УДК 517.977
MSC 49J20

Неклассическое условие оптимальности в гибридной задаче управления гиперболическими и обыкновенными дифференциальными уравнениями с запаздыванием*

А. В. Аргучинцев, В. П. Поплевко

Иркутский государственный университет,
Российская Федерация, 664003, Иркутск, ул. К. Маркса, 1

Для цитирования: *Аргучинцев А. В., Поплевко В. П.* Неклассическое условие оптимальности в гибридной задаче управления гиперболическими и обыкновенными дифференциальными уравнениями с запаздыванием // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2024. Т. 20. Вып. 2. С. 255–264. https://doi.org/10.21638/spbu10.2024.210

Рассматривается задача оптимального управления линейной гиперболической системой первого порядка, в которой неоднородность в правой части определяется из управляемой линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянным запаздыванием. Матрица коэффициентов при фазовых переменных в системе обыкновенных дифференциальных уравнений зависит от функции управления. Целевой функционал линеен. На основе точной (без остаточных членов) формулы приращения целевого функционала задача сведена к задаче оптимального управления системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Результат сформулирован в виде неклассического условия оптимальности вариационного типа. Предлагаемая редукция задачи существенно сокращает объем вычислений при использовании численных методов оптимизации. Приведен иллюстративный пример.

Ключевые слова: гибридная задача, гиперболическая система, система с запаздыванием, точная формула приращения, вариационное условие оптимальности, редукция задачи.

1. Введение. История исследования задач управления дифференциальными уравнениями с частными производными и эффектом запаздывания главным образом повторяет и развивает полученные ранее результаты для задач управления системами с сосредоточенными параметрами. Можно выделить достижения в вопросах существования и единственности оптимальных управлений [1], получении условий оптимальности типа классического принципа максимума [2], построении вычислительных методов [3], синтеза [4] и стабилизации [5–7].

В настоящей статье описывается задача оптимального управления линейной гиперболической системой первого порядка, в которой неоднородность в правой части определяется из управляемой линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянным запаздыванием. Задачи такого вида возникают, в частности, в моделях, описывающих динамику двух взаимодействующих популяций «растительноядный консумент — растения» [8, с. 218–219]. Структура растительноядной популяции животных определяется интегродифференциальным уравнением с гиперболическим дифференциальным оператором в левой части. Для этой популяции важно распределение ее членов по возрасту. В качестве независимых переменных выступают время, в течение которого изучается процесс, и возраст особей. Для модели-

* Исследование А. В. Аргучинцева выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00296, https://rscf.ru/project/23-21-00296/

рования же динамики популяции растения возраст часто не имеет существенного значения, а поэтому можно ограничиться классическим обыкновенным дифференциальным уравнением.

Особенностью рассматриваемой задачи является предположение о том, что матрица коэффициентов при фазовых переменных в системе обыкновенных дифференциальных уравнений зависит от функции управления. Поэтому, несмотря на линейность целевого функционала, классический принцип максимума Л. С. Понтрягина в данной задаче является только необходимым, но не достаточным условием оптимальности. Для решения подобных задач обычно применяются методы, разработанные для общих нелинейных проблем.

В статье впервые для задач с запаздыванием применена модифицированная методика [9], основанная на использовании точной (без остаточных членов) формулы приращения целевого функционала. Этот подход позволил свести исходную задачу оптимального управления к задаче оптимального управления системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Результат сформулирован в виде неклассического условия оптимальности вариационного типа. Доказанная теорема по существу определяет целое семейство необходимых и достаточных условий оптимальности. Редукция задачи дает возможность в значительной степени сократить объем вычислений. При реализации оптимизационных методов в подобного рода задачах основное время тратится на многократные интегрирования исходной и сопряженной систем дифференциальных уравнений в частных производных. Полученный в настоящей работе результат позволяет ограничиться максимум двумя процедурами достаточно трудоемкого решения начально-краевых задач для систем гиперболических уравнений: однократное интегрирование сопряженной системы и, если это необходимо, финальное решение для определения состояния процесса, соответствующего найденному оптимальному управлению. Приведенный в п. 5 пример иллюстрирует такой подход.

2. Постановка задачи. Рассмотрим систему линейных гиперболических уравнений первого порядка

$$\frac{\partial x}{\partial t} + A(s,t)\frac{\partial x}{\partial s} = \Phi(s,t)x + \overline{f}(s,t) + C(t)y, \tag{1}$$

$$(s,t) \in \Pi, \quad \Pi = S \times T, \quad S = [s_0, s_1], \quad T = [t_0, t_1],$$

в которой $x(s,t)$, $y(t)$ — n- и m-мерные вектор-функции; $A(s,t)$ — диагональная матрица порядка $(n \times n)$; $C(t)$ и $\Phi(s,t)$ — матричные функции размера $(n \times m)$, $(n \times n)$ соответственно; $\overline{f}(s,t)$ — n-мерная вектор-функция. Дополнительно считаем, что диагональные элементы $a_i = a_i(s,t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, матрицы коэффициентов знакопостоянны в Π:

$$a_i(s,t) > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m_1,$$

$$a_i(s,t) = 0, \quad i = m_1 + 1, m_1 + 2, \ldots, m_2,$$

$$a_i(s,t) < 0, \quad i = m_2 + 1, m_2 + 2, \ldots, n.$$

Пусть матрица $A^+(s,t)$ порядка $(m_1 \times m_1)$ и матрица $A^-(s,t)$ порядка $(n - m_2) \times (n - m_2)$ — диагональные подматрицы, составленные из положительных и отрицательных элементов матрицы A. Рассмотрим подвекторы $x^+ = (x_1, x_2, \ldots, x_{m_1})$ и $x^- = (x_{m_2+1}, x_{m_2+2}, \ldots, x_n)$, которые отвечают положительным и отрицательным элементам матрицы A.

Начально-краевые условия для системы (1) зададим в точках начала характеристик гиперболических уравнений:

$$x(s,t_0)=x^0(s),\ \ s\in S;\ \ x^+(s_0,t)=\eta(t),\ \ x^-(s_1,t)=\mu(t),\ t\in T, \tag{2}$$

с условиями согласования $\eta(t_0)=(x^0(s_0))^+,\ \ \mu(t_0)=(x^0(s_1))^-$.

Функция $y(t)$ определяется из управляемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\frac{dy}{dt}=B(u(t),t)y(t-\alpha)+d(u(t),t),\ \ t\in T, \tag{3}$$

$$y(t)=y^0(t),\ \ t\in[t_0-\alpha,t_0],$$

где $B(u(t),t)$ — матричная функция размера $(m\times m)$; $d(u(t),t)$ — m-мерная вектор-функция; α — заданная положительная константа.

В качестве множества допустимых управлений выберем совокупность ограниченных и измеримых на T r-мерных вектор-функций $u(t)$, удовлетворяющих почти всюду на этом отрезке ограничениям типа включения

$$u(t)\in U\subset E^r,\ \ t\in T, \tag{4}$$

где U — компактное множество.

Требуется найти допустимое управление, доставляющее минимум целевому функционалу:

$$J(u)=\int\limits_S\langle\beta(s),x(s,t_1)\rangle\,ds+\iint\limits_\Pi\langle b_0(s,t),x(s,t)\rangle\,ds\,dt. \tag{5}$$

Здесь и далее угловыми скобками обозначается классическое скалярное произведение в конечномерном евклидовом пространстве соответствующей размерности.

Задача оптимального управления (1)–(5) рассматривается при следующих предположениях:

1) диагональные элементы $a_i(s,t),\ i=1,2,\dots,n$, матрицы A непрерывно дифференцируемы в прямоугольнике Π;

2) вектор-функции $x^0(s),\ \ \mu(t)$ и $\eta(t)$ непрерывны на S и T соответственно;

3) матричные функции $\Phi(s,t)$, $B(u,t)$, $C(t)$, а также вектор-функции $\overline{f}(s,t)$, $d(u(t),t)$ непрерывны по совокупности своих аргументов в областях их определения.

При указанных предположениях на параметры задачи для любого допустимого управления существует единственное обобщенное решение начально-краевой задачи (1), (2) из класса непрерывных в Π функций, причем каждая компонента решения $x_i,\ i=1,2,...,n$, непрерывно дифференцируема вдоль характеристик системы гиперболических уравнений [10].

3. Формула приращения функционала. Задача (1)–(5) является линейной, однако классический принцип максимума Л. С. Понтрягина не будет в ней достаточным условием оптимальности. Причина этого — зависимость от управления матрицы коэффициентов в (3). Обычно для решения подобных задач применяются те же методы, что и для общего нелинейного случая. В настоящей работе используется методика, ранее примененная в [9] для задач при отсутствии запаздывания.

Рассмотрим два произвольных различных допустимых процесса: $\{u,x\}$ и $\{\widetilde{u}=u+\Delta u,\widetilde{x}=x+\Delta x\}$. Введем обозначение для дифференциального оператора в левой части (1): $D_A x = x_t + A(s,t)x_s$. Здесь $D_A x = (D_1 x_1, \dots, D_n x_n)$ — обобщенная производная, каждая компонента которой $D_i x_i$ непрерывна вдоль соответствующего i-го семейства характеристик. Уравнение в приращениях для исходной начально-краевой задачи примет следующий вид:

$$D_A \Delta x = \Phi(s,t)\Delta x + C(t)\Delta y,$$

$$\Delta x(s,t_0) = \Delta x^+(s_0,t) = \Delta x^-(s_1,t) = 0,$$

$$\Delta y_t = B(\widetilde{u}(t),t)\widetilde{y}(t-\alpha) - B(u(t),t)y(t-\alpha) + \Delta d(u(t),t), \quad \Delta y(t_0) = 0. \tag{6}$$

Здесь $\Delta d(u(t),t) = d(\widetilde{u}(t),t) - d(u(t),t)$.

Перепишем правую часть (6) таким образом:

$$B(\widetilde{u}(t),t)\widetilde{y}(t-\alpha) - B(u(t),t)y(t-\alpha) + \Delta d(u(t),t) =$$

$$= \Delta B(u(t),t)\widetilde{y}(t-\alpha) + B(u(t),t)\Delta y(t-\alpha) + \Delta d(u(t),t),$$

где $\Delta B(u(t),t) = B(\widetilde{u}(t),t) - B(u(t),t)$. Приращение функционала запишем так:

$$\Delta J(u) = J(\widetilde{u}) - J(u) = \int\limits_S \langle \beta(s), \Delta x(s,t_1)\rangle\, ds + \iint\limits_\Pi \langle b_0(s,t), \Delta x(s,t)\rangle\, dsdt. \tag{7}$$

В правую часть формулы (7) добавим нулевые слагаемые

$$\iint\limits_\Pi \langle \psi(s,t), D_A\Delta x - \Phi(s,t)\Delta x\rangle\, dsdt$$

и

$$\int\limits_T \langle p(t), \Delta y_t - \Delta_{\widetilde{u}} B(u,t)\widetilde{y}(t-\alpha) - B(u,t)\Delta y(t-\alpha) - \Delta d(u,t)\rangle\, dt,$$

где $\psi(s,t)$ и $p(t)$ — пока произвольные вектор-функции.

Применяя формулы интегрирования по частям, получим, что

$$\Delta J(u) = \int\limits_S \langle \beta(s), \Delta x(s,t_1)\rangle\, ds + \iint\limits_\Pi \langle b_0(s,t), \Delta x(s,t)\rangle\, dsdt \; +$$

$$+ \int\limits_S \langle \psi(s,t_1), \Delta x(s,t_1)\rangle - \langle \psi(s,t_0), \Delta x(s,t_0)\rangle\, ds \; -$$

$$- \int\limits_T \langle \psi(s_0,t), A(s_0,t)\Delta x(s_0,t)\rangle - \langle \psi(s_1,t), A(s_1,t)\Delta x(s_1,t)\rangle\, dt \; -$$

$$- \iint\limits_\Pi \langle D_A\psi + A_s\psi + \Phi^T\psi, \Delta x\rangle\, dsdt - \iint\limits_\Pi \langle \psi(s,t), C\Delta y\rangle dsdt \; +$$

$$+ \; \langle p(t_1), \Delta y(t_1)\rangle - \int\limits_T \langle p_t, \Delta y(t)\rangle\, dt \; -$$

$$- \int\limits_T \langle p(t), \Delta B(u(t),t)\widetilde{y}(t-\alpha) + B(u(t),t)\Delta y(t-\alpha) + \Delta d(u,t)\rangle\, dt.$$

Далее рассмотрим выражение

$$\int\limits_T \langle p(t), B(u,t)\Delta y(t-\alpha)\rangle\, dt = \left\{ \begin{array}{c} \tau = t-\alpha, \\ \tau\in[t_0-\alpha, t_1-\alpha] \end{array} \right\} =$$

$$= \int\limits_{t_0-\alpha}^{t_0} \langle p(\tau+\alpha), B(u(\tau+\alpha),\tau+\alpha)\Delta y(\tau)\rangle\, d\tau + \qquad (8)$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t_1-\alpha} \langle p(\tau+\alpha), B(u(\tau+\alpha),\tau+\alpha)\Delta y(\tau)\rangle\, d\tau.$$

Перейдем обратно к переменной t. С учетом того, что первое слагаемое (8) равно нулю, приходим к следующему выражению:

$$\int\limits_T \langle p(t), B(u,t)\Delta y(t-\alpha)\rangle\, dt =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1-\alpha} \langle p(t+\alpha), B(u(t+\alpha),t+\alpha)\Delta y(t)\rangle\, dt.$$

Заметим, что

$$\iint\limits_\Pi \langle \psi(s,t), C\Delta y\rangle\, dsdt = -\iint\limits_\Pi \langle \frac{\partial}{\partial s}\int\limits_s^{s_1} \psi(\xi,t)\, d\xi, C\Delta y\rangle\, dsdt.$$

Применяя формулу интегрирования по частям, получаем, что

$$\iint\limits_\Pi \langle \psi(s,t), C\Delta y\rangle\, dsdt = \int\limits_T \langle \int\limits_S \psi(s,t)\, ds, C\Delta y\rangle\, dt.$$

Потребуем, чтобы функции $\psi(s,t)$, $p(t)$ были решениями сопряженной задачи

$$D_A\psi + A_s\psi = -\Phi^T(s,t)\psi + b_0(s,t), \quad (s,t)\in\Pi, \qquad (9)$$

$$\psi(s,t_1) = -\beta(s), \;\; s\in S, \;\; \psi(s_1,t)=0,$$

$$\psi^-(s_0,t)=0, \;\; \psi^+(s_1,t)=0, \;\; t\in T,$$

$$p_t = \begin{cases} -B^T(u(t+\alpha),t+\alpha)p(t+\alpha) - \int\limits_S C^T\psi(s,t)\, ds, & t\in[0;t_1-\alpha), \\ -\int\limits_S C^T\psi(s,t)\, ds, & t\in[t_1-\alpha;t_1], \end{cases}$$

$$p(t_1) = 0. \qquad (10)$$

Тогда формула приращения функционала примет вид

$$\Delta J(u) = -\int\limits_T \langle p(t), \Delta B(u,t)\widetilde{y}(t-\alpha) + \Delta d(u,t)\rangle\, dt. \qquad (11)$$

Формула (11) является точной (без остаточных членов) для любой пары допустимых процессов, при этом исходная система обыкновенных дифференциальных уравнений (3) интегрируется на возмущенном управлении.

4. Условие оптимальности. На основе полученной формулы приращения (11) можно осуществить редукцию исходной задачи оптимального управления гиперболической системой к задаче оптимального управления системами обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$I(v) = -\int_T \langle p(t,u), (B(v(t),t) - B(u(t),t))y(t-\alpha, v) + \tag{12}$$

$$+ \, d(v(t),t) - d(u(t),t)\rangle \, dt \to \min,$$

$$\begin{gathered} y_t = B(v(t),t)y(t-\alpha) + d(v(t),t), \quad t \in T, \\ y(t) = y^0(t), \;\; t \in [t_0 - \alpha, t_0], \\ v(t) \in U. \end{gathered} \tag{13}$$

Здесь $y(t)$ — m-мерная функция состояния, $u(t)$ и $p(t,u)$ — фиксированные функции, $v(t)$ — управляющее воздействие, удовлетворяющее тем же ограничениям на управления, что и в исходной задаче. Тем самым доказана справедливость следующего утверждения.

Теорема. *Для оптимальности управления $u^*(t)$ в задаче* (1)–(5) *необходимо и достаточно, чтобы управление $v^* = u^*(t)$ было оптимальным в задаче* (12), (13). *При этом оптимальное значение функционала определяется формулой*

$$J(v^*) = J(u) + I(v^*).$$

Полученный результат можно рассматривать и как вариационное условие оптимальности (в отличие от традиционных конечномерных условий оптимальности). Отметим, что теорема справедлива для любого допустимого управления $u(t)$.

Опишем схему решения исходной задачи.

1. Задается произвольное допустимое управление $u = u(t)$. Вычисляется соответствующее ему решение $p = p(t,u)$ сопряженной задачи (10). Для этого необходимо также найти решение задачи (9), которое не зависит от выбора допустимого управления.

2. Решается вспомогательная задача оптимального управления системой обыкновенных дифференциальных уравнений с линейным целевым функционалом (12).

Таким образом, для решения задачи (1)–(5) необходимо всего лишь два раза проинтегрировать систему дифференциальных уравнений с частными производными (поиск $\psi(s,t)$ и при необходимости $x^*(s,t,v^*)$).

5. Иллюстративный пример. Рассмотрим пример применения описанного алгоритма. В квадрате $S \times T = [0;2] \times [0;2]$ поставим следующую задачу оптимального управления:

$$x_{1t} + x_{1s} = x_2 - y,$$

$$x_{2t} - x_{2s} = (s+2)\sin t,$$

$$y_t = u \cdot y(t - 0.15), \;\; u(t) \in [0,3],$$

$$y(t) = t, \;\; t \in [-0.15; 0],$$

$$x_1(0,t)=0,\ \ x_1(s,0)=s,\ \ x_2(2,t)=0,\ \ x_2(s,0)=0.$$

Поставим задачу на минимум целевого функционала

$$J(u)=\int\limits_S [3x_1(s,2)+2x_2(s,2)]\,ds,\ \ u\in U.$$

В принятых обозначениях

$$\Phi(s,t)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \ C(t)=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \ B(u,t)=u,\ \ d(u,t)=0.$$

Сопряженная задача принимает вид

$$\psi_{1t}+\psi_{1s}=0,\quad \psi_{2t}-\psi_{2s}=-\psi_1,$$

$$\psi_1(s,2)=-3,\ \ \psi_2(s,2)=-2,$$

$$\psi_1(2,t)=0,\ \ \psi_2(0,t)=0,$$

$$p_t=\begin{cases} -p(t+0.15)\cdot u(t+0.15)+\int\limits_S \psi_1\,ds, & t\in[0;1.85),\\ \int\limits_S \psi_1\,ds, & t\in[1.85;2], \end{cases}$$

$$p(2)=0.$$

Выберем допустимое управление $u(t)\equiv 0$ для всех $t\in[0,2]$. Тогда решение сопряженной задачи можно записать так:

$$\psi_1(s,t)=\begin{cases} 0, & t<s,\\ -3, & t\geqslant s, \end{cases}$$

$$p(t)=-\frac{3}{2}t^2+6,\ \ t\in[0;2].$$

Исходная задача может быть сведена к задаче оптимального управления

$$I(v)=\int\limits_0^2 (1.5t^2-6)\cdot v(t)\cdot z(t-0.15,v)\,dt\to\min,$$

$$z_t=v\cdot z(t-0.15),\ \ z(t)=t,\ \ t\in[-0.15;0],$$

$$v(t)\in[0;3].$$

6. Заключение. Отметим, что редуцированная задача оптимального управления (12), (13) имеет специальную структуру. Это также задача с запаздыванием, в которой матрица коэффициентов при фазовых переменных зависит от состояния. Для решения данной задачи можно использовать широкий арсенал методов, разработанных для оптимизации систем с сосредоточенными параметрами. В частности, билинейность задачи позволяет эффективно применять алгоритмы, разработанные в [11]. В качестве дальнейшего направления работы можно предложить исследование случая квадратичного целевого функционала с помощью методики [12]. Однако случай квадратичного критерия качества требует применения формул приращения второго порядка и матричных импульсов Р. Ф. Габасова.

Литература

1. *Teo K.* Optimal control of systems governed by time-delayed, second-order, linear, parabolic partial differential equations with a first boundary condition // Journal of Optimization Theory and Applications. 1979. Vol. 29. N 3. P. 437–481.

2. *Sadek I.* Optimal control of time-delay systems with distributed parameter // Journal of Optimization Theory and Applications. 1990. Vol. 67. N 3. P. 567–585.

3. *Mai T., Nguyen H., Nguyen V., Vu V.* Applying Pade approximation model in optimal control problem for a distributed parameter system with time delay // International Journal of Computing and Optimization. 2017. Vol. 4. N 1. P. 19–30. https://doi.org/10.12988/ijco.2017.61227

4. *Провоторов В. В., Провоторова Е. Н.* Синтез оптимального граничного управления параболической системы с запаздыванием и распределенными параметрами на графе // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2017. Т. 13. Вып. 2. С. 209–224. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2017.207

5. *Liu D., Wang Q., Xu G.* Stabilization of distributed parameter systems with delays in the boundary based on predictors // IEEE Transactions on Automatic Control. 2021. Vol. 66. N 7. P. 3317–3324. https://doi.org/10.1109/TAC.2020.3035586

6. *Гребенщиков Б. Г.* Асимптотические свойства и стабилизация одной системы нейтрального типа с постоянным запаздыванием // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2021. Т. 17. Вып. 1. С. 81–96. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.108

7. *Furtat I., Orlov Yy.* Synchronization and state estimation of nonlinear systems with unknown time-delays: Adaptive identification method // Cybernetics and Physics. 2020. Vol. 9. N 3. P. 136–143. https://doi.org/10.35470/2226-4116-2020-9-3-136-143

8. *Алексеев В. В., Крышев И. И., Сазыкина Т. Г.* Физическое и математическое моделирование экосистем. СПб.: Гидрометеоиздат, 1992. 368 с.

9. *Аргучинцев А. В.* Оптимальное управление гиперболическими системами. М.: Физматлит, 2007. 186 с.

10. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978. 592 с.

11. *Срочко В. А., Аксенюшкина Е. В.* Параметризация некоторых задач управления линейными системами // Известия Иркутского государственного университета. Сер. Математика. 2019. Т. 30. С. 83–98. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2019.30.83

12. *Аргучинцев А. В.* Вариационное условие оптимальности в задаче минимизации нормы конечного состояния составной системой гиперболических и обыкновенных дифференциальных уравнений // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2023. Т. 19. Вып. 4. С. 540–548. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.410.

Статья поступила в редакцию 21 января 2024 г.
Статья принята к печати 12 марта 2024 г.

Контактная информация:

Аргучинцев Александр Валерьевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; arguch@math.isu.ru

Поплевко Василиса Павловна — канд. физ.-мат. наук, доц.; vasilisa@math.isu.ru

The non-classical optimality condition in the hybrid control problem of hyperbolic and ordinary differential equations with delay*

A. V. Arguchintsev, V. P. Poplevko

Irkutsk State University, 1, ul. K. Marksa, Irkutsk, 664003, Russian Federation

* The research of A. V. Arguchintsev was supported by the Russian Science Foundation, project N 23-21-00296, https://rscf.ru/project/23-21-00296/

For citation: Arguchintsev A. V., Poplevko V. P. The non-classical optimality condition in the hybrid control problem of hyperbolic and ordinary differential equations with delay. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2024, vol. 20, iss. 2, pp. 255–264. https://doi.org/10.21638/spbu10.2024.210 (In Russian)

In this paper, we consider an optimal control problem for a system of linear first-order hyperbolic equations in which the inhomogeneity in the right-hand side is determined from the controlled linear system of ordinary differential equations with constant delay. The coefficient matrix at phase variables in the system of ordinary differential equations depends on the control function. The cost functional is linear. On the basis of the exact increment formula (without remainder terms) of the cost functional, the problem is reduced to the optimal control problem of a system of ordinary differential equations. The result is formulated in the form of a non-classical variational optimality condition. The proposed problem reduction significantly reduces the amount of calculations when using numerical optimization methods. An illustrative example is given.

Keywords: hybrid problem, hyperbolic system, delayed system, exact increment formula, variational optimality condition, problem reduction.

References

1. Teo K. Optimal control of systems governed by time-delayed, second-order, linear, parabolic partial differential equations with a first boundary condition. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1979, vol. 29, no. 3, pp. 437–481.

2. Sadek I. Optimal control of time-delay systems with distributed parameter. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1990, vol. 67, no. 3, pp. 567–585.

3. Mai T., Nguyen H., Nguyen V., Vu V. Applying Pade approximation model in optimal control problem for a distributed parameter system with time delay. *International Journal of Computing and Optimization*, 2017, vol. 4, no. 1, pp. 19–30. https://doi.org/10.12988/ijco.2017.61227

4. Provotorov V. V., Provotorova E. N. Sintez optimal'nogo granichnogo upravleniia parabolicheskoii sistemi s zapazdyvaniem i raspredelennymi parametrami na grafe [Synthesis of optimal boundary control of parabolic systems with delay and distributed parameters on the graph]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2017, vol. 13, iss. 2, pp. 209–224. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2017.207 (In Russian)

5. Liu D., Wang Q., Xu G. Stabilization of distributed parameter systems with delays in the boundary based on predictors. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2021, vol. 66, no 7, pp. 3317–3324. https://doi.org/10.1109/TAC.2020.3035586

6. Grebenshchikov B. G. Asimptoticheskie svoistva i stabilizaciya odnoi sistemy neitral'nogo tipa s postoyannym zapazdyvaniem [Asymptotic properties and stabilization of a neutral type system with constant delay]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2021, vol. 17, iss. 1, pp. 81–96. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.108 (In Russian)

7. Furtat I., Orlov Y. Synchronization and state estimation of nonlinear systems with unknown time-delays: adaptive identification method. *Cybernetics and Physics*, 2020, vol. 9, no. 3, pp. 136–143. https://doi.org/10.35470/2226-4116-2020-9-3-136-143

8. Alekseev V. V., Kryshev I. I., Sazykina T. G. *Fizicheskoe i matematicheskoe modelirovanie ehkosistem* [*Physical and mathematical modeling of ecosystems*]. St. Petersburg, Hydrometeoizdat Publ., 1992, 368 p. (In Russian)

9. Arguchintsev A. V. *Optimalnoe upravlenie giperbolicheskimi sistemami* [*Optimal control of hyperbolic systems*]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2007, 186 p. (In Russian)

10. Rozhdestvenskiyi B. L., Yanenko N. N. *Systemi kvazilineinykh uravnenii i ikh prilozheniya k gazovoi dinamike* [*Systems of quasilinear equations and their applications to gas dynamics*]. Moscow, Nauka Publ., 1978, 592 p. (In Russian)

11. Srochko V. A., Aksenyushkina E. V. Parametrizatsiya nekotorykh zadach upravleniya lineynymi sistemami [Parameterization of some linear systems control problems]. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2019, vol. 30, pp. 83–98. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2019.30.83 (In Russian)

12. Arguchintsev A. V. Variacionnoe uslovie optimalnosti v zadache minimizacii normy konechnogo sostoyaniia sostavnoi sistemoi giperbolicheskikh i obyknovennykh differencialnykh uravnenii [The variational optimality condition in the problem of minimizing the finite state norm by a composite system

of hyperbolic and ordinary differential equations]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2023, vol. 19, iss. 4, pp. 540–548. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.410 (In Russian)

Received: January 21, 2024.
Accepted: March 12, 2024.

Authors' information:

Alexander V. Arguchintsev — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; arguch@math.isu.ru

Vasilisa P. Poplevko — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor; vasilisa@math.isu.ru