

## Семейства вложенных методов шестого порядка

*И. В. Олемской, О. С. Фирюлина, О. А. Тумка*

Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация,  
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

**Для цитирования:** *Олемской И. В., Фирюлина О. С., Тумка О. А.* Семейства вложенных методов шестого порядка // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2022. Т. 18. Вып. 2. С. 285–296.  
<https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2022.209>

Работа посвящена разработке вложенного семистадийного метода шестого порядка численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Представлено трехпараметрическое семейство семистадийных методов шестого порядка типа Рунге—Кутты. На этом семействе построены многопараметрические семейства вложенных методов шестого порядка двух типов. Для расчетных схем представителей всех найденных семейств вложенных методов проведено сравнительное тестирование.

*Ключевые слова:* задача Коши, вложенные методы, контрольный член, порядок, стадия, условия порядка, упрощающие условия.

**1. Введение.** В работе рассматриваются вложенные методы решения начальной задачи

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0 \quad (1)$$

для обыкновенных дифференциальных уравнений.

В настоящее время для решения такой задачи широко используются [1, 2] явные вложенные методы Рунге—Кутты  $RKp(q)m$ ,  $p \neq q$ ,  $p, q \in N$ . Здесь  $p$  — порядок метода вычисления приближения к решению на шаге,  $q$  — порядок метода «оценщика погрешности» полученного приближения, а  $m$  — число стадий. Данные методы можно разделить на два класса. Для первого при  $p < q$  оценивается погрешность аппроксимации [3], а для второго при  $p > q$  — последние учтенные в приближенном решении члены с  $q + 1$ -го до  $p$ -го. Наиболее известный с середины 50-х годов XX в. метод второго класса был предложен В. А. Егоровым (см. [1]). Это расчетная схема  $RK4(2)4$  («правило  $1/6$ ») четвертого порядка с контрольным членом Егорова. Она почти 20 лет была основной в данном классе при создании алгоритмов интегрирования с автоматическим выбором шага.

Работы Бутчера [4, 5] дали толчок развитию алгебраической теории методов Рунге—Кутты высоких порядков и конструированию на их основе вложенных методов двух классов. Так, для второго класса в [6] были построены расчетные схемы пятого порядка двух типов  $RK5(4)7M$ ,  $RK5(4)7S$ ,  $RK5(4)6M$ . Формально при равенстве точностных характеристик первые две расчетные схемы  $RK5(4)7M$ ,  $RK5(4)7S$  требуют больших вычислительных затрат, чем  $RK5(4)6M$ . Используемая при построении этих методов технология FSAL (First Same As Last — последнее вычисление правой части на текущем шаге является первым на следующем) устраняет фактически данный недостаток. Для методов такого типа в аббревиатуру методов добавляется латинская «F».

Вычислительная схема RK5(4)6 так же, как и расчетные схемы RK6(5)8M, RK8(7)13M, представленные в [7], относится к стандартным классическим методам этого класса.

В работе строятся семейства семистадиальных методов шестого порядка, вложенных методов шестого порядка RK6(4)7 второго класса стандартного типа и вложенных методов шестого порядка RK6(4)8F.

Предполагаем достаточно гладкой правую часть рассматриваемого дифференциального уравнения. Считаем, что известно точное решение  $y(x_n)$  задачи (1) в точке  $x_n \in [X_0, X_k]$ .

Приближение  $p$ -го порядка —  $z_{n+1}$  и  $q$ -го —  $\hat{z}_{n+1}$  к точному решению  $y(x_{n+1})$  в точках  $x_{n+1} \in [X_0, X_k]$ ,  $x_{n+1} = x_n + h_n$ ,  $h_n = \theta(x_n)h$  и  $0 < \theta(x_n) \leq 1$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $z_n = y(x_n)$  ищем соответственно в виде

$$z_{n+1} = z_n + \sum_{\nu=1}^m b_\nu k_\nu(h), \quad \|y(x_{n+1}) - z_{n+1}\| \approx O(h^{p+1}), \quad (2)$$

$$\hat{z}_{n+1} = z_n + \sum_{\nu=1}^m \hat{b}_\nu k_\nu(h), \quad \|y(x_{n+1}) - \hat{z}_{n+1}\| \approx O(h^{q+1}), \quad (3)$$

вычисляя  $k_\nu \equiv k_\nu(h)$  по формулам

$$k_\nu = h_n f \left( x_n + c_\nu h_n, z_n + \sum_{\mu=1}^{\nu-1} a_{\nu\mu} k_\mu \right), \quad (4)$$

где  $b_\nu, c_\nu, a_{\nu\mu}$  — параметры метода;  $h_n$  — шаг интегрирования.

Разность двух приближений ( $E_{n+1} = \|z_{n+1} - \hat{z}_{n+1}\|$  — контрольный член) используется [1, 2] для управления величиной шага  $h_n$  интегрирования:

$$h_{n+1} = 0.9h_n \left( \frac{\text{tol}}{E_{n+1}} \right)^{\frac{1}{q+1}}, \quad (5)$$

где (5)  $\text{tol}$  — максимально допустимое значение контрольного члена.

**2. Семейство явных методов шестого порядка.** 35 параметров  $b_i, c_i, a_{i,j}$  явного семистадиального ( $m = 7$ ) метода (2) шестого порядка должны удовлетворять [5] системе 37 нелинейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{\nu} b_\nu c_\nu^s &= \frac{1}{s+1}, \quad s = 0, 1, \dots, 5, \\ \sum_{\nu} b_\nu c_\nu^s \sum_{\mu} a_{\nu,\mu} c_\mu &= \frac{1}{2(3+s)}, \quad s = 0, 1, 2, 3, \\ \sum_{\nu} b_\nu c_\nu^s \sum_{\mu} a_{\nu,\mu} c_\mu^2 &= \frac{1}{3(4+s)}, \quad s = 0, 1, 2, \\ \sum_{\nu} b_\nu c_\nu^s \sum_{\mu} a_{\nu,\mu} \sum_{\xi} a_{\mu,\xi} c_\xi &= \frac{1}{6(4+s)}, \quad s = 0, 1, 2, \\ \sum_{\nu} b_\nu c_\nu^s \left( \sum_{\mu} a_{\nu,\mu} c_\mu \right) \cdot \left( \sum_{\mu} a_{\nu,\mu} c_\mu \right) &= \frac{1}{4(5+s)}, \quad s = 0, 1, \\ \sum_{\nu} b_\nu c_\nu^s \sum_{\mu} a_{\nu,\mu} c_\mu^3 &= \frac{1}{4(5+s)}, \quad s = 0, 1, \\ \sum_{\nu} b_\nu \sum_{\mu} a_{\nu,\mu} c_\mu^s \sum_{\xi} a_{\mu,\xi} c_\xi^d &= \frac{1}{10(s+d)(1+d)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (s, d) \in \{(0, 2), (0, 3), (2, 1), (1, 2)\}, \\
& \sum_{\nu} b_{\nu} \sum_{\mu} a_{\nu, \mu} c_{\mu}^s \sum_{\xi} a_{\mu, \xi} c_{\xi}^d \sum_{\psi} a_{\xi, \psi} c_{\psi}^{\rho} = \frac{1}{60(s+2d+2\rho)}, \\
& (s, d, \rho) \in \{(0, 0, 1), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}, \\
& \sum_{\nu} b_{\nu} \left( \sum_{\mu} a_{\nu, \mu} c_{\mu} \right) \cdot \left( \sum_{\mu} a_{\nu, \mu} c_{\mu}^2 \right) = \frac{1}{36}, \\
& \sum_{\nu} b_{\nu} \sum_{\mu} a_{\nu, \mu} c_{\mu}^4 = \frac{1}{30}, \\
& \sum_{\nu} b_{\nu} \left( \sum_{\mu} a_{\nu, \mu} \sum_{\xi} a_{\mu, \xi} c_{\xi} \right) \cdot \left( \sum_{\mu} a_{\nu, \mu} c_{\mu} \right) = \frac{1}{72}, \\
& \sum_{\nu} b_{\nu} c_{\nu} \sum_{\mu} a_{\nu, \mu} \sum_{\xi} a_{\mu, \xi} c_{\xi}^s = \frac{1}{24(1+s)}, \quad s = 1, 2, \\
& \sum_{\nu} b_{\nu} \sum_{\mu} a_{\nu, \mu} \left( \sum_{\xi} a_{\mu, \xi} c_{\xi} \right) \cdot \left( \sum_{\xi} a_{\mu, \xi} c_{\xi} \right) = \frac{1}{120}, \\
& \sum_{\nu} b_{\nu} c_{\nu} \sum_{\mu} a_{\nu, \mu} \sum_{\xi} a_{\mu, \xi} \sum_{\psi} a_{\xi, \psi} c_{\psi} = \frac{1}{144}, \\
& \sum_{\nu} b_{\nu} \sum_{\mu} a_{\nu, \mu} \sum_{\xi} a_{\mu, \xi} \sum_{\psi} a_{\xi, \psi} c_{\psi}^2 = \frac{1}{360}, \\
& \sum_{\nu} b_{\nu} \sum_{\mu} a_{\nu, \mu} \sum_{\xi} a_{\mu, \xi} \sum_{\psi} a_{\xi, \psi} \sum_{\phi} a_{\psi, \phi} c_{\phi} = \frac{1}{720}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Для решения системы (6) используются упрощающие ограничения [8, 9] вида

$$\begin{aligned}
& \sum_{\nu=1}^{w-1} a_{w, \nu} c_{\nu}^{\tau} = \frac{c_w^{\tau+1}}{\tau+1}, \quad \tau = 0, 1, 2, \\
& \sum_{\nu=3}^m b_{\nu} c_{\nu}^{\xi} a_{\nu, 2} = 0, \quad \xi = 1, 2, \\
& \sum_{\nu=s+1}^m b_{\nu} a_{\nu, s} = b_s (1 - c_s), \quad s = 1, \dots, m-1.
\end{aligned} \tag{7}$$

Такой состав упрощающих ограничений не случаен. Именно ограничения (7) обеспечивают совместность системы 1224 нелинейных уравнений (условий шестого порядка) при построении структурных методов [10, 11].

Применение (7) к системе (6) с одновременной проверкой на совместность расширенной системы-следствия (6), (7) позволяет свести задачу поиска решения исходной системы (6) к решению системы-следствия:

$$c_1 = 0, \quad c_7 = 1, \quad b_2 = 0, \quad a_{2,1} = c_2, \quad c_3 = \frac{3c_2}{2}, \quad c_4 = \frac{6c_2}{135c_2^2 - 60c_2 + 8}, \tag{8}$$

$$\sum_{\nu=1}^m b_{\nu} c_{\nu}^s = \frac{1}{s+1}, \quad s = 0, 1, \dots, 5, \tag{9}$$

$$\sum_{\nu=1}^{w-1} a_{w, \nu} c_{\nu}^r = \frac{c_w^{r+1}}{r+1}, \quad w = 3, \dots, 6, \quad r = 0, 1, 2, \tag{10}$$

$$\sum_{\nu=3}^m b_{\nu} c_{\nu}^r a_{\nu, 2} = 0, \quad r = 0, 1, 2, \tag{11}$$

$$\sum_{\nu=s+1}^m b_\nu a_{\nu,s} = b_s (1 - c_s), \quad s = 3, \dots, 6, \quad (12)$$

$$\sum_{\nu=4}^m b_\nu c_\nu \sum_{\mu=3}^{\nu-1} a_{\nu,\mu} c_\mu^3 = \frac{1}{24}. \quad (13)$$

Ограничения (8) на параметры  $c_3, c_4, c_7$  обеспечивают совместность системы-следствия (6), (7). Причем решение системы (8)–(13) сводится к последовательному решению двух систем. Решение первой – (9) (линейной относительно  $b_\nu$ ) – позволяет выразить весовые параметры  $b_\nu$  через свободные параметры  $c_2, c_5, c_6$ :

$$b_3 = \frac{((3240 - 5400 c_6) c_5 + 3240 c_6 - 2160) c_2^2 + ((2880 c_6 - 1680) c_5 - 1680 c_6 + 1104) c_2 + (192 - 320 c_6) c_5 + 192 c_6 - 128}{c_2^2 (405 c_2 - 270 c_5) (3 c_2 - 2 c_6) (405 c_2^3 - 450 c_2^2 + 132 c_2 - 8)},$$

$$b_4 = \frac{(30 c_2 c_5 c_6 - 15 c_2 c_5 - 15 c_2 c_6 - 10 c_5 c_6 + 9 c_2 + 6 c_5 + 6 c_6 - 4) (135 c_2^2 - 60 c_2 + 8)^5}{c_2^2 (145 800 c_2^2 - 71 280 c_2 + 8640) (135 c_2^2 c_6 - 60 c_2 c_6 - 6 c_2 + 8 c_6) (135 c_2^2 c_5 - 60 c_2 c_5 - 6 c_2 + 8 c_5) (135 c_2^2 - 60 c_2 + 4)},$$

$$b_5 = \frac{(45 c_2^2 - 30 c_2 + 4) (45 c_2 c_6 - 27 c_2 - 12 c_6 + 8)}{60 c_5 (1 - c_5) (135 c_2^2 c_5 - 60 c_2 c_5 - 6 c_2 + 8 c_5) (c_6 - c_5) (3 c_2 - 2 c_5)}, \quad (14)$$

$$b_6 = \frac{(45 c_2^2 - 30 c_2 + 4) (45 c_2 c_5 - 27 c_2 - 12 c_5 + 8)}{60 c_6 (1 - c_6) (2 c_6 - 3 c_2) (c_6 - c_5) (135 c_2^2 c_6 - 60 c_2 c_6 - 6 c_2 + 8 c_6)},$$

$$b_7 = \frac{M(c_2, c_5, c_6)}{60(3c_2 - 2)(135c_2^2 - 66c_2 + 8)(1 - c_5)(1 - c_6)}, \quad b_1 = 1 - \sum_{\nu=3}^7 b_\nu,$$

где

$$M(c_2, c_5, c_6) = (8100 c_5 c_6 - 6075 c_5 - 6075 c_6 + 4860) c_2^3 - (8190 c_5 c_6 - 6300 c_5 - 6300 c_6 + 5130) c_2^2 + (2520 c_5 c_6 - 1980 c_5 - 1980 c_6 + 1632) c_2 - 240 c_5 c_6 + 192 c_5 + 192 c_6 - 160.$$

При таком образом определенных  $b_\nu$  оставшиеся уравнения системы-следствия (10)–(13) линейны относительно  $a_{\nu,\mu}$  и могут быть выражены через свободные параметры  $c_2, c_5, c_6$ :

$$a_{3,2} = \frac{9 c_2}{8}, \quad a_{4,2} = \frac{18 c_2 (405 c_2^2 - 180 c_2 + 16)}{(135 c_2^2 - 60 c_2 + 8)^3}, \quad a_{4,3} = -\frac{24 c_2 (135 c_2^2 - 60 c_2 + 4)}{(135 c_2^2 - 60 c_2 + 8)^3},$$

$$a_{5,3} = \frac{c_5 (3 c_2 - 2 c_5) (8100 c_2^3 c_5 - 1620 c_2^3 - 5220 c_2^2 c_5 + 720 c_2^2 + 960 c_2 c_5 - 24 c_2 - 64 c_5)}{27 c_2^2 (45 c_2^2 - 30 c_2 + 4) (135 c_2^2 - 60 c_2 + 4)},$$

$$a_{5,4} = \frac{c_5 (3 c_2 - 2 c_5) (135 c_2^2 c_5 - 60 c_2 c_5 - 6 c_2 + 8 c_5) (135 c_2^2 - 60 c_2 + 8)^2}{108 c_2^2 (45 c_2^2 - 30 c_2 + 4) (135 c_2^2 - 60 c_2 + 4)},$$

$$a_{5,2} = \frac{15 c_5^3 - 15 c_5^2 + 3 c_5}{45 c_2^2 - 30 c_2 + 4}, \quad a_{6,2} = \frac{15 c_6^3 - 15 c_6^2 + 3 c_6}{45 c_2^2 - 30 c_2 + 4}, \quad (15)$$

$$a_{7,2} = \frac{((405 c_6 - 270) c_5 - 270 c_6 + 189) c_2 + (84 - 120 c_6) c_5 + 84 c_6 - 60}{M(c_2, c_5, c_6)},$$

$$a_{7,3} = \frac{4(3c_2 - 2)Q_{7,3}(c_2, c_5, c_6)}{27c_2^2(3c_2 - 2c_5)(3c_2 - 2c_6)(135c_2^2 - 60c_2 + 4)M(c_2, c_5, c_6)},$$

$$a_{7,4} = \frac{(3 c_2 - 2) (15 c_2 - 4) (9 c_2 - 2) (135 c_2^2 - 60 c_2 + 8)^2 Q_{7,4}(c_2, c_5, c_6)}{108 c_2^2 (135 c_2^2 - 60 c_2 + 4) (135 c_2^2 c_6 - 60 c_2 c_6 - 6 c_2 + 8 c_6) (135 c_2^2 c_5 - 60 c_2 c_5 - 6 c_2 + 8 c_5) M(c_2, c_5, c_6)},$$

$$a_{7,5} = \frac{(3 c_2 - 2) (9 c_2 - 2) (15 c_2 - 4) (1 - c_5) Q_{7,5}(c_2, c_5, c_6)}{c_5 (3 c_2 - 2 c_5) (135 c_2^2 c_5 - 60 c_2 c_5 - 6 c_2 + 8 c_5) (c_5 - c_6) M(c_2, c_5, c_6)},$$

$$a_{6,3} = \frac{b_3 (1 - c_3) - b_4 a_{4,3} - b_5 a_{5,3} - b_7 a_{7,3}}{b_6}, \quad a_{6,4} = \frac{b_4 (1 - c_4) - a_{5,4} b_5 - a_{7,4} b_7}{b_6},$$

$$a_{6,5} = \frac{b_5(1 - c_5) - b_7 a_{7,5}}{b_6}, \quad a_{7,6} = \frac{(1 - c_6)b_6}{b_7}, \quad a_{i,1} = c_i - \sum_{\nu=2}^{i-1} a_{i,\nu}, \quad i = 3, \dots, 7,$$

где  $Q_{7,\nu}(c_2, c_5, c_6)$  ( $\nu = 3, 4, 5$ ) — многочлены, введенные для полного и компактного представлений построенного семейства решений системы (6) (семейство семистадиальных расчетных схем шестого порядка):

$$\begin{aligned} Q_{7,3}(c_2, c_5, c_6) = & \left( 328\,050c_2^6c_5c_6 - 218\,700c_2^5c_5^2c_6 - 218\,700c_2^5c_5c_6^2 + 1239\,300c_2^4c_5^2c_6^2 - \right. \\ & - 164\,025c_2^6c_5 + 328\,050c_2^6c_6 - 218\,700c_2^5c_5^2 - 364\,500c_2^5c_5c_6 - 218\,700c_2^5c_6^2 - \\ & - 1433\,700c_2^4c_5^2c_6 - 1433\,700c_2^4c_5c_6^2 - 1231\,200c_2^3c_5^2c_6^2 - 229\,635c_2^6 + 783\,675c_2^5c_5 - \\ & - 222\,345c_2^5c_6 + 906\,390c_2^4c_5^2 + 2629\,260c_2^4c_5c_6 + 906\,390c_2^4c_6^2 + 1573\,020c_2^3c_5^2c_6 + \\ & + 1573\,020c_2^3c_5c_6^2 + 440\,640c_2^2c_5^2c_6^2 + 87\,480c_2^5 - 1805\,490c_2^4c_5 - 993\,870c_2^4c_6 - \\ & - 766\,260c_2^3c_5^2 - 2511\,000c_2^3c_5c_6 - 766\,260c_2^3c_6^2 - 586\,440c_2^2c_5^2c_6 - 586\,440c_2^2c_5c_6^2 - \\ & - 67\,680c_2c_5^2c_6^2 + 501\,228c_2^4 + 1359\,720c_2^3c_5 + 1027\,296c_2^3c_6 + 263\,088c_2^2c_5^2 + \\ & + 908\,784c_2^2c_5c_6 + 263\,088c_2^2c_6^2 + 92\,736c_2c_5^2c_6 + 92\,736c_2c_5c_6^2 + 3840c_5^2c_6^2 - \\ & - 480\,816c_2^3 - 447\,984c_2^2c_5 - 374\,544c_2^2c_6 - 40\,320c_2c_5^2 - 143\,136c_2c_5c_6 - 40\,320c_2c_6^2 - \\ & - 5376c_5^2c_6 - 5376c_5c_6^2 + 169\,920c_2^2 + 67\,584c_2c_5 + 59\,232c_2c_6 + 2304c_5^2 + \\ & \left. + 8320c_5c_6 + 2304c_6^2 - 26\,496c_2 - 3840c_5 - 3456c_6 + 1536 \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{7,4}(c_2, c_5, c_6) = & \left( 3280\,500c_2^5c_5^2c_6^2 - 4100\,625c_2^5c_5^2c_6 - 4100\,625c_2^5c_5c_6^2 - 4009\,500c_2^4c_5^2c_6^2 + \right. \\ & + 5904\,900c_2^5c_5c_6 + 1640\,250c_2^5c_6^2 + 5175\,900c_2^4c_5^2c_6 + 5175\,900c_2^4c_5c_6^2 + 2008\,800c_2^3c_5^2c_6^2 - \\ & - 2624400c_2^5c_5 - 2296\,350c_2^5c_6 - 2150\,550c_2^4c_5^2 - 7654\,500c_2^4c_5c_6 - 2150\,550c_2^4c_6^2 - \\ & - 2656\,800c_2^3c_5^2c_6 - 2656\,800c_2^3c_5c_6^2 - 518\,400c_2^2c_5^2c_6^2 + 984\,150c_2^5 + 3499\,200c_2^4c_5 + \\ & + 3047\,220c_2^4c_6 + 1127\,520c_2^3c_5^2 + 3998\,160c_2^3c_5c_6 + 1127\,520c_2^3c_6^2 + 699\,840c_2^2c_5^2c_6 + \\ & + 699\,840c_2^2c_5c_6^2 + 69\,120c_2c_5^2c_6^2 - 1326\,780c_2^4 - 1854900c_2^3c_5 - 1615\,140c_2^3c_6 - \\ & - 300\,240c_2^2c_5^2 - 1066\,320c_2^2c_5c_6 - 300\,240c_2^2c_6^2 - 95\,040c_2c_5^2c_6 - 95\,040c_2c_5c_6^2 - \\ & - 3840c_5^2c_6^2 + 710\,208c_2^3 + 497\,520c_2^2c_5 + 435\,744c_2^2c_6 + 40\,896c_2c_5^2 + 146\,112c_2c_5c_6 + \\ & + 40\,896c_2c_6^2 + 5376c_5^2c_6 + 5376c_5c_6^2 - 192\,816c_2^2 - 68\,064c_2c_5 - 60\,288c_2c_6 - \\ & \left. - 2304c_5^2 - 8320c_5c_6 - 2304c_6^2 + 26784c_2 + 3840c_5 + 3456c_6 - 1536 \right), \end{aligned}$$

$$Q_{7,5}(c_2, c_5, c_6) = \left( 45c_2^2 - 30c_2 + 4 \right) \left( 45c_2c_6^2 - 9c_2c_5 - 63c_2c_6 - 12c_6^2 + 27c_2 + 2c_5 + 18c_6 - 8 \right).$$

Приведенное решение (8), (14), (15) системы-следствия (8)–(13) является трехпараметрическим семейством семистадиальных явных методов шестого порядка типа Рунге—Кутты (RKS6). S в аббревиатуре метода RKS сообщает о используемом наборе упрощающих ограничений (7) при построении семейства методов.

Выбор свободных параметров  $c_2, c_5, c_6$  подчиняется следующим требованиям:

- 1) ограничения на узловые параметры  $0 \leq c_i \leq 1, i = 1, \dots, m$ , позволяют (с учетом (8)) ограничить область определения:  $c_2 \in \left(0, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{4}{15}, \frac{2}{3}\right)$ ;
- 2) знаменатели в представлении параметров (8), (14), (15) отличны от нуля;
- 3) весовые параметры (14) должны удовлетворять неравенству  $0 \leq b_i \leq 1, i = 1, \dots, m$ .

**3. Семейство вложенных методов РК6(4).** Параметры  $c_\nu, \hat{b}_\nu, b_\nu, a_{\nu,\mu}$  вложенного семистадийного метода (2)–(4) шестого и четвертого порядков должны одновременно удовлетворять системе 37 уравнений (6) для параметров  $c_\nu, b_\nu, a_{\nu,\mu}$  и системе 8 уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{\nu} \hat{b}_{\nu} c_{\nu}^r &= \frac{1}{r+1}, \quad r = 0, 1, 2, 3, \\ \sum_{\nu} \hat{b}_{\nu} \sum_{\mu} a_{\nu\mu} c_{\mu} &= \frac{1}{6}, \\ \sum_{\nu} \hat{b}_{\nu} c_{\nu} \sum_{\mu} a_{\nu\mu} c_{\mu} &= \frac{1}{8}, \\ \sum_{\nu} \hat{b}_{\nu} \sum_{\mu} a_{\nu\mu} c_{\mu}^2 &= \frac{1}{12}, \\ \sum_{\nu} \hat{b}_{\nu} \sum_{\mu} a_{\nu\mu} \sum_k a_{\mu k} c_k &= \frac{1}{24} \end{aligned} \tag{16}$$

для параметров  $c_\nu, \hat{b}_\nu, a_{\nu,\mu}$ .

При уже построенном семействе (8), (14), (15) семистадийных методов шестого порядка и определенных значениях параметров  $b_\nu(c_2, c_5, c_6), a_{\nu,\mu}(c_2, c_5, c_6)$  задача сводится к поиску решения системы (16).

Линейная относительно  $\hat{b}_\nu$  система (16) с учетом выполнения ограничений  $\hat{b}_2 = 0, \sum_{\mu} a_{\nu\mu} c_{\mu}^r = c_{\nu}/(r+1), r = 0, 1, 2$ , приводится к линейной системе пяти уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^7 \hat{b}_{\nu} c_{\nu}^r &= \frac{1}{r+1}, \quad r = 0, 1, 2, 3, \\ \sum_{\nu=4}^7 \hat{b}_{\nu} \sum_{\mu=3}^{\nu-1} a_{\nu\mu} c_{\mu}^2 &= \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Ее решение существует и образует четырехпараметрическое семейство  $\hat{b}_\nu(c_2, c_5, c_6, \hat{b}_6)$ .

Ограничимся здесь представлением частного решения данного семейства, положив  $c_2 = 2/15, c_5 = 2/3, c_6 = 4/5$  и  $\hat{b}_6 = \eta \in R$ . Это однопараметрическое семейство вложенных методов RKS6(4)7 $[\eta]$  представлено в табл. 1.

Для проведения сравнительного тестирования построены расчетные схемы при параметре  $\eta = \frac{5}{21}$  — RKS6(4)7 $\left[\frac{5}{21}\right]$  (табл. 2) и RKS6(4)7 $\left[-\frac{625}{96}\right]$  (табл. 3) при  $\eta = -\frac{625}{96}$ .

Таблица 1. Схема RKS6(4)7[η]

$c_w$	$a_{w,g}$					$b_w$	$\hat{b}_w$
0						$\frac{7}{96}$	$\frac{21}{25}\eta - \frac{1}{12}$
$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$					0	0
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$				$\frac{125}{672}$	$\frac{625}{672} - 4\eta$
$\frac{1}{3}$	$\frac{11}{108}$	$-\frac{5}{36}$	$\frac{10}{27}$			$\frac{27}{112}$	$\frac{108}{25}\eta - \frac{9}{16}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{23}{54}$	$-\frac{5}{18}$	$-\frac{35}{54}$	$\frac{7}{6}$		$\frac{27}{112}$	$\frac{9}{14} - \frac{54}{25}\eta$
$\frac{4}{5}$	$-\frac{83}{125}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{9}{5}$	$-\frac{189}{125}$	$\frac{72}{125}$	$\frac{125}{672}$	$\eta$
1	$\frac{23}{28}$	$-\frac{15}{28}$	$-\frac{80}{49}$	$\frac{108}{49}$	$-\frac{18}{49}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{7}{96}$

Таблица 2. Схема RKS6(4)7[ $\frac{5}{21}$ ]

$c_w$	$a_{w,g}$					$b_w$	$\hat{b}_w$
0						$\frac{7}{96}$	$\frac{7}{60}$
$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$					0	0
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$				$\frac{125}{672}$	$-\frac{5}{224}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{11}{108}$	$-\frac{5}{36}$	$\frac{10}{27}$			$\frac{27}{112}$	$\frac{261}{560}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{23}{54}$	$-\frac{5}{18}$	$-\frac{35}{54}$	$\frac{7}{6}$		$\frac{27}{112}$	$\frac{9}{70}$
$\frac{4}{5}$	$-\frac{83}{125}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{9}{5}$	$-\frac{189}{125}$	$\frac{72}{125}$	$\frac{125}{672}$	$\frac{21}{21}$
1	$\frac{23}{28}$	$-\frac{15}{28}$	$-\frac{80}{49}$	$\frac{108}{49}$	$-\frac{18}{49}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{7}{96}$

Таблица 3. Схема RKS6(4)7[ $-\frac{625}{96}$ ]

$c_w$	$a_{w,g}$					$b_w$	$\hat{b}_w$
0						$\frac{7}{96}$	$-\frac{533}{96}$
$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$					0	0
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$				$\frac{125}{672}$	$\frac{18125}{672}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{11}{108}$	$-\frac{5}{36}$	$\frac{10}{27}$			$\frac{27}{112}$	$-\frac{459}{16}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{23}{54}$	$-\frac{5}{18}$	$-\frac{35}{54}$	$\frac{7}{6}$		$\frac{27}{112}$	$\frac{1647}{112}$
$\frac{4}{5}$	$-\frac{83}{125}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{9}{5}$	$-\frac{189}{125}$	$\frac{72}{125}$	$\frac{125}{672}$	$-\frac{625}{96}$
1	$\frac{23}{28}$	$-\frac{15}{28}$	$-\frac{80}{49}$	$\frac{108}{49}$	$-\frac{18}{49}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{7}{96}$

4. Семейство вложенных методов 6(4)8F. Параметры  $c_\nu, \hat{b}_\nu, b_\nu, a_{\nu,\mu}$  вложенного восьмистадионного ( $m = 8$ ) метода (2)–(4) шестого и четвертого порядков RKS6(4)8F должны одновременно удовлетворять системе 45 уравнений (6), (16). Реализация технологии FSAL накладывает на параметры восьмой стадии метода дополнительные ограничения:

$$c_8 = 1, \quad b_8 = 0, \quad a_{8,\mu} = b_\mu, \quad \mu = 1, \dots, 7. \tag{17}$$

В рамках трехпараметрического семейства (8), (14), (15) семистадионных методов шестого порядка при определенных значениях параметров  $b_\nu(c_2, c_5, c_6), a_{\nu,\mu}(c_2, c_5, c_6), c_3(c_2), c_4(c_2)$  задача вычисления параметров вложенного метода  $\hat{b}_\nu$  четвертого порядка сводится к поиску решения системы (16), которая с учетом выполнения упрощающих ограничений  $\hat{b}_2 = 0, \sum_\mu a_{\nu\mu} c_\mu^r = c_\nu / (r + 1), r = 0, 1, 2,$  и равенств (17) приводится к линейной системе

$$\sum_{\nu=1}^8 \hat{b}_\nu c_\nu^r = \frac{1}{r + 1}, \quad r = 0, 1, 2, 3, \tag{18}$$

$$\sum_{\nu=4}^8 \hat{b}_\nu \sum_{\mu=3}^{\nu-1} a_{\nu\mu} c_\mu^2 = \frac{1}{12}.$$

Решение системы (18) существует и образует пятипараметрическое семейство  $\hat{b}_\nu(c_2, c_5, c_6, \hat{b}_5, \hat{b}_6), \nu = 1, \dots, 8.$

В табл. 4 представлено двухпараметрическое подмножество семейства RKS6(4)8F  $[\psi, \eta]$ , построенное при  $c_2 = 2/15$ ,  $c_5 = 2/3$ ,  $c_6 = 4/5$  и  $\hat{b}_5 = \psi$ ,  $\hat{b}_6 = \eta$ .

Для проведения тестирования использовалась расчетная схема RKS6(4)8F (табл. 5), полученная при параметрах  $\psi = -5157/112$ ,  $\eta = 3875/96$ .

Таблица 4. Схема RKS6(4)8F $[\psi, \eta]$

$c_w$	$a_{w,g}$						$b_w$	$\hat{b}_w$
0							$\frac{7}{96}$	$\frac{5}{12} - \frac{7}{9}\psi - \frac{21}{25}\eta$
$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$						0	0
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$					$\frac{125}{672}$	$\frac{125}{36}\psi + \frac{7}{2}\eta - \frac{125}{96}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{11}{108}$	$-\frac{5}{36}$	$\frac{10}{27}$				$\frac{27}{112}$	$\frac{27}{16} - \frac{7}{2}\psi - \frac{81}{25}\eta$
$\frac{2}{3}$	$\frac{23}{54}$	$-\frac{5}{18}$	$-\frac{35}{54}$	$\frac{7}{6}$			$\frac{27}{112}$	$\psi$
$\frac{4}{5}$	$-\frac{83}{125}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{9}{5}$	$-\frac{189}{125}$	$\frac{72}{125}$		$\frac{125}{672}$	$\eta$
1	$\frac{23}{28}$	$-\frac{15}{28}$	$-\frac{80}{49}$	$\frac{108}{49}$	$-\frac{18}{49}$	$\frac{25}{49}$	$\frac{7}{96}$	$\frac{49}{36}\psi + \frac{147}{50}\eta - \frac{77}{96}$
1	$\frac{7}{96}$	0	$\frac{125}{672}$	$\frac{27}{112}$	$\frac{27}{112}$	$\frac{125}{672}$	0	$1 - \frac{14}{9}\psi - \frac{84}{25}\eta$

Таблица 5. Схема RKS6(4)8F

$c_w$	$a_{w,g}$						$b_w$	$\hat{b}_w$
0							$\frac{7}{96}$	$\frac{223}{96}$
$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$						0	0
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$					$\frac{125}{672}$	$-\frac{13375}{672}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{11}{108}$	$-\frac{5}{36}$	$\frac{10}{27}$				$\frac{27}{112}$	$\frac{513}{16}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{23}{54}$	$-\frac{5}{18}$	$-\frac{35}{54}$	$\frac{7}{6}$			$\frac{27}{112}$	$-\frac{5157}{112}$
$\frac{4}{5}$	$-\frac{83}{125}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{9}{5}$	$-\frac{189}{125}$	$\frac{72}{125}$		$\frac{125}{672}$	$\frac{3875}{96}$
1	$\frac{23}{28}$	$-\frac{15}{28}$	$-\frac{80}{49}$	$\frac{108}{49}$	$-\frac{18}{49}$	$\frac{25}{49}$	$\frac{7}{96}$	$\frac{5299}{96}$
1	$\frac{7}{96}$	0	$\frac{125}{672}$	$\frac{27}{112}$	$\frac{27}{112}$	$\frac{125}{672}$	0	-63

**5. Сравнительное тестирование. Орбита Арентсторфа.** Плоское движение космического аппарата (КА) с координатами  $(x_1, x_2)$  в гравитационном поле, создаваемом Землей  $(0, 0)$  и Луной  $(1, 0)$ , описывается [2] системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= x_1 + 2\dot{x}_2 - \mu' \frac{x_1 + \mu}{D_1} - \mu \frac{x_1 - \mu'}{D_2}, \\ \ddot{x}_2 &= x_2 - 2\dot{x}_1 - \mu' \frac{x_2}{D_1} - \mu \frac{x_2}{D_2}, \end{aligned} \quad (19)$$

где  $D_1 = ((x_1 + \mu)^2 + x_2^2)^{3/2}$ ;  $D_2 = ((x_1 - \mu')^2 + x_2^2)^{3/2}$ ;  $\mu = 0.012277471$ ;  $\mu' = 1 - \mu$ . При начальных условиях

$$x(0) = (0.994, 0), \quad \dot{x}(0) = (0, 2.00158510637908252240537862224) \quad (20)$$

КА движется по орбите с периодом  $T_{\text{пер}} = 17.0652165601579625588917206249$ .



В сравнительном тестировании наряду с представленными здесь вложенными методами (RKS6(4)7 $\left[\frac{5}{21}\right]$  (см. табл. 2), RKS6(4)7 $\left[-\frac{625}{96}\right]$  (см. табл. 3), RKS6(4)8F (табл. 5)) шестого порядка в качестве оппонентов при решении задачи (19), (20) использовали методы того же класса (RK5(4)7M  $\equiv$  DOPRI5(4)7F, RK5(4)7S [4], RK6(5)8M [5]).

Вычисления выполнялись с числами с плавающей запятой и мантисой длиной 30. Максимально допустимое значение контрольного члена  $\text{tol}$  (см. (5)) изменялось в диапазоне  $\text{tol} \in [10^{-24}, 10^{-4}]$  для всех расчетных схем (RKS6(4)7 $\left[\frac{5}{21}\right]$  (см. табл. 2), RKS6(4)7 $\left[-\frac{625}{96}\right]$  (см. табл. 3), RKS6(4)8F (табл. 5), RK5(4)7M  $\equiv$  DOPRI5(4)7F, RK5(4)7S [4], RK6(5)8M [5]) с единым алгоритмом (5) вычисления шага интегрирования.

На рис. 1, *a*, *b* и рис. 2 приведены зависимости полной погрешности  $\text{Err}_{\text{glob}}$  от общего количества вычислений правой части  $N_f$  на интервале  $[0, T_{\text{per}}]$ .

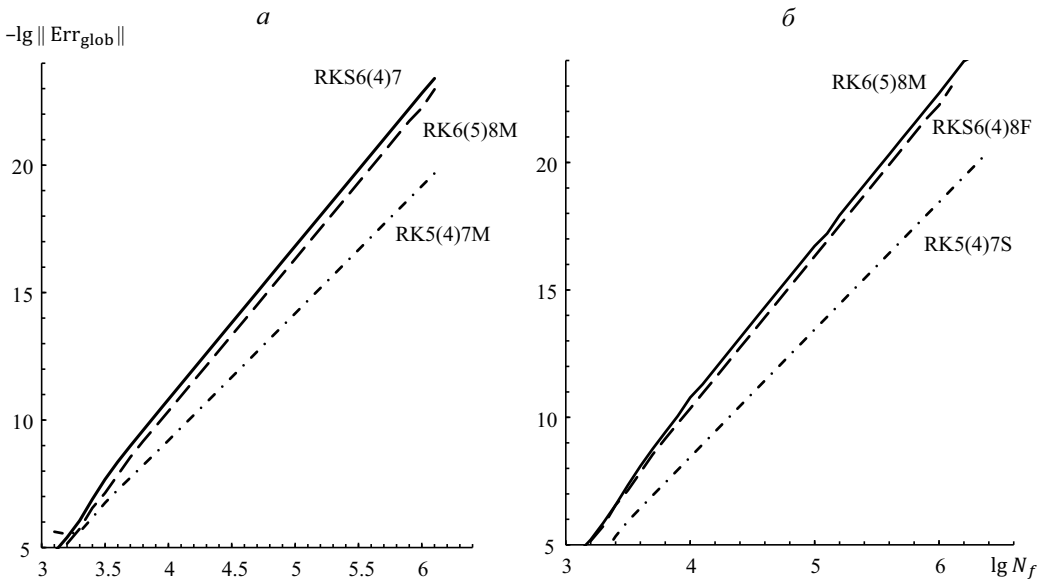


Рис. 1. Зависимость нормы  $-\lg \|\text{Err}_{\text{glob}}\|$  полной погрешности от количества вычислений правой части  $N_f$  для разных расчетных схем  
 Расчетные схемы: *a* — RKS6(4)7, RK6(5)8M, RK5(4)7M; *b* — RK6(5)8M, RKS6(4)8F, RK5(4)7S.

Наклоны ломаных на рис. 1, *a*, *b* показывают, что для всех предложенных в работе методов зависимость глобальной погрешности  $\text{Err}_{\text{glob}}$  от числа обращений  $N_f$  к процедурам вычисления правых частей имеет шестой порядок.

На рис. 2 все три кривые для методов (RKS6(4)7 $\left[\frac{5}{21}\right]$  (см. табл. 2), RKS6(4)7 $\left[-\frac{625}{96}\right]$  (см. табл. 3), RKS6(4)8F (табл. 5)) сливаются в одну RKS6(4)8F.

**6. Заключение.** Результаты сравнительного тестирования при решении тестовой задачи (19), (20) демонстрируют высокую эффективность представленных в работе вложенных расчетных схем (RKS6(4)7 $\left[\frac{5}{21}\right]$ , RKS6(4)7 $\left[-\frac{625}{96}\right]$ , RKS6(4)8F). Для достижения одной и той же полной погрешности эти методы требуют меньшего ко-

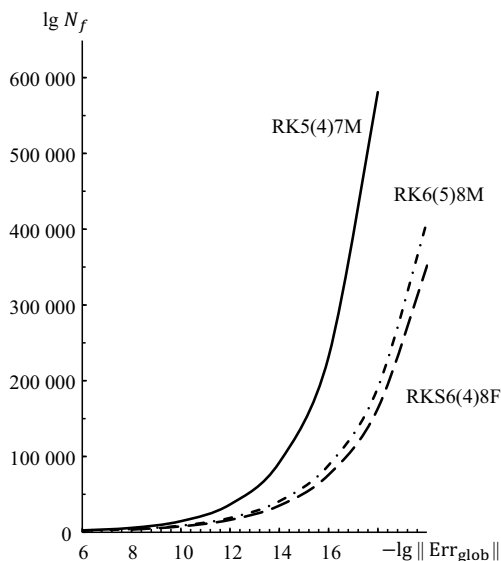


Рис. 2. Зависимость количества вычислений правой части  $N_f$  от нормы  $-\lg \|\text{Err}_{\text{glob}}\|$  полной погрешности

личества вычислений правой части, чем методы-оппоненты (RKS6(5)8M, RK5(4)7M, RK5(4)7S).

## Литература

1. Арушанян О. Б., Залеткин С. Ф. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на Фортране. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1990. 336 с.
2. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи / пер. с англ. И. А. Кульчицкого, С. С. Филиппова; под ред. С. С. Филиппова. М.: Мир, 1990. 512 с. (Hairer E., Norsett S., Wanner G. Solving ordinary differential equations.)
3. Fehlberg E. Classical fifth-, sixth-, seventh-, and eighth order Runge—Kutta formulas with step size control: NASA Technical Report. 1968. N 287 // Computing. 1969. Vol. 4. P. 93–106.
4. Butcher J. C. Coefficients for the study of Runge—Kutta integration processes // Journal of the Australian Mathematical Society. 1963. Vol. 3. P. 185–201.
5. Butcher J. C. On Runge—Kutta processes of high order // Journal of the Australian Mathematical Society. 1964. Vol. 4. P. 179–194.
6. Dormand J. R., Prince P. J. A family of embedded Runge—Kutta formulae // Journal of Computational and Applied Mathematics. 1980. Vol. 6. Iss. 1. P. 19–26.
7. Dormand J. R., Prince P. J. High order embedded Runge—Kutta formulae // Journal of Computational and Applied Mathematics. 1981. Vol. 7. Iss. 1. P. 67–75.
8. Olemskoy I. V., Eremin A. S. Algorithm of construction of effective explicit methods for structurally partitioned systems of ordinary differential equations // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2021. Т. 17. Вып. 4. С. 353–369. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.404>
9. Eremin A. S., Kovrizhnykh N. A., Olemskoy I. V. An explicit one-step multischeme sixth order method for systems of special structure // Applied Mathematics and Computation. 2019. Vol. 347. P. 853–864.
10. Олемской И. В., Коврижных Н. А. Семейство шестиэтапных методов шестого порядка // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2018. Т. 14. Вып. 3. С. 215–229. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2018.303>
11. Олемской И. В., Коврижных Н. А., Фирюлина О. С. Двухпараметрическое семейство методов шестого порядка интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2019. Т. 15. Вып. 4. С. 502–517. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2019.407>

Статья поступила в редакцию 12 января 2021 г.  
Статья принята к печати 5 мая 2022 г.

Контактная информация:

Олемской Игорь Владимирович — д-р физ.-мат. наук, проф.; i.olemskoj@spbu.ru  
Фирюлина Оксана Сергеевна — канд. физ.-мат. наук, ст. преп.; o.firulina@spbu.ru  
Тумка Олег Анатольевич — ст. преп.; tumka.oleg@rambler.ru

## Families of embedded methods of order six

I. V. Olemskoy, O. S. Firulyina, O. A. Tumka

St Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St Petersburg,  
199034, Russian Federation

**For citation:** Olemskoy I. V., Firulyina O. S., Tumka O. A. Families of embedded methods of order six. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2022, vol. 18, iss. 2, pp. 285–296.

<https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2022.209> (In Russian)

In the paper embedded methods of order six, with seven stages for solving systems of ordinary differential equations, are derived. A family of Runge—Kutta methods, of order six with seven stages and having three free parameters, is presented. This family is extended in two different ways with embedded methods to form families of embedded method pairs. Numerical comparison is given for certain examples of the embedded pairs from the constructed families.

*Keywords:* Cauchy problem, embedded methods, error control, order, stage, order conditions, simplifying conditions.

## References

1. Arushanyan O. B., Zaletkin S. F. *Chislennoe reshenie obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii na Fortrane* [Numerical solution of ordinary differential equations on Fortran]. Moscow, Moscow University Press, 1990, 336 p. (In Russian)
2. Hairer E., Nersett S. P., Wanner G. *Reshenie obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii. I. Nezhestkie zadachi* [Solving ordinary differential equation. I. Nonstiff problems]. Ed. 3. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag Publ., 2008, 528 p. (Rus. ed.: Hairer E., Nersett S., Wanner G. *Reshenie obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii. I. Nezhestkie zadachi*. Moscow, Mir Publ., 1990, 512 p.)
3. Fehlberg E. Classical fifth-, sixth-, seventh- and eighth order Runge—Kutta formulas with step size control. NASA Technical Report, 1968, no. 287. *Computing*, 1969, vol. 4, pp. 93–106.
4. Butcher J. C. Coefficients for the study of Runge—Kutta integration processes. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 1963, vol. 3, pp. 185–201.
5. Butcher J. C. On Runge—Kutta processes of high order. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 1964, vol. 4, pp. 179–194.
6. Dormand J. R., Prince P. J. A family of embedded Runge—Kutta formulae. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1980, vol. 6, iss. 1, pp. 19–26.
7. Dormand J. R., Prince P. J. High order embedded Runge—Kutta formulae. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1981, vol. 7, iss. 1, pp. 67–75.
8. Olemskoy I. V., Eremin A. S. Algorithm of construction of effective explicit methods for structurally partitioned systems of ordinary differential equations. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Sciences. Control Processes*, 2021, vol. 17, iss. 4, pp. 353–369. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.404>
9. Eremin A. S., Kovrizhnykh N. A., Olemskoy I. V. An explicit one-step multischeme sixth order method for systems of special structure. *Applied Mathematics and Computation*, 2019, vol. 347, pp. 853–864.

10. Olemskoy I. V., Kovrizhnykh N. A. Semeystvo shestietapnykh metodov shestogo poryadka [A family of sixth-order methods with six stages]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Sciences. Control Processes*, 2018, vol. 14, iss. 3, pp. 215–229. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2018.303> (In Russian)

11. Olemskoy I. V., Kovrizhnykh N. A., Firyulina O. S. Dvukhparametricheskoye semeystvo metodov shestogo poryadka integrirovaniya sistem obyknovennykh differentsialnykh uravneniy [Two-parametric family of sixth order numerical methods for solving systems of ordinary differential equations]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Sciences. Control Processes*, 2019, vol. 15, iss. 4, pp. 502–517. <https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2019.407> (In Russian)

Received: January 12, 2022.

Accepted: May 05, 2022.

Authors' information:

*Igor V. Olemskoy* — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; [i.olemskoj@spbu.ru](mailto:i.olemskoj@spbu.ru)

*Oxana S. Firyulina* — PhD in Physics and Mathematics, Senior Lecturer; [firyulina.oxana@mail.ru](mailto:firyulina.oxana@mail.ru)

*Oleg A. Tumka* — Senior Lecturer; [tumka.oleg@rambler.ru](mailto:tumka.oleg@rambler.ru)