i, k_i = \overline{0, n_i}, \quad i = 1, 2. \quad (14)$$

Производную $\mathbf{T}_i(x_i)$ по переменной x_i запишем в виде произведения $\mathbf{T}_i \mathbf{J}_i$ в соответствии с равенством [19, 20]

$$\frac{dT_{j_i}}{dx_i} = j_i \sum_{\substack{k_i=0 \\ j_i+k_i-\text{неч.}}}^{j_i-1} c_{k_i} T_{k_i}(x_i), \quad j_i \geq 1,$$

в котором $c_0 = 1$ и $c_{k_i} = 2$ ($k_i > 0$), а \mathbf{J}_i — верхнетреугольная матрица с ненулевыми элементами $J_{i,0j_i} = j_i$ (j_i — нечетное, $j_i = \overline{1, n_i}$) и $J_{i,k_i j_i} = 2j_i$ ($j_i - k_i > 0$ и $j_i + k_i$ — нечетное, $j_i, k_i = \overline{1, n_i}$, $i = 1, 2$). Здесь и ниже нумерация строк и столбцов в матрицах начинается с нуля.

Для второй и четвертой производных $\mathbf{T}_i(x_i)$ по x_i соответственно находим, что

$$\frac{d^j \mathbf{T}_i}{dx_i^j} = \mathbf{T}_i \mathbf{J}_i^j, \quad j = 2, 4, \quad i = 1, 2. \quad (15)$$

Для выполнения граничных условий (10) и (11), согласно методу коллокации, из системы линейных алгебраических уравнений, которую получаем, подставляя точки коллокации (13) в уравнение (9), исключаем уравнения в точках $x_i = x_{i,0}$ и $x_i = x_{i,n_i}$, а на их месте записываем уравнения, соответствующие граничным условиям $\omega^*(\pm 1, x_{2,k_2}) = 0$ и $\omega^*(x_{1,k_1}, \pm 1) = 0$:

$$(\mathbf{T}_1(-1) \otimes \mathbf{T}_2(x_{2,k_2}))\mathbf{A} = 0, \quad (\mathbf{T}_1(1) \otimes \mathbf{T}_2(x_{2,k_2}))\mathbf{A} = 0, \quad k_2 = \overline{0, n_2}, \quad (16)$$

$$(\mathbf{T}_1(x_{1,k_1}) \otimes \mathbf{T}_2(-1))\mathbf{A} = 0, \quad (\mathbf{T}_1(x_{1,k_1}) \otimes \mathbf{T}_2(1))\mathbf{A} = 0, \quad k_1 = \overline{1, n_1 - 1}, \quad (17)$$

в точках $x_i = x_{i,1}$ и $x_i = x_{i,n_i-1}$ записываем уравнения, удовлетворяющие условиям $\frac{\partial \omega^*}{\partial x_i} \Big|_{x_i = \pm 1} = 0$ ($i = 1, 2$):

$$(\mathbf{T}_1(-1)\mathbf{J}_1 \otimes \mathbf{T}_2(x_{2,k_2}))\mathbf{A} = 0, \quad (\mathbf{T}_1(1)\mathbf{J}_1 \otimes \mathbf{T}_2(x_{2,k_2}))\mathbf{A} = 0, \quad k_2 = \overline{0, n_2}, \quad (18)$$

$$(\mathbf{T}_1(x_{1,k_1}) \otimes (\mathbf{T}_2(-1)\mathbf{J}_2))\mathbf{A} = 0, \quad (\mathbf{T}_1(x_{1,k_1}) \otimes (\mathbf{T}_2(1)\mathbf{J}_2))\mathbf{A} = 0, \quad k_1 = \overline{1, n_1 - 1}. \quad (19)$$

В результате, используя (8), (12)–(19), получаем, что

$$\mathbf{B}\mathbf{A} = \mathbf{F}, \quad \mathbf{B} = \sum_{m=1}^5 \mathbf{B}_m, \quad (20)$$

где \mathbf{B}_m ($m = \overline{1, 5}$) — квадратные матрицы размером $n'_1 n'_2 \times n'_1 n'_2$. Ненулевые строки \mathbf{B}_m ($m = \overline{1, 3}$) соответствуют уравнению (9) в точках (13): $\mathbf{B}_1 = \kappa_1 (\mathbf{G}'_1 \mathbf{J}_1^4) \otimes \mathbf{G}'_2$,

$\mathbf{B}_2 = \kappa_2 (\mathbf{G}_1'' \mathbf{J}_1^2) \otimes (\mathbf{G}_2'' \mathbf{J}_2^2)$, $\mathbf{B}_3 = \kappa_3 \mathbf{G}_1'' \otimes (\mathbf{G}_2'' \mathbf{J}_2^4)$, ненулевые строки матриц \mathbf{B}_4 и \mathbf{B}_5 — условиям (16)–(19): $\mathbf{B}_4 = \mathbf{G}_3 \otimes \mathbf{G}_2 + \mathbf{G}_1'' \otimes \mathbf{G}_4$, $\mathbf{B}_5 = \kappa_4 (\mathbf{G}_5 \mathbf{J}_1) \otimes \mathbf{G}_2 + \kappa_5 \mathbf{G}_1'' \otimes (\mathbf{G}_6 \mathbf{J}_2)$. Здесь \mathbf{G}_i ($i = 1, 2$) — квадратные матрицы размером $n'_i \times n'_i$, в которых k_i -е строки равны соответственно $\mathbf{T}_i(x_{i,k_i})$ ($k_i = \overline{0, n_i}$). Матрица \mathbf{G}_i'' получена из \mathbf{G}_i путем замены первых и последних двух строк в \mathbf{G}_i ($i = 1, 2$) на нулевые. Квадратные $n'_1 \times n'_1$ -матрицы \mathbf{G}_3 и \mathbf{G}_5 содержат только две ненулевые строки с элементами: $G_{3,0,j_1} = T_{1,j_1}(-1) = (-1)^{j_1}$, $G_{3,n_1,j_1} = T_{1,j_1}(1) = 1$, $G_{5,1,j_1} = T_{1,j_1}(-1) = (-1)^{j_1}$, $G_{5,n_1-1,j_1} = T_{1,j_1}(1) = 1$ ($j_1 = \overline{0, n_1}$). Ненулевые строки квадратных $n'_2 \times n'_2$ -матриц \mathbf{G}_4 и \mathbf{G}_6 определяются аналогично соответствующим строкам матриц \mathbf{G}_3 и \mathbf{G}_5 с использованием $\mathbf{T}_2(-1)$ и $\mathbf{T}_2(1)$, ненулевые элементы вектор-столбца $\mathbf{F} = (f_{00} f_{01} \dots f_{n_1 n_2})^T$ — через $f_{k_1 k_2} = q^*(x_{1,k_1}, x_{2,k_2})$, где $k_i = \overline{2, n_i - 2}$, $i = 1, 2$.

Элементы матрицы \mathbf{A} устанавливаем из уравнения (20). Функцию ω^* получаем, используя (12). Далее находим безразмерные изгибающие моменты и перерезывающие силы:

$$M_x^* = - \left(4 (\mathbf{T}_1 \mathbf{J}_1^2) \otimes \mathbf{T}_2 + \frac{4\nu_2}{d_2^{*2}} \mathbf{T}_1 \otimes (\mathbf{T}_2 \mathbf{J}_2^2) \right) \mathbf{A}, \quad (21)$$

$$M_y^* = - \left(4\nu_2 (\mathbf{T}_1 \mathbf{J}_1^2) \otimes \mathbf{T}_2 + \frac{4\nu_2}{\nu_1 d_2^{*2}} \mathbf{T}_1 \otimes (\mathbf{T}_2 \mathbf{J}_2^2) \right) \mathbf{A}, \quad (22)$$

$$Q_x^* = - \left(8 (\mathbf{T}_1 \mathbf{J}_1^3) \otimes \mathbf{T}_2 + \frac{8H}{d_2^{*2} D_x} (\mathbf{T}_1 \mathbf{J}_1) \otimes (\mathbf{T}_2 \mathbf{J}_2^2) \right) \mathbf{A}, \quad (23)$$

$$Q_y^* = - \left(\frac{8H}{d_2^{*2} D_x} (\mathbf{T}_1 \mathbf{J}_1^2) \otimes (\mathbf{T}_2 \mathbf{J}_2) + \frac{8\nu_2}{d_2^{*3} \nu_1} \mathbf{T}_1 \otimes (\mathbf{T}_2 \mathbf{J}_2^3) \right) \mathbf{A}. \quad (24)$$

4. Результаты вычислений и их анализ. В качестве примера рассмотрим задачу определения изгиба прямоугольной ортотропной пластины, находящейся под действием поперечной нагрузки, безразмерную величину которой получаем по выражению

$$q^*(x^*, y^*) = \cos(\pi(2x^* - 1)) \left(1 + \cos \left(\pi \left(\frac{2y^*}{d_2^*} - 1 \right) \right) \right) + \\ + \cos \left(\pi \left(\frac{2y^*}{d_2^*} - 1 \right) \right) \left(\frac{2H}{D_x d_2^{*2}} \cos(\pi(2x^* - 1)) + \frac{\nu_2}{\nu_1 d_2^{*4}} (1 + \cos(\pi(2x^* - 1))) \right). \quad (25)$$

В этом случае аналитическое решение краевой задачи (4)–(6) имеет вид

$$\omega^*(x^*, y^*) = \frac{1}{16\pi^4} (1 + \cos(\pi(2x^* - 1))) \left(1 + \cos \left(\pi \left(\frac{2y^*}{d_2^*} - 1 \right) \right) \right). \quad (26)$$

При проведении вычислений были использованы физические параметры из [1, 4], равные $E'_x = 131 \cdot 10^7$ кг/м², $E'_y = 42 \cdot 10^7$ кг/м², $E' = 5.1 \cdot 10^7$ кг/м², $G = 11.1 \cdot 10^7$ кг/м². В табл. 1 представлены результаты вычислений максимальных значений безразмерной величины прогиба ортотропной пластины ω^* , безразмерных изгибающих моментов M_x^* и M_y^* , перерезывающих сил Q_x^* и Q_y^* описанным методом (см. (21)–(24)) при $n_1 = n_2 = n$ и на основе аналитического решения (26) для отношений $d_2^* = \frac{d_2}{d_1}$ из [5, 6, 21]. При $n = 12$ отклонения построенного решения (12) от точного решения (26) по бесконечной норме не превышают $8.4 \cdot 10^{-9}$ для всех отношений $d_2^* = \frac{d_2}{d_1}$, приведенных в табл. 1. Отклонения полученного решения (12) между последовательными

итерациями $n - 1$ и n по бесконечной норме не превосходят $2.0 \cdot 10^{-7}$ при $n = 12$, при $n = 18$ они составляют $1.2 \cdot 10^{-14}$ и $6.1 \cdot 10^{-13}$. Распределения величин $\omega^*(x^*, y^*)$, $M_x^*(x^*, y^*)$ и $Q_y^*(x^*, y^*)$ при $d_2^* = 1$ и $n = 18$ показаны на рис. 1, А, 2, А и 3, А. Из рис. 2, А и 3, А видно, что значения M_y^* и Q_x^* в углах пластины равны нулю.

Таблица 1. Безразмерные значения прогиба $\omega^*(x^*, y^*)$ пластины, изгибающих моментов $M_x^*(x^*, y^*)$ и $M_y^*(x^*, y^*)$, перерезывающих сил $Q_x^*(x^*, y^*)$ и $Q_y^*(x^*, y^*)$ при действии $q^*(x^*, y^*)$ вида (25)

n	$\omega^*\left(\frac{1}{2}, \frac{d_2^*}{2}\right)$	$M_x^*\left(0, \frac{d_2^*}{2}\right)$	$M_y^*\left(\frac{1}{2}, 0\right)$	$Q_x^*\left(0, \frac{d_2^*}{2}\right)$	$Q_y^*\left(\frac{1}{2}, 0\right)$
$d_2^* = 0.5$					
9	0.00257196	-0.05165399	-0.06632725	0.03285759	0.08726688
12	0.00256650	-0.05066307	-0.06497263	0.00013852	0.00036197
15	0.00256650	-0.05066057	-0.06496928	-0.00000200	-0.00000523
18	0.00256650	-0.05066059	-0.06496931	0.00000000	0.00000000
(26)	0.00256650	-0.05066059	-0.06496931	0.00000000	0.00000000
$d_2^* = 1$					
9	0.00257186	-0.05171218	-0.01656597	0.03392743	0.01063111
12	0.00256650	-0.05066317	-0.01624313	0.00014095	0.00004466
15	0.00256650	-0.05066057	-0.01624232	-0.00000200	-0.00000065
18	0.00256650	-0.05066059	-0.01624233	0.00000000	0.00000000
(26)	0.00256650	-0.05066059	-0.01624233	0.00000000	0.00000000
$d_2^* = 1.5$					
9	0.00257228	-0.05173481	-0.007351354	0.000141417	0.00001288
12	0.00256650	-0.05066320	-0.00721915	0.00014095	0.00004466
15	0.00256650	-0.05066057	-0.00721881	-0.00000204	-0.00000019
18	0.00256650	-0.05066059	-0.00721881	0.00000000	0.00000000
(26)	0.00256650	-0.05066059	-0.00721881	0.00000000	0.00000000

Следуя [4], рассмотрим квадратную ортотропную пластину, находящуюся под действием постоянной поперечной нагрузки при значениях физических параметров, введенных выше. В этом случае $q^* = 1$ и $n_1 = n_2 = n$. В табл. 2 представлены результаты вычислений максимальных значений безразмерной величины прогиба квадратной ортотропной пластины ω^* , безразмерных изгибающих моментов M_x^* и M_y^* , перерезывающих сил Q_x^* и Q_y^* . При $n = 12$ в этом случае отклонение полученного решения (12) между последовательными итерациями $n - 1$ и n по бесконечной норме не превышает $1.5 \cdot 10^{-7}$. При $n = 18$ оно становится равным $2.7 \cdot 10^{-9}$. Для сравнения в табл. 3 приведены результаты из [4], где n — число членов экспоненциального ряда.

Распределения величин $\omega^*(x^*, y^*)$, $M_y^*(x^*, y^*)$ и $Q_y^*(x^*, y^*)$ при $n = 18$ иллюстрируют рис. 1, Б, 2, Б и 3, Б. Из рис. 2, Б и 3, Б видно, что значения M_y^* и Q_x^* в углах пластины равны нулю. В частности, в угловой точке $(0, 0)$ точность вычислений для M_y^* не менее $3.8 \cdot 10^{-15}$ и $6.5 \cdot 10^{-13}$ для Q_y^* . В [4] M_y^* и Q_y^* при удержании 500 членов экспоненциального ряда соответственно равны $-5.9 \cdot 10^{-10}$ и $2.5 \cdot 10^{-4}$. Максимальные значения M_y^* и Q_y^* достигаются на серединах сторон пластины, что согласуется с выводом, сделанным в [4].

Следуя [5, 6, 21], рассмотрим пластину, находящуюся под действием поперечной нагрузки, для которой $q^*(x^*, y^*) = x^*$, $\nu = \nu_1 = \nu_2 = 0.3$ и $D_{xy} = (1 - \nu)D/2$.

Таблица 2. Безразмерные значения прогиба $\omega^*(x^*, y^*)$ в центре квадратной пластины, изгибающих моментов $M_x^*(x^*, y^*)$ и $M_y^*(x^*, y^*)$, перерезывающих сил $Q_x^*(x^*, y^*)$ и $Q_y^*(x^*, y^*)$ в серединах ее краев при действии $q^*(x^*, y^*) = 1$

n	$\omega^*(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$M_x^*(0, \frac{1}{2})$	$M_y^*(\frac{1}{2}, 0)$	$Q_x^*(0, \frac{1}{2})$	$Q_y^*(\frac{1}{2}, 0)$
9	0.00225872	-0.07580865	-0.03295874	0.49301920	0.31054039
12	0.00225768	-0.07581385	-0.03275203	0.49425121	0.30416597
15	0.00225768	-0.07581554	-0.03275334	0.49437710	0.30411444
18	0.00225768	-0.07581435	-0.03275244	0.49427850	0.30403556

Таблица 3. Безразмерные значения прогиба $\omega^*(x^*, y^*)$ в центре квадратной пластины, изгибающих моментов $M_x^*(x^*, y^*)$ и $M_y^*(x^*, y^*)$, перерезывающих сил $Q_x^*(x^*, y^*)$ и $Q_y^*(x^*, y^*)$ в серединах ее краев при действии $q^*(x^*, y^*) = 1$ согласно результатам [4]

n	$\omega^*(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$M_x^*(0, \frac{1}{2})$	$M_y^*(\frac{1}{2}, 0)$	$Q_x^*(0, \frac{1}{2})$	$Q_y^*(\frac{1}{2}, 0)$
12	0.00225757	-0.07581233	-0.03234379	0.4938346	0.3118534
28	0.00225768	-0.07581435	-0.03273336	0.4942802	0.3046420
44	0.00225768	-0.07581438	-0.03275615	0.4942802	0.3047921
500	0.00225768	-0.07581438	-0.03275244	0.4942802	0.3040332

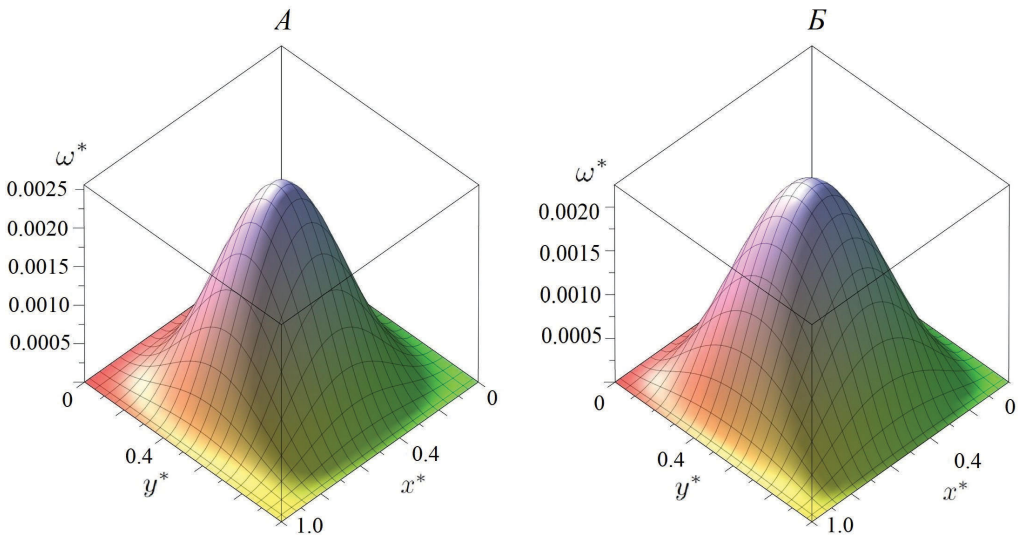


Рис. 1. Безразмерный изгиб срединной поверхности $\omega^*(x^*, y^*)$ ортотропной квадратной пластины при действии $q^*(x^*, y^*)$ вида (25) (А) и $q^*(x^*, y^*) = 1$ (Б)

В табл. 4 приведены результаты вычислений, согласно (12), безразмерных значений изгиба $\omega^*(x^*, y^*)$ в центре пластины при $n_1 = n_2 = n = 18$ для различных отношений $d_2^* = \frac{d_2}{d_1}$ по сравнению с результатами [1, 5, 6, 21], в табл. 5 — изгибающего момента $M_y^*(\frac{1}{2}, 0)$, вычисленного по (22) при $n_1 = n_2 = n = 18$, в сравнении с результатами [1, 6].

Распределения величин $\eta_1 = \arctg\left(\kappa_4 \frac{\partial \omega^*}{\partial x^*}\right)$ и $\eta_2 = \arctg\left(\kappa_5 \frac{\partial \omega^*}{\partial y^*}\right)$ при $n = 18$

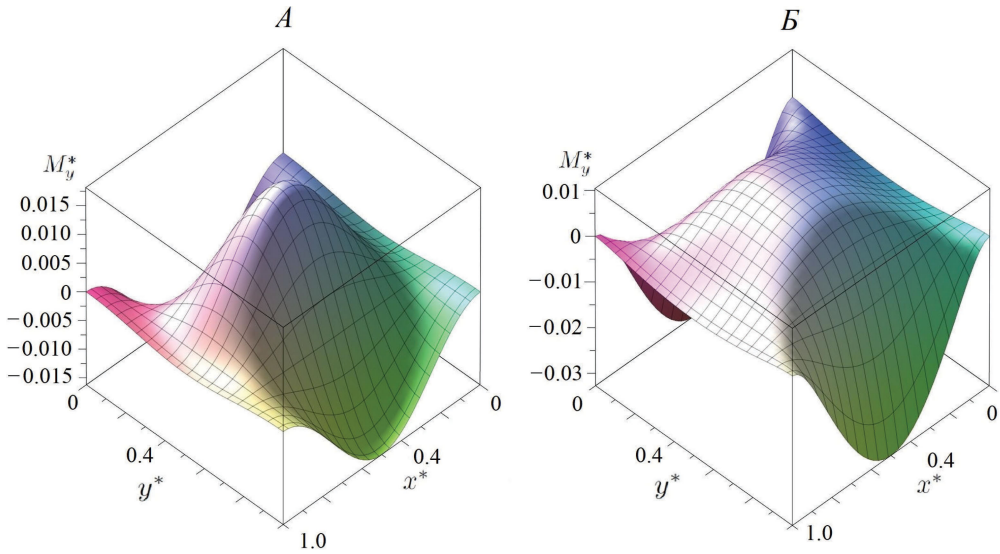


Рис. 2. Безразмерный изгибающий момент $M_y^*(x^*, y^*)$ ортотропной квадратной пластины при действии $q^*(x^*, y^*)$ вида (25) (А) и $q^*(x^*, y^*) = 1$ (Б)

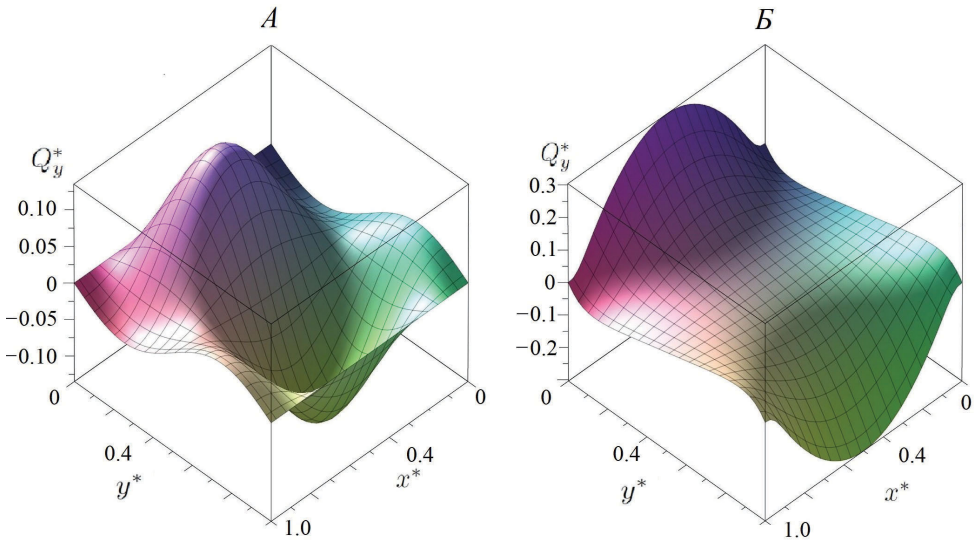


Рис. 3. Безразмерная перерезывающая сила $Q_y^*(x^*, y^*)$ ортотропной квадратной пластины при действии $q^*(x^*, y^*)$ вида (25) (А) и $q^*(x^*, y^*) = 1$ (Б)

иллюстрируют рис. 4 и 5. Из них видно, что значения η_1 и η_2 на сторонах пластины равны нулю, что согласуется с граничными условиями для угла отклонения в соответствии с (2) и (3).

Представленные результаты показывают достаточно быструю сходимость построенного решения (12).

5. Заключение. В работе предложен новый подход к построению решения задачи моделирования изгиба защемленной по контуру тонкой ортотропной прямоуголь-

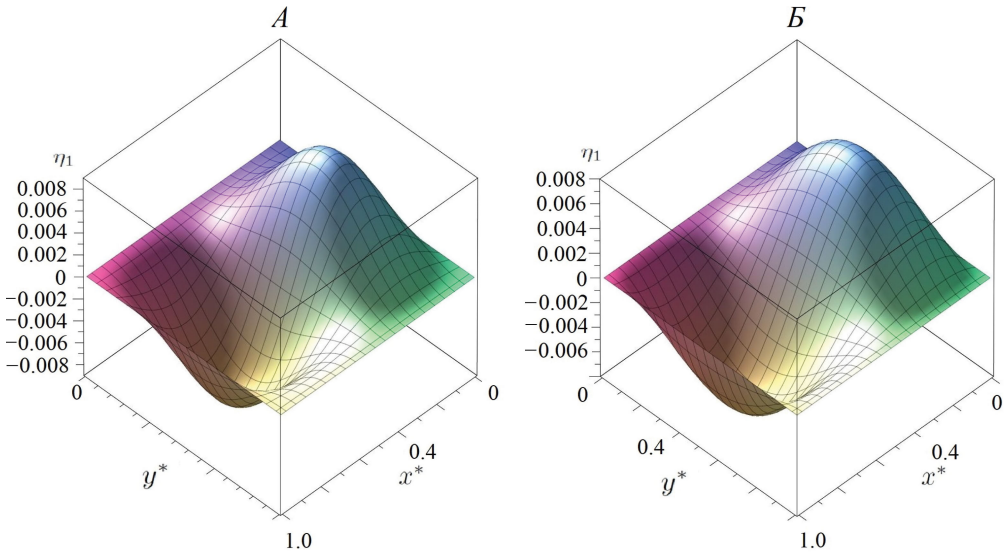


Рис. 4. $\eta_1(x^*, y^*)$ для ортотропной квадратной пластины при действии $q^*(x^*, y^*)$ вида (25) (А) и $q^*(x^*, y^*) = 1$ (Б)

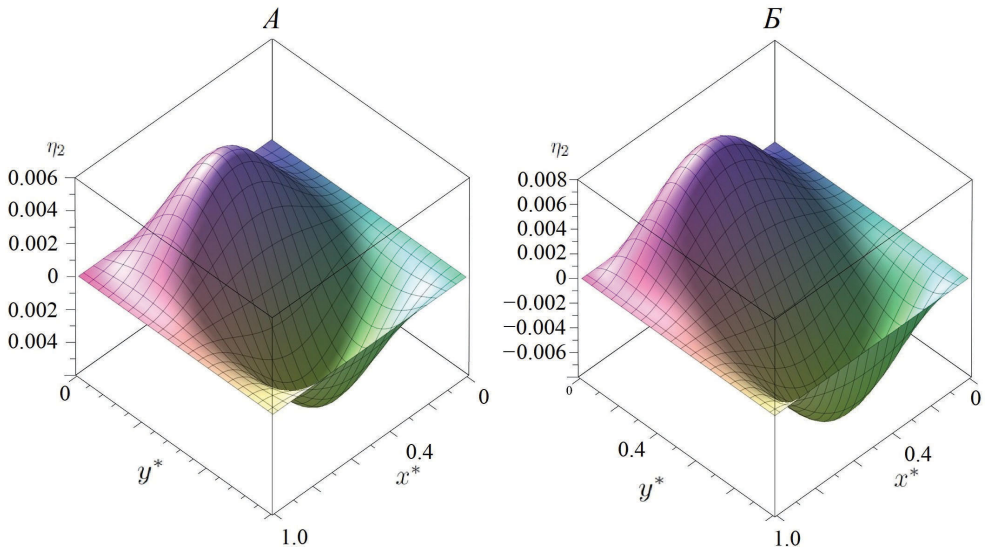


Рис. 5. $\eta_2(x^*, y^*)$ для ортотропной квадратной пластины при действии $q^*(x^*, y^*)$ вида (25) (А) и $q^*(x^*, y^*) = 1$ (Б)

ной пластины с использованием многочленов Чебышёва первого рода в качестве базисной системы функций при разложении решения краевой задачи и метода коллокации для нахождения коэффициентов в этом разложении. Реализация предложенного подхода сочетает в себе свойства многочленов Чебышёва и операции над матрицами для достижения высокой точности решения рассматриваемой задачи. Представлены результаты вычислений изгиба срединной поверхности пластины при различных отношениях длин сторон пластины и видах поперечной нагрузки. Получены выражения

Таблица 4. Безразмерные значения прогиба $\omega^*(x^*, y^*)$ в центре пластины ($\nu = \nu_1 = \nu_2 = 0.3$) при действии $q^*(x^*, y^*) = x^*$ в зависимости от отношения $d_2^* = \frac{d_2}{d_1}$

d_2^*	0.5	2/3	1	1.5
(12)	0.000079	0.000217	0.000632	0.001098
[1]	0.000080	0.000217	0.00063	0.00110
[5]	0.000085	0.000233	0.000675	0.001182
[6]	0.000079	0.000217	0.000629	0.00110
[21]	0.000080	0.000217	0.0006286	0.001089

Таблица 5. Безразмерные значения изгибающего момента $M_y^*(\frac{1}{2}, 0)$ при действии $q^*(x^*, y^*) = x^*$ на пластину ($\nu = \nu_1 = \nu_2 = 0.3$) в зависимости от отношения $d_2^* = \frac{d_2}{d_1}$

d_2^*	0.5	2/3	1	1.5
(22)	-0.01036	-0.01681	-0.02566	-0.02851
[1]	-0.0104	-0.0168	-0.0257	-0.0285
[6]	-0.0104	-0.0168	-0.0257	-0.0285

для изгибающих моментов и перерезывающих сил с использованием найденных коэффициентов в разложении функции изгиба. Приведенные результаты показывают, что предложенный подход имеет хорошую точность и сходимость для задач расчета нормального перемещения точек срединной поверхности тонких прямоугольных ортотропных пластин в рамках теории Кирхгофа и может найти применение для исследования напряженно-деформированного состояния тонких пластин при использовании теории Тимошенко.

Литература

1. Timoshenko S. P., Woinowsky-Krieger S. Theory of plates and shells. New York: McGraw-Hill Press, 1959. 580 p.
2. Голушко С. К., Идимешев С. В., Шанеев В. П. Метод коллокаций и наименьших невязок в приложении к задачам механики изотропных пластин // Вычислительные технологии. 2013. Т. 18. № 6. С. 31–43.
3. Шанеев В. П., Брындин Л. С., Беляев В. А. hp-Вариант метода коллокации и наименьших квадратов с интегральными коллокациями решения бигармонического уравнения // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Физико-математические науки. 2022. Т. 26. № 3. С. 556–572. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1936>
4. Голоскоков Д. П., Матросов А. В. Метод начальных функций в расчете изгиба защемленной по контуру тонкой ортотропной пластинки // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2021. Т. 17. Вып. 4. С. 330–344. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.402>
5. Lakshmi G. V. R., Gupta N. Bending of fully clamped orthotropic rectangular thin plates using finite continuous ridgelet transform // Materials Today: Proceedings. 2021. Vol. 47. P. 4199–4205. <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2021.04.458>
6. Li R., Zhong Y., Tian B., Liu Y. On the finite integral transform method for exact bending solutions of fully clamped orthotropic rectangular thin plates // Applied Mathematics Letters. 2009. Vol. 22. P. 1821–1827. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2009.07.003>
7. Xu Q., Yang Z., Ullah S., Jinghui Z., Gao Y. Analytical bending solutions of orthotropic rectangular thin plates with two adjacent edges free and the others clamped or simply supported using finite integral transform method // Advances in Civil Engineering. 2020. P. 1–11. <https://doi.org/10.1155/2020/8848879>
8. Голушко С. К., Идимешев С. В., Шанеев В. П. Разработка и применение метода коллокаций и наименьших невязок к решению задач механики анизотропных слоистых пластин // Вычислительные технологии. 2014. Т. 19. № 5. С. 24–36.
9. Хлуднев А. М. О равновесии пластины с тонким жестким включением и свободным краем //

Математические заметки Северо-Восточного федерального университета им. М. К. Аммосова. 2021. Т. 28. Вып. 3. С. 105–120. <https://doi.org/10.25587/SVFU.2021.64.10.007>

10. *Markous N. A.* Boundary mesh free method with distributed sources for Kirchhoff plate bending problems // *Applied Mathematical Modelling*. 2021. Vol. 94. P. 139–151. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2021.01.015>

11. *Zhou Y., Huang K.* On simplified deformation gradient theory of modified gradient elastic Kirchhoff–Love plate // *European Journal of Mechanics. A Solids*. 2023. Vol. 100. Art. N 105014. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2023.105014>

12. *Бахарев Ф. Л., Назаров С. А.* Асимптотика собственных чисел длинных пластин Кирхгофа с защемленными краями // *Математический сборник*. 2019. Т. 210. № 4. С. 3–26. <https://doi.org/10.4213/sm9008>

13. *Назаров С. А.* Осреднение пластин Кирхгофа с осциллирующими кромками и точечными опорами // *Изв. РАН. Сер. матем.* 2020. Т. 84. Вып. 4. С. 110–168. <https://doi.org/10.4213/im8854>

14. *Гомес Д., Назаров С. А., Перес М.-Е.* Точечное крепление пластины Кирхгофа вдоль ее кромки // *Записки научных семинаров Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН*. 2020. Т. 493. С. 107–137.

15. *Голоскоков Д. П., Матросов А. В., Олемской И. В.* Изгиб защемленной тонкой изотропной пластины методом Канторовича с использованием специальных полиномов // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления*. 2023. Т. 19. Вып. 4. С. 423–442. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.401>

16. *Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М.* Численные методы: учебник. 9-е изд. М.: Лаборатория знаний, 2020. 636 с.

17. *Ventsel E., Krauthammer Th.* Thin plates and shells. Theory: analysis and applications. Boca Raton: CRC Press, 2001. 688 p.

18. *Liu S., Trenkler G.* Hadamard, Khatri–Rao, Kronecker and other matrix products // *International Journal of Information and Systems Sciences*. 2008. Vol. 4. N 1. P. 160–177.

19. *Shen J., Tang T., Wang L.* Spectral methods. Heidelberg; Berlin: Springer, 2011. 472 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-71041-7>

20. *Mason J., Handscomb D.* Chebyshev polynomials. Boca Raton: CRC Press, 2003. 360 p.

21. *Laureano R. W., Mantari J. L., Yarasca J., Oktem A. S., Monge J., Zhou X.* Boundary discontinuous Fourier analysis of clamped isotropic and cross-ply laminated plates via Unified Formulation // *Composite Structures*. 2024. Vol. 328. Art. N 117736. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2023.117736>

Статья поступила в редакцию 24 апреля 2024 г.

Статья принята к печати 25 июня 2024 г.

К о н т а к т н а я и н ф о р м а ц и я :

Гермидер Оксана Владимировна — канд. физ.-мат. наук; <https://orcid.org/0000-0002-2112-805X>, ogermider@narfu.ru

Попов Василий Николаевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; <https://orcid.org/0000-0003-0803-4419>, v.popov@narfu.ru

Mathematical modeling of bending of a thin orthotropic plate clamped along the contour*

O. V. Germider, V. N. Popov

Northern (Arctic) Federal University named after M. V. Lomonosov, 17, nab. Severnoi Dviny, Arkhangelsk, 163002, Russian Federation

For citation: Germider O. V., Popov V. N. Mathematical modeling of bending of a thin orthotropic plate clamped along the contour. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2024, vol. 20, iss. 3, pp. 310–323.

<https://doi.org/10.21638/spbu10.2024.301> (In Russian)

* This research was supported by the Russian Science Foundation, project N 24-21-00381, <https://rscf.ru/project/24-21-00381/>

Within the framework of Kirchhoff's theory, a new approach to constructing a solution to the problem of modeling the bending of a thin rectangular orthotropic plate clamped along the contour, which is under the influence of a load normally distributed over its surface, is proposed. The solution to the inhomogeneous biharmonic equation for an orthotropic plate is obtained in the form of a partial sum of a double series in Chebyshev polynomials of the first kind. To find the coefficients in this expansion, the boundary value problem is reduced by the collocation method to a system of linear algebraic equations in matrix form using the properties of these polynomials. Based on matrix and differential transformations, expressions for bending moments and shearing forces are obtained. The results of calculations of the bending of the middle surface of the plate under different loads on the plate are presented, which demonstrate the effectiveness of the proposed approach.

Keywords: collocation method, biharmonic equation, Chebyshev polynomials of the first kind, bending of a thin orthotropic plate.

References

1. Timoshenko S. P., Woinowsky-Krieger S. *Theory of plates and shells*. New York, McGraw-Hill Press, 1959, 580 p.
2. Golushko S. K., Idimeshev S. V., Shapeev V. P. Metod kollokatsii i naimen'shikh neviazok v prilozhenii k zadacham mekhaniki izotropnykh plastin [Application of collocations and least residuals method to problems of the isotropic plates theory]. *Computational Technologies*, 2013, vol. 18, no. 6, pp. 31–43. (In Russian)
3. Shapeev V. P., Bryndin L. S., Belyaev V. A. hp-Variant metoda kollokatsii i naimen'shikh kvadratov s integral'nymi kollokatsiiami reshenia bigarmonicheskogo uravnenia [The hp-version of the least-squares collocation method with integral collocation for solving a biharmonic equation]. *Journal of Samara State Technical University. Series Physical and Mathematical Sciences*, 2022, vol. 26, no. 3, pp. 556–572. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1936> (In Russian)
4. Goloskokov D. P., Matrosov A. V. Metod nachal'nykh funktsii v raschete izgiba zashchemlennoi po konturu tonkoj ortotropnoj plastinki [The method of initial functions in calculating the bending of a thin orthotropic plate clamped along the contour]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2021, vol. 17, iss. 4, pp. 330–344. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.402> (In Russian)
5. Lakshmi G. V. R., Gupta N. Bending of fully clamped orthotropic rectangular thin plates using finite continuous ridgelet transform. *Materials Today: Proceedings*, 2021, vol. 47, pp. 4199–4205. <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2021.04.458>
6. Li R., Zhong Y., Tian B., Liu Y. On the finite integral transform method for exact bending solutions of fully clamped orthotropic rectangular thin plates. *Applied Mathematics Letters*, 2009, vol. 22, pp. 1821–1827. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2009.07.003>
7. Xu Q., Yang Z., Ullah S., Jinghui Z., Gao Y. Analytical bending solutions of orthotropic rectangular thin plates with two adjacent edges free and the others clamped or simply supported using finite integral transform method. *Advances in Civil Engineering*, 2020, pp. 1–11. <https://doi.org/10.1155/2020/8848879>
8. Golushko S. K., Idimeshev S. V., Shapeev V. P. Razrabotka i primeneniye metoda kollokatsii i naimen'shikh neviazok k resheniyu zadach mekhaniki anizotropnykh sloistykh plastin [Development and application of collocations and least residuals method to the solution of problems in mechanics of anisotropic laminated plates]. *Computational Technologies*, 2014, vol. 19, no. 5, pp. 24–36. (In Russian)
9. Khludnev A. M. O ravnovesii plastiny s tonkim zhestkim vklucheniem i svobodnym kraem [Equilibrium problems for elastic plate with thin rigid inclusion and free edge]. *Mathematical notes of M. K. Ammosov North-Eastern Federal University*, 2021, vol. 28, no. 3, pp. 105–120. <https://doi.org/10.25587/SVFU.2021.64.10.007> (In Russian)
10. Markous N. A. Boundary mesh free method with distributed sources for Kirchhoff plate bending problems. *Applied Mathematical Modelling*, 2021, vol. 94, pp. 139–151. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2021.01.015>
11. Zhou Y., Huang K. On simplified deformation gradient theory of modified gradient elastic Kirchhoff–Love plate. *European Journal of Mechanics a Solids*, 2023, vol. 100, art. no. 105014. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2023.105014>
12. Bakharev F. L., Nazarov S. A. Asimptotika sobstvennykh chisel dlennykh plastin Kirkhgofa s zashchemlennymi kraiami [Eigenvalue asymptotics of long Kirchhoff plates with clamped edges]. *Matematicheskii Sbornik*, 2019, vol. 210, no. 4, pp. 3–26. <https://doi.org/10.4213/sm9008> (In Russian)

13. Nazarov S. A. Osrednenie plastin Kirhgofa s ostsilliruiushchimi kromkami i tochechnymi oporami [Homogenization of Kirchhoff plates with oscillating edges and point supports]. *Izvestia Rossiiskoi akademii nauk. Seria Matematicheskaya* [Proceedings of Russian Academy of Sciences. Series Mathematical], 2020, vol. 84, iss. 4, pp. 110–168. <https://doi.org/10.4213/im8854> (In Russian)
14. Gomez D., Nazarov S. A., Perez M.-E. Tochechnoe kreplenie plastiny Kirhgofa vdol' ee kromki [Pointwise fixation along the edge of the Kirchhoff plate]. *Zapiski nauchnykh seminarov Sankt-Petersburgskogo otdeleniia Matematicheskogo instituta im. V. A. Steklova RAN* [Transactions of Scientific seminars of St. Petersburg Department of V. A. Steklov Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences], 2020, vol. 493, pp. 107–137. (In Russian)
15. Golosokov D. P., Matrosov A. V., Olemskoy I. V. Izgib zashchemlennoi tonkoi izotropnoi plastiny metodom Kantorovicha s ispol'zovaniem spetsial'nykh polinomov [Bending of a clamped thin isotropic plate by the Kantorovich method using special polynomials]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2023, vol. 19, iss. 4, pp. 423–442. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.401> (In Russian)
16. Bakhvalov N. S., Zhidkov N. P., Kobelkov G. M. *Chislennye metody* [Numerical methods]. 9th ed. Moscow, Laboratoria znaniy Publ., 2020, 636 p. (In Russian)
17. Ventsel E., Krauthammer Th. *Thin plates and shells. Theory: Analysis and applications*. Boca Raton, CRC Press, 2001, 688 p.
18. Liu S., Trenkler G. Hadamard, Khatri – Rao, Kronecker and other matrix products. *International Journal of Information and Systems Sciences*, 2008, vol. 4, no. 1, pp. 160–177.
19. Shen J., Tang T., Wang L. *Spectral methods*. Heidelberg, Berlin, Springer, 2011, 472 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-71041-7>
20. Mason J., Handscomb D. *Chebyshev polynomials*. Boca Raton, CRC Press, 2003, 360 p.
21. Laureano R. W., Mantari J. L., Yarasca J., Oktem A. S., Monge J., Zhou X. Boundary discontinuous Fourier analysis of clamped isotropic and cross-ply laminated plates via unified formulation. *Composite Structures*, 2024, vol. 328, art. no. 117736. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2023.117736>

Received: April 24, 2024.

Accepted: June 25, 2024.

A u t h o r s' i n f o r m a t i o n:

Oksana V. Germider — PhD in Physics and Mathematics; <https://orcid.org/0000-0002-2112-805X>, o.germider@narfu.ru

Vasilii N. Popov — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; <https://orcid.org/0000-0003-0803-4419>, v.popov@narfu.ru