УДК 519.71, 521.1 MSC 70Q05

Управление орбитальным движением космического аппарата вблизи точки либрации с помощью изменения отражательной способности солнечного паруса^{*}

А. С. Шмыров, В. А. Шмыров, Д. В. Шиманчук

Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: Шмыров А. С., Шмыров В. А., Шиманчук Д. В. Управление орбитальным движением космического аппарата вблизи точки либрации с помощью изменения отражательной способности солнечного паруса // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2024. Т. 20. Вып. 2. С. 298–306. https://doi.org/10.21638/spbu10.2024.214

Рассматривается стратегия удержания космического аппарата в окрестности неустойчивой точки Лагранжа (точки либрации) системы Солнце—Земля. Эта стратегия подразумевает использование специального управления, действующего коллинеарно линии Солнце—Земля и обеспечивающего устойчивость по Ляпунову орбитального движения. Реализация такого управления предлагается с помощью солнечного паруса. Обсуждаются преимущества и трудности данной стратегии.

Ключевые слова: задача трех тел, точка либрации, солнечный парус, управление, удержание, машинное обучение.

1. Введение. Несколько последних десятилетий исследователи в области небесной механики и управления активно разрабатывают проекты, связанные с коллинеарными точками либрации (точками Лагранжа) системы Солнце — Земля и системы Земля — Луна. Список таких проектов, как реализованных, так и планируемых, весьма внушителен. Первый проект ISEE-3 был запущен NASA в 1978 г. В 1994 г. запущена станция наблюдения Солнца SOHO (NASA, ESA). В рамках проекта Genesis (2005 г.) реализовано интересное маневрирование между окрестностями точек либрации L_1 и L_2 . Космический аппарат Чанъэ-2 CNSA в 2011 г. совершил маневры в окрестности точки L_2 . Проект Спектр-РГ Роскосмоса и DLR был реализован в 2019 г. и посвящен построению схемы карты Вселенной в рентгеновском диапазоне.

В последние годы имеются практические достижения космической навигации, применяющие солнечный парус. Исследования космических полетов с солнечным парусом ведутся давно. Можно сказать, что разработана фундаментальная теоретическая база для полетов. Настоящие трудности обусловлены технической реализацией размещения солнечного паруса в космическом пространстве и управления им для маневрирования. Также к актуальным проблемам для современных полетов такого рода относится разработка подходящих систем управления, которые, с одной стороны, будут эффективно работать, а с другой, — просты и естественны. Потому следует отметить монографии [1, 2], содержащие фундаментальные исследования в этой области. Полетам с солнечным парусом, связанным с точками либрации, посвящено

^{*} Работа выполнена при финансовой поддержке Санкт-Петербургского государственного университета (проект № 95438429).

[©] Санкт-Петербургский государственный университет, 2024

немало работ. В [3] проведены исследования в рамках линеаризованных уравнений круговой ограниченной задачи трех тел. В [4] предлагается с помощью сил светового давления управлять взаимным расстоянием группировки космических аппаратов в окрестности точки либрации L_2 . В [5] изучена задача изменения площади паруса и его ориентации для удержания в окрестности условно-периодической орбиты в окрестности точки либрации. В 2020–2023 гг. авторами настоящей работы были опубликованы статьи [6–8], посвященные решению задачи управления солнечным парусом в окрестности точки либрации, спецификой которой является использование специальной функции фазовых переменных, где рост модуля свидетельствует об уходе из окрестности точки либрации.

Коллинеарные точки неустойчивые [9], и, таким образом, задача управления нужна не только для маневрирования, но и для удержания космического аппарата (KA) в этих областях пространства.

В представленной работе изучается орбитальное движение в окрестности коллинеарной точки либрации L_1 системы Солнце—Земля. Здесь оказывается удобно применить специальную нелинейную аппроксимацию ограниченной круговой задачи трех тел, так называемую модель Хилла. Точки Лагранжа, или точки либрации, являются модельными понятиями круговой ограниченной задачи трех тел и ее частными решениями (рис. 1). При этом подразумевается, что система трех тел, т. е. КА и два массивных небесных тела, сохраняет свою геометрическую конфигурацию в течение времени. Будем рассматривать коллинеарную точку Лагранжа L_1 системы Солнце—Земля. Эта точка является неустойчивой, и для длительного пребывания в ее окрестности требуется решать задачу управления. Окрестность L_1 — притягательное место для реализации многих космических проектов.



Puc. 1. Положения точек либрации

Опубликовано много научных работ, посвященных движению в окрестности точек либрации, в частности обзор [10]. Обычно стратегия полета в окрестность точки либрации заключается в полете с околоземной орбиты на заранее просчитанную орби-

Вестник СПбГУ. Прикладная математика. Информатика... 2024. Т. 20. Вып. 2

ту около точки либрации, так называемую гало-орбиту. На таких орбитах KA может находиться в неуправляемом режиме несколько месяцев с последующей коррекцией орбиты в виде малых импульсов. В этой статье рассматривается другая задача, когда подразумевается реализация непрерывного управления для удержания KA.

Перспективно использовать солнечный парус для решения такой задачи [1, 2]. Ранее нами была опубликована серия работ, посвященная применению солнечного паруса в задаче орбитального маневрирования в окрестности L_1 за счет изменения ориентации паруса [6–8].

В настоящей работе предполагается, что управляющим параметром является отражательная способность солнечного паруса. Решение дается в виде синтеза, причем управление зависит только от одной фазовой переменной.

2. Математическая модель движения КА. Уравнения неуправляемого движения КА в геоцентрических координатах в рамках круговой задачи трех тел можно записать в виде [9]

$$\ddot{\tilde{x}} = -\frac{\gamma m_1 \tilde{x}}{||\tilde{x}||^3} + \gamma m_2 \left(\frac{Rl(t) - \tilde{x}}{||Rl(t) - \tilde{x}||^3} - \frac{1}{R^2} l(t) \right),\tag{1}$$

где $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ — геоцентрические координаты КА; γ — гравитационная постоянная; m_1, m_2 — массы Земли и Солнца; R — расстояние между Землей и Солнцем (1 а.е.); l(t) — единичный вектор, направленный по линии Земля — Солнце.

Если положить $\tilde{y}=\dot{\tilde{x}},$ то уравнение (1) приводится к гамильтоновой системе с гамильтонианом

$$H_1(\tilde{x}, \tilde{y}, t) = \frac{1}{2}\tilde{y}\tilde{y} - \frac{\gamma m_1}{||\tilde{x}||} - \frac{\gamma m_2}{R} \left(\frac{1}{\left|\left|l(t) - \frac{\tilde{x}}{R}\right|\right|} - \frac{l(t)\tilde{x}}{R}\right).$$

Далее, как показано в работе [11], раскладывая, следуя Хиллу [12], солнечный потенциал по величинам $\frac{\tilde{x}}{R}$ (которые малы в окрестности первой точки либрации), вводя специальную систему единиц и переходя во вращающуюся систему координат с помощью канонической замены переменных с производящей функции поворота

$$S(\tilde{x}, y, t) = y_1(\tilde{x}_1 \cos \omega t + \tilde{x}_2 \sin \omega t) + y_2(-\tilde{x}_1 \sin \omega t + \tilde{x}_2 \cos \omega t),$$

получаем аппроксимированные уравнения движения ограниченной задачи трех тел в виде, который принято называть хилловским приближением или уравнениями модели Хилла [10, 11]

$$\dot{x}_1 = y_1 + x_2, \quad \dot{y}_1 = -\frac{3x_1}{||x||^3} + 2x_1 + y_2,
\dot{x}_2 = y_2 - x_1, \quad \dot{y}_2 = -\frac{3x_2}{||x||^3} - x_2 - y_1,
\dot{x}_3 = y_3, \qquad \dot{y}_3 = -\frac{3x_3}{||x||^3} - x_3,$$
(2)

здесь $x = (x_1, x_2, x_3)$ — координаты КА во вращающейся системе координат, $y = (y_1, y_2, y_3)$ — импульсы. Расстояние между центром масс Земли и точкой либрации (примерно 0.01 а.е.) берется в качестве единицы расстояния. Единица времени берется из соображения, что время обращения Земли вокруг Солнца (1 год) равно 2π единиц времени ($\omega = 1$). В этом случае единица скорости составляет 303.14 м/с, а единица ускорения — $5.93 \cdot 10^{-5}$ м/с².

Точка либрации L₁ в системе (2) является стационарной с координатами

$$x^* = (1, 0, 0), \quad y^* = (0, 1, 0).$$

Система (2) имеет гамильтонов вид с гамильтонианом

$$H(x,y) = \frac{1}{2}||y||^2 - \frac{3}{||x||} - \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{||x||^2}{2} + x_2y_1 - x_1y_2.$$

Уравнения управляемого движения записываются в виде

$$\dot{x}_1 = y_1 + x_2, \quad \dot{y}_1 = -\frac{3x_1}{||x||^3} + 2x_1 + y_2 + u_1,
\dot{x}_2 = y_2 - x_1, \quad \dot{y}_2 = -\frac{3x_2}{||x||^3} - x_2 - y_1 + u_2,
\dot{x}_3 = y_3, \qquad \dot{y}_3 = -\frac{3x_3}{||x||^3} - x_3 + u_3.$$
(3)

В работе [10] был предложен закон управления

$$u_1(x_1) = a(x_1 - 1), \ a < -9,$$

$$u_2 = 0,$$

$$u_3 = 0.$$
(4)

Из (4) видно, что управляющее воздействие реализуется по линии Солнце — Земля. Таким образом, управление в системе (3) будет входить только при \dot{y}_1 . В работах [11, 13] показано, что управлением $u_1(x) = a(x_1 - 1)$ при a < -9 обеспечивается устойчивость по Ляпунову стационарного решения (x^*, y^*) системы (2). Действительно, система (3) с управлением (4) имеет гамильтонову форму. Гамильтониан записывается следующим образом:

$$H^*(x,y) = \frac{1}{2}||y||^2 - \frac{3}{||x||} - \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{||x||^2}{2} + x_2y_1 - x_1y_2 - \frac{a}{2}(x_1 - 1)^2.$$

В линеаризованном случае гамильтониан $H^*(x, y)$ будет иметь вид

$$H^*_{\rm lin}(x,y) = \frac{1}{2}(y_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}(y_1 + x_2)^2 + \frac{3}{2}x_2^2 - \left(\frac{9+a}{2}\right)(x_1 - 1)^2 + \frac{1}{2}y_3^2 + 2x_3^2,$$

откуда видно, что при a < -9 квадратичная форма $H^*_{\text{lin}}(x, y)$ положительно определенная. Полная производная от гамильтониана $H^*(x, y)$ равна нулю, и из положительной определенности квадратичной формы $H^*_{\text{lin}}(x, y)$ следует, что гамильтониан $H^*(x, y)$ будет функцией Ляпунова системы (3), (4) в некоторой окрестности точки либрации в фазовом пространстве. Таким образом, управление $u_1(x_1)$ обеспечивает устойчивость по Ляпунову стационарного решения (x^*, y^*) управляемой системы (3), (4).

Приведем уравнения движения в случае, когда управление реализуется с помощью солнечного паруса [6–8]:

$$\begin{split} \dot{x}_1 &= y_1 + x_2, \quad \dot{y}_1 = -\frac{3x_1}{||x||^3} + 2x_1 + y_2 - 2k\frac{pS}{m}\cos^3\varphi - (1-k)\frac{pS}{m}\cos\varphi, \\ \dot{x}_2 &= y_2 - x_1, \quad \dot{y}_2 = -\frac{3x_2}{||x||^3} - x_2 - y_1 - 2k\frac{pS}{m}\cos^3\varphi\sin\varphi, \\ \dot{x}_3 &= y_3, \qquad \dot{y}_3 = -\frac{3x_3}{||x||^3} - x_3, \end{split}$$

где m — масса паруса; S — его площадь; p — солнечное давление; k — коэффициент отражательной способности, $k \in [0,1]$; φ — угол ориентации паруса (рис. 2). При k = 1 парус имеет идеальную отражательную поверхность, при k = 0 обладает абсолютно черной поверхностью.

Вестник СПбГУ. Прикладная математика. Информатика... 2024. Т. 20. Вып. 2



Рис. 2. Модель солнечного паруса

Управляемое движение с солнечным парусом в случае, когда поверхность паруса перпендикулярна солнечным лучам (угол $\varphi = 0$), описывается уравнениями

$$\dot{x}_1 = y_1 + x_2, \quad \dot{y}_1 = -\frac{3x_1}{||x||^3} + 2x_1 + y_2 - k\frac{pS}{m} - \frac{pS}{m},
\dot{x}_2 = y_2 - x_1, \quad \dot{y}_2 = -\frac{3x_2}{||x||^3} - x_2 - y_1,
\dot{x}_3 = y_3, \qquad \dot{y}_3 = -\frac{3x_3}{||x||^3} - x_3$$
(5)

в соответствии с законом управления (4). Коэффициент отражательной способности k будем рассматривать как элемент управления. Далее управление, с помощью которого обеспечивается устойчивость по Ляпунову, реализуется через давление солнечных лучей. Далее, будем считать, что отражательная способность паруса — это управление, реализующее закон $u_1(x) = a(x_1 - 1)$ при a < -9. В связи с тем, что давление солнечных лучей направлено от Солнца, стационарная точка смещается, и, согласно уравнениям (3)–(5), закон управления запишется так:

$$\widetilde{u}_1(x) = a(x_1 - 1 - \delta) = -k\frac{pS}{m} - \frac{pS}{m},$$
(6)

где константа $\delta > 0$ связана с фотогравитационной точкой либрации при коэффициенте отражения k = 0.5.

3. Численное моделирование. Рассмотрим движение КА с солнечным парусом с массой m = 5 кг и площадью паруса S = 32 м². Приведем начальные данные для траектории движения КА, представленной на рис. 3:

$$x(0) = (1.093, 0.001, 0), \quad y(0) = (0, 1.089, 0).$$

Движение происходит в плоскости эклиптики. Рисунок 3 иллюстрирует управляемое движение КА в окрестности фотогравитационной точки либрации, на рисунке показана явная картина устойчивости по Ляпунову, временной интервал представленного графика — порядка 20 месяцев, а коэффициент в управлении a = -12. Управление (6) обеспечивает устойчивость по Ляпунову движения КА в окрестности фотогравитационной точки либрации. При определении фотогравитационной точки либрации коэффициент k = 0.5, тогда для рассматриваемого примера параметр



Puc. 3. Траектория управляемого движения солнечного паруса



 $x^* = (1.089116540, 0, 0), \quad y^* = (0, 1.089116540, 0).$



Рис. 4. Графики управления (a) и управляющего параметра (б)

На рис. 4, *а* приведен график функции управления на временном промежутке порядка 20 месяцев.

На рис. 4, б показана зависимость коэффициента отражения k от времени. Значения коэффициента отражения в представленном моделировании не выходят за границы отрезка [0, 1]. Однако при других начальных данных, удаленных от точки либрации более чем на несколько тысяч километров, уже наблюдается выход величины коэффициента отражения из отрезка [0, 1]. Таким образом, возникает задача управляемости или построения окрестности L_1 в фазовом пространстве, в которой задача удержания КА решается с помощью солнечного паруса с изменяющейся отражательной способностью и заданной парусностью. Также, одним из перспективных подходов для построения таких управлений являются методы машинного обучения.

4. Заключение. В настоящей работе рассмотрена возможность стабилизации орбитального движения в окрестности коллинеарной точки либрации L_1 системы Солнце — Земля с помощью сил светового давления. При этом отказались от управления пространственной ориентацией солнечного паруса, поскольку на практике реализация такого управления технически весьма сложна. В описываемой постановке поверхность солнечного паруса расположена перпендикулярно направлению солнечных лучей, а управлением является отражающая способность солнечного паруса.

Основной вывод из численного моделирования следующий: КА с парусностью $64 \text{ см}^2/\text{г}$ можно удержать, изменяя отражательную способность, в окрестности фотогравитационной точки либрации на расстоянии несколько тысяч километров от этой точки. Положение самой фотогравитационной точки определяется параметром δ , задающим ее отклонение от точки либрации L_1 .

Литература

1. Поляхова Е. Н. Космический полет с солнечным парусом. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2011. 320 с.

2. McInnes C. R. Solar sailing // Technology, dynamics and mission applications. Berlin; London: Springer, 1999. 296 p. (Springer-Praxis Series in Space Science and Technology)

3. Лукъянов С. С. Управление движением космического аппарата в окрестности коллинеарной точки либрации круговой задачи трех тел с помощью сил светового давления // Космические исследования. 1981. Т. 19. № 4. С. 518–527.

4. Назиров Р. Р., Эйсмонт Н. А., Чумаченко Е. Н., Данхэм Д. У., Логашина И. В., Федоренко А. Н. Управление группировкой космических аппаратов в окрестности солнечно-земных коллинеарных точек либрации с помощью солнечного паруса // Вестник машиностроения. 2013. № 2. С. 43–46.

5. Bookless J., McInnes C. Control of Lagrange point orbits using solar sail propulsion // Acta Astronautica. 2008. Vol. 62. P. 159–176.

6. Shymanchuk D. V., Shmyrov A. S., Shmyrov V. A. Controlled motion of a solar sail in the vicinity of a collinear libration point // Astronomy Letters. 2020. Vol. 46. N 3. P. 185–192.

7. Shymanchuk D. V., Shmyrov A. S., Shmyrov V. A. Orbital maneuvering in the vicinity of collinear libration points using light pressure forces // Astronomy Letters. 2021. Vol. 47. N 10. P. 710–719.

8. Shymanchuk D. V., Shmyrov A. S., Shmyrov V. A. Stabilization of the orbital motion of a solar sail in the vicinity of a collinear libration point through a change in reflectivity // Astronomy Letters. 2022. Vol. 48. N 8. P. 469–477.

9. Маркеев А. П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с. 10. Gomez G., Llibre J., Martinez R., Simo C. Dynamics and mission design near libration points.

Vol. 1. Fundamentals: The case of collinear libration points. Singapore: World Scientific, 2001. 462 p.

11. Шмыров В. А. Стабилизация управляемого орбитального движения космического аппарата в окрестности коллинеарной точки либрации L₁ // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. Сер. 10. 2005. Вып. 1–2. С. 192–198.

12. $H\!ill$ G. W. Researches in the lunar theory // American Journal of Mathematics. 1878. Vol. 1. P. 5–26.

13. Shmyrov A. S., Shmyrov V. A. On controllability region of orbital motion near L_1 // Applied Mathematical Sciences. 2015. Vol. 9. P. 7229–7236.

Статья поступила в редакцию 27 января 2024 г. Статья принята к печати 12 марта 2024 г.

Контактная информация: Шмыров Александр Сергеевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; a.shmyrov@sbpu.ru Шмыров Василий Александрович — канд. физ.-мат. наук, доц.; v.shmyrov@spbu.ru Шиманчук Дмитрий Викторович — канд. физ.-мат. наук, доц.; d.shimanchuk@spbu.ru

Controlling the orbital motion of the spacecraft near the libration point by changing the solar sail reflectivity^{*}

A. S. Shmyrov, V. A. Shmyrov, D. V. Shymanchuk

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Shmyrov A. S., Shmyrov V. A., Shymanchuk D. V. Controlling the orbital motion of the spacecraft near the libration point by changing the solar sail reflectivity. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2024, vol. 20, iss. 2, pp. 298–306. https://doi.org/10.21638/spbu10.2024.214 (In Russian)

The article considers the strategy of keeping the spacecraft in the vicinity of the unstable Lagrange point (libration point) of the Sun—Earth system. This strategy involves the use of special management. This control acts collinearly to the Sun—Earth line and ensures Lyapunov stability of the orbital motion. The implementation of such control is proposed using a solar sail. The advantages and difficulties of such a strategy are discussed.

Keywords: three bodies problem, libration point, solar sail, control, keeping, machine learning.

References

1. Polyakhova E. N. Kosmicheskiy polet s solnechnym parusom [Space flight with solar sail]. Moscow, Book House "LIBROKOM" Publ., 2011, 320 p. (In Russian)

2. McInnes C. R. Solar sailing *Technology, dynamics and mission applications*. Berlin, London, Springer, 1999, 296 p. (Springer-Praxis Series in Space Science and Technology)

3. Lukyanov S. S. Upravleniye dvizheniyem kosmicheskogo apparata v okrestnosti kollinearnoy tochki libratsii krugovoy zadachi trekh tel s pomoshch'yu sil svetovogo davleniya [Control of the motion of a spacecraft in the vicinity of the collinear libration point of a circular three-body problem using light pressure forces]. Space Research, 1981, vol. 19, no. 4, pp. 518–527. (In Russian)

4. Nazirov R. R., Eismont N. A., Chumachenko E. N., Danhem D. U., Logashina I. V., Fedorenko A. N. Upravleniye gruppirovkoy kosmicheskikh apparatov v okrestnosti solnechno-zemnykh kollinearnykh tochek libratsii s pomoshch'yu solnechnogo parusa [Control of a grouping of spacecraft in the vicinity of the solar-terrestrial collinear libration points using a solar sail]. *Vestnik of Mechanical Engineering*, 2013, no. 2, pp. 43–46. (In Russian)

5. Bookless J., McInnes C. Control of Lagrange point orbits using solar sail propulsion. Acta Astronautica, 2008, vol. 62, pp. 159–176.

6. Shymanchuk D. V., Shmyrov A. S., Shmyrov V. A. Controlled motion of a solar sail in the vicinity of a collinear libration point. *Astronomy Letters*, 2020, vol. 46, no. 3, pp. 185–192.

^{*} This research was supported by Saint Petersburg State University, project N 95438429.

7. Shymanchuk D. V., Shmyrov A. S., Shmyrov V. A. Orbital maneuvering in the vicinity of collinear libration points using light pressure forces. *Astronomy Letters*, 2021, vol. 47, no. 10, pp. 710–719.

8. Shymanchuk D. V., Shmyrov A. S., Shmyrov V. A. Stabilization of the orbital motion of a solar sail in the vicinity of a collinear libration point through a change in reflectivity. *Astronomy Letters*, 2022, vol. 48, no. 8, pp. 469–477.

9. Markeev A. P. Tochki libratsii v nebesnoy mekhanike i kosmodinamike [The libration points in celestial mechanics and space dynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1978, 312 p. (In Russian)

10. Gomez G., Llibre J., Martinez R., Simo C. Dynamics and mission design near libration points. Vol. 1. Fundamentals: The case of collinear libration points. Singapore, World Scientific, 2001, 462 p.

11. Shmyrov V. A. Stabilizatsiya upravlyayemogo orbital'nogo dvizheniya kosmicheskogo apparata v okrestnosti kollinearnoy tochki libratsii L_1 [Stabilization of the controlled orbital motion of a spacecraft in the vicinity of the collinear libration point L_1]. Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes. Series 10, 2005, iss. 1–2, pp. 192–198. (In Russian)

12. Hill G. W. Researches in the lunar theory. American Journal of Mathematics, 1878, vol. 1, pp. 5–26.

13. Shmyrov A. S., Shmyrov V. A. On controllability region of orbital motion near L_1 . Applied Mathematical Sciences, 2015, vol. 9, pp. 7229–7236.

Received: January 25, 2024. Accepted: March 12, 2024.

Authors' information:

Alexander S. Shmyrov - Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; a.shmyrov@spbu.ru

Vasiliy A. Shmyrov — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor; v.shmyrov@spbu.ru

 $Dmitry\ V.\ Shymanchuk$ — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor; d.shimanchuk@spbu.ru