ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 519.71
MSC 49N90

Метод оптимального демпфирования В. И. Зубова в задаче управления одной гироскопической системой*

А. П. Жабко, Н. А. Жабко, П. В. Яковлев

Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация,
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Жабко А. П., Жабко Н. А., Яковлев П. В.* Метод оптимального демпфирования В. И. Зубова в задаче управления одной гироскопической системой // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2022. Т. 18. Вып. 2. С. 278–284. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2022.208

Рассматривается задача управления тренажером кабины самолета в виде четырехкарданной гироскопической системы. Проблема управления стандартной трехкарданной гироскопической системой заключается в наличии «мертвой» зоны в случае, когда две оси системы становятся коллинеарными или близкими к таковым. Одно из применяемых решений прохождения «мертвой зоны» заключается в использовании четвертого дополнительного кардана. Такие системы были рассмотрены в других работах разных авторов. Тем не менее остается открытым вопрос построения оптимального управления четырехкарданной гироскопической системой. На основании однозначных связей между движением кабины, угловыми скоростями осей кабины и необходимыми изменениями углов вращения карданов определены достаточные условия разрешимости задачи управления, доказаны соответствующие леммы. Основываясь на полученных достаточных условиях, по методу В. И. Зубова предлагается алгоритм построения управления карданной системой, оптимальный по отношению к демпфированию переходных процессов движения.

Ключевые слова: демпфирование, оптимальное управление, гироскоп, управление вращением.

1. Введение. Данная работа посвящена описанию и управлению тренажером, который можно использовать при тренировке летчиков, космонавтов, спортсменов и цирковых акробатов. Имеется в виду кабина самолета, допускающая реализацию произвольного вращательного движения, которое является кусочно-гладким, т. е. непрерывным и кусочно-непрерывно дифференцируемым. С этой целью рассматривается четырехкарданная гироскопическая система [1, 2]. В качестве метода оптимиза-

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-07-00531 А).

ции динамики вращательного движения выбран метод оптимального демпфирования [3, 4], поскольку он позволяет в режиме реального времени минимизировать необходимые изменения скоростей вращения карданов и, следовательно, минимизировать нагрузки на карданные кольца. В практической реализации алгоритма необходимо учитывать эффекты, связанные с временны́м запаздыванием [5].

В п. 2 введены основные системы координат и выписаны связи между углами поворота тренажера и инерциальной системой координат. В п. 3 сформулированы основные предположения и дана математическая постановка задачи. В п. 4 выведены достаточные условия решения поставленной задачи, в п. 5 описан алгоритм управления карданами тренажера, а в п. 6 рассмотрен вопрос демпфирования динамики движения системы.

2. Основные понятия и обозначения. Будем использовать самолетную терминологию для описания положения кабины тренажера. Поэтому введем следующие обозначения: ось X — продольная ось, W_X — угловая скорость (крен); ось Y — поперечная ось, W_Y — угловая скорость (тангаж); ось Z — нормальная ось, W_Z — угловая скорость (рысканье).

Рассматриваемая система состоит из четырех карданов:

- внутренний (Inner) — его ось совпадает с одной из осей кабины самолета;
- средний (Middle);
- внешний (Outer);
- дополнительный (Redundunt).

Введем две основные системы координат: ССК — связанная с кабиной система координат, ЗСК — земная система координат. Орты (i, j, k) обозначают правую систему координат ЗСК, причем $i = X$, $j = Y$, $k = Z$.

Введем системы координат: $(i_1, j_1, k_1) = E_{\text{Red}}$, $(i_2, j_2, k_2) = E_{\text{Out}}$, $(i_3, j_3, k_3) = E_{\text{Mid}}$, $(i_4, j_4, k_4) = E_{\text{Inn}}$, причем орты (i_4, j_4, k_4) обозначают правую систему координат ССК. Условия вложенности карданов задаются равенствами $k_1 = k$, $j_2 = j_1$, $k_3 = k_2$, $j_4 = j_3$. Поэтому введем углы: $\phi = \angle(i, i_1) = \angle(j, j_1)$, $\psi = \angle(i_1, i_2) = \angle(k_1, k_2)$, $\theta = \angle(i_2, i_3) = \angle(j_2, j_3)$, $\nu = \angle(i_3, i_4) = \angle(k_3, k_4)$.

Тогда имеем следующие равенства:

$$(i_1, j_1, k_1) = (i, j, k) \cdot S_1, \; S_1(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(i_2, j_2, k_2) = (i_1, j_1, k_1) \cdot S_2, \; S_2(\psi) = \begin{pmatrix} \cos\psi & 0 & \sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\psi & 0 & \cos\psi \end{pmatrix},$$

$$(i_3, j_3, k_3) = (i_2, j_2, k_3) \cdot S_3, \; S_3(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(i_4, j_4, k_4) = (i_3, j_3, k_3) \cdot S_4, \; S_4(\nu) = \begin{pmatrix} \cos\nu & 0 & \sin\nu \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\nu & 0 & \cos\nu \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем связь ЗСК и ССК:

$$(i_4, j_4, k_4) = (i, j, k) \cdot S_1(\phi) \cdot S_2(\psi) \cdot S_3(\theta) \cdot S_4(\nu). \tag{1}$$

Так как мы хотим реализовать заданные угловые скорости кабины $W_X(t), W_Y(t), W_Z(t)$, то мгновенная угловая скорость кабины равна

$$\omega = W_X(t) \cdot i_4 + W_Y(t) \cdot j_4 + W_Z(t) \cdot k_4.$$

Кинематические уравнения динамики вектора $r(t)$, вращающегося с угловой скоростью $\omega(t)$, суть $\dot{r} = \omega \times r$. Тогда, учитывая равенство (1), получаем соотношение

$$\frac{d}{dt}(i_4, j_4, k_4) = (i, j, k) \cdot \frac{d}{dt}(S_1(\phi) \cdot S_2(\psi) \cdot S_3(\theta) \cdot S_4(\nu))$$

и равенство

$$\omega \times (i_4, j_4, k_4) = (i_4, j_4, k_4) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -W_Z & W_Y \\ W_Z & 0 & -W_X \\ -W_Y & W_X & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому динамическая связь между компонентами угловой скорости $\omega = W_X(t) \cdot i_4 + W_Y(t) \cdot j_4 + W_Z(t) \cdot k_4$ и изменением углов поворота карданов описывается системой дифференциальных уравнений

$$(i_4, j_4, k_4) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -W_Z & W_Y \\ W_Z & 0 & -W_X \\ -W_Y & W_X & 0 \end{pmatrix} = (i, j, k) \cdot \frac{d}{dt}(S_1(\phi) \cdot S_2(\psi) \cdot S_3(\theta) \cdot S_4(\nu)). \quad (2)$$

З а м е ч а н и е 1. Из равенства (1) и тождества (2) следует однозначная связь между движением кабины, угловыми скоростями осей кабины и необходимыми изменениями углов вращения карданов.

3. Постановка задачи. Рассмотрим условия реализации произвольного заданного движения кабины и построения соответствующего алгоритма управления вращением карданов.

Предположение. Считаем систему векторных функций $(i_4(t), j_4(t), k_4(t))$ непрерывной и кусочно-непрерывно дифференцируемой.

Введем матрицу $H(t)$ равенством

$$(i_4(t), j_4(t), k_4(t)) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -W_Z(t) & W_Y(t) \\ W_Z(t) & 0 & -W_X(t) \\ -W_Y(t) & W_X(t) & 0 \end{pmatrix} = (i, j, k) \cdot \frac{d}{dt}(H(t)).$$

Сравнивая с системой (2), видим, что

$$S_1(\phi) \cdot S_2(\psi) \cdot S_3(\theta) \cdot S_4(\nu) = H(t).$$

Лемма 1. *Пусть матрица* $H(t) = \begin{pmatrix} h_{11}(t) & h_{12}(t) & h_{13}(t) \\ h_{21}(t) & h_{22}(t) & h_{23}(t) \\ h_{31}(t) & h_{32}(t) & h_{33}(t) \end{pmatrix}$. *Если найдены непрерывные и кусочно-непрерывно дифференцируемые функции* $(\phi(t), \psi(t), \theta(t))$, *обеспечивающие равенство*

$$S_1(\phi) \cdot S_2(\psi) \cdot S_3(\theta) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{12}(t) \\ h_{22}(t) \\ h_{32}(t) \end{pmatrix}, \quad (3)$$

то существует единственное решение $\nu(t)$ уравнения

$$S_1(\phi) \cdot S_2(\psi) \cdot S_3(\theta) \cdot S_4(\nu) = H(t). \tag{4}$$

Причем функция $\nu(t)$ определяется из системы уравнений

$$\begin{pmatrix} h_{11}(t) & h_{12}(t) & h_{13}(t) \\ h_{31}(t) & h_{32}(t) & h_{33}(t) \end{pmatrix} \cdot S_1(\phi) \cdot S_2(\psi) \cdot S_3(\theta) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\nu & -\sin\nu \\ \sin\nu & \cos\nu \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Система (4) состоит из 9 уравнений. Если мы выпишем уравнения системы (4), соответствующие номерам (1,2), (2,2), (2,3), то получим систему уравнений (3). Поскольку в системе (4) слева и справа стоят ортогональные матрицы, то существует единственный угол поворота $\nu(t)$, обеспечивающий равенство

$$S_1(\phi) \cdot S_2(\psi) \cdot S_3(\theta) \cdot \begin{pmatrix} \cos\nu & \sin\nu \\ 0 & 0 \\ -\sin\nu & \cos\nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{13} \\ h_{21} & h_{23} \\ h_{31} & h_{33} \end{pmatrix}.$$

Если умножить его слева на матрицу $\begin{pmatrix} h_{11}(t) & h_{12}(t) & h_{13}(t) \\ h_{31}(t) & h_{32}(t) & h_{33}(t) \end{pmatrix}$, а справа на матрицу $\begin{pmatrix} \cos\nu & -\sin\nu \\ \sin\nu & \cos\nu \end{pmatrix}$, то получим равенство (4). □

Таким образом, исходная задача построения управления гироскопической системой сводится к задаче о разрешимости системы (3).

4. Достаточные условия разрешимости. Введем векторную функцию

$$\begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix} = S_1^*(\phi(t)) \cdot \begin{pmatrix} h_{12}(t) \\ h_{22}(t) \\ h_{32}(t) \end{pmatrix}.$$

В соответствии с основным предположением эта функция является непрерывной и кусочно-непрерывно дифференцируемой. Кроме того, $\alpha(t)^2 + \beta(t)^2 + \gamma(t)^2 = 1$. Тогда система (3) принимает вид

$$\begin{pmatrix} \cos\psi & 0 & \sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\psi & 0 & \cos\psi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Лемма 2 (условие разрешимости)**.** *Если $|\beta(t)| < 1$, то существует непрерывное и кусочно-непрерывно дифференцируемое решение $(\psi(t), \theta(t))$ системы* (6).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Распишем равенство (6) в виде системы уравнений

$$\begin{cases} \cos\theta = \beta(t), \\ \cos\psi \cdot \sin\theta = -\alpha(t), \\ \sin\psi \cdot \sin\theta = \gamma(t). \end{cases}$$

При выполнении условий теоремы существует непрерывная и кусочно-непрерывно дифференцируемая функция $\theta(t)$, причем $\sin^2(\theta(t)) = 1 - \beta^2(t) > 0$. Поэтому система принимает вид

$$\begin{cases} \cos\psi = -\dfrac{\alpha(t)}{\sin\theta(t)}, \\ \sin\psi = \dfrac{\gamma(t)}{\sin\theta(t)} \end{cases}$$

и, следовательно, имеет единственное непрерывное и кусочно-непрерывно дифференцируемое решение $\psi(t)$, поскольку $\left(\dfrac{\alpha(t)}{\sin\theta(t)}\right)^2 + \left(\dfrac{\gamma(t)}{\sin\theta(t)}\right)^2 = 1.$ □

5. Алгоритм построения законов вращения. С учетом условий разрешимости необходимо определить функцию $\phi(t)$ таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$|-h_{12}(t)\cdot\sin\phi(t) + h_{22}(t)\cdot\cos\phi(t)| < 1. \tag{7}$$

Поскольку $h_{12}^2(t) + h_{22}^2(t) \leqslant 1$, то существует бесчисленное множество непрерывных и кусочно-непрерывно дифференцируемых решений неравенства (7). Поэтому можно предложить следующий алгоритм построения управлений:

1) выбираем необходимую программу тренировок в виде матрицы $H(t)$;
2) определяем решение $\phi(t)$ неравенства (7);
3) опираясь на лемму 2, ищем решение системы (6);
4) определяем функцию $\nu(t)$ из системы (5).

6. Демпфирование динамики системы по отношению к изменению углов вращения карданов. Матрица $H(t)$ является ортогональной, и ее элементы предполагаются непрерывными и кусочно-непрерывно дифференцируемыми функциями. Будем считать также, что расстояние между соседними точками разрыва производной не менее Δ, а величина разрыва элементов матрицы $\dot{H}(t)$ не более k. Тогда можно построить оптимальную демпфирующую функцию по отношению к изменению углов вращения карданов в момент $\hat{t}$ разрыва производной элементов матрицы $H(t)$.

Обозначим $\hat{H} = H(\hat{t}-0)$, $\tilde{H} = H(\hat{t}+0)$. Введем следующие величины: $\delta\phi = \dot{\phi}(\hat{t}+0) - \dot{\phi}(\hat{t}-0)$, $\delta\psi = \dot{\psi}(\hat{t}+0) - \dot{\psi}(\hat{t}-0)$, $\delta\theta = \dot{\theta}(\hat{t}+0) - \dot{\theta}(\hat{t}-0)$, $\delta\nu = \dot{\nu}(\hat{t}+0) - \dot{\nu}(\hat{t}-0)$. При выполнении условий леммы 2, а именно $|-h_{12}(t)\cdot\sin\phi(t) + h_{22}(t)\cdot\cos\phi(t)| < 1$, существуют решения систем уравнений

$$S_1(\phi)\cdot S_2(\psi)\cdot S_3(\theta)\cdot S_4(\nu) = H(t),$$

которые можно считать непрерывно дифференцируемыми функциями от $\phi(t)$ на участках непрерывности матрицы $\dot{H}(t)$, а в точках разрыва этой матрицы величины $\delta\psi, \delta\theta, \delta\nu$ определяются значением $\delta\phi$ соответственно.

Тогда оптимальная демпфирующая функция суть

$$\min_{|-h_{12}(t)\cdot\sin\phi(t)+h_{22}(t)\cdot\cos\phi(t)|<1} \max\{|\delta\phi|, |\delta\psi|, |\delta\theta|, |\delta\nu|\}.$$

З а м е ч а н и е 2. В случае реализации алгоритма, описанного в п. 5, можно функцию $\phi(t)$ выбирать непрерывной и получить верхнюю оценку оптимального решения через параметры k и Δ.

7. Заключение. В данной работе рассмотрена задача управления четырехкарданным гироскопом и демпфирования переходных процессов динамики системы по отношению к изменению углов вращения карданов. Предполагалось, что карданы являются абсолютно твердыми телами. Однако этот подход можно распространить на случай нежестких карданов, поскольку учет нежесткости может быть смоделирован введением запаздывания в уравнения динамики.

Литература

1. *Jie M., Qinbei X.* Four-axis gimbal system application based on gimbal self-adaptation adjustment // Proceedings of the 34$^{\text{th}}$ Chinese Control Conference. Hangzhou, China. July 28–30, 2015. P. 8866–8871.

2. *McConnel K. G.* Kinematic of three-axis gimbal system // Proceedings of the Third Southeastern Conference on Theoretical and Applied Mechanics. S. Carolina, Columbia. March 31 — April 01, 1966. P. 515–541.

3. *Veremey E. I.* On practical application of Zubov's optimal damping concept // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2020. Т. 16. Вып. 3. С. 293–315. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2020.307

4. *Зубов В. И.* Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975. 496 с.

5. *Екимов А. В., Жабко А. П., Яковлев П. В.* Устойчивость дифференциально-разностных систем с пропорциональным запаздыванием. I. Линейные управляемые системы // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2020. Т. 16. Вып. 3. С. 316–325. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2020.308

Статья поступила в редакцию 12 января 2022 г.
Статья принята к печати 5 мая 2022 г.

Контактная информация:

Жабко Алексей Петрович — д-р физ.-мат. наук, проф.; zhabko.apmath.spbu@mail.ru

Жабко Наталья Алексеевна — канд. физ.-мат. наук, доц.; ztasha@mail.ru

Яковлев Павел Валентинович — канд. физ.-мат. наук, доц.; w330433@gmail.com

Zubov's optimum damping method in the control problem of one gyroscope system*

A. P. Zhabko, N. A. Zhabko, P. V. Yakovlev

St Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Zhabko A. P., Zhabko N. A., Yakovlev P. V. Zubov's optimum damping method in the control problem of one gyroscope system. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2022, vol. 18, iss. 2, pp. 278–284. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2022.208 (In Russian)

The article considers the control problem of the aircraft cabin simulator with a four-axis gimbal gyroscopic system. The difficulty of the control problem of standard three-axis gimbal gyroscopic system is the presence of the phenomena "gimbal lock" when the two axes of the system become collinear or close to collinear. One of the applied solutions to avoid "gimbal lock" is to use of the fourth additional gimbal. Such fore-axis gimbal systems are presented in the works of various autors. However, the problem of an optimal control of four-axis gimbal gyroscopic system is still under the question. Sufficient conditions for the solvability of the control problem are obtained on the base of the one-to-one interconnection between the movement of the cabin, the angular velocities of the cabin axes and the necessary deviations of gimbals rotation angles. This result is presented in lemmas. According this obtained sufficient conditions, the algorithm for constructing a control of the gimbal system in terms of optimal damping process of movement, according to Zubov's method, is proposed.

Keywords: dumping, optimal control, gyroscope, rotation control.

* This work was supported by Russian Foundation for Basic Research (project N 20-07-00531 A).

References

1. Jie M., Qinbei X. Four-axis gimbal system application based on gimbal self-adaptation adjustment. *Proceedings of the 34^{th} Chinese Control Conference*. Hangzhou, China, July 28–30, 2015, pp. 8866–8871.

2. McConnel K.G. Kinematic of three-axis gimbal system. *Proceedings of the Third Southeastern Conference on Theoretical and Applied Mechanics*. S. Carolina, Columbia, March 31 — April 01, 1966, pp. 515–541.

3. Veremey E. I. On practical application of Zubov's optimal damping concept. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Sciences. Control Processes*, 2020, vol. 16, iss. 3, pp. 293–315. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2020.307

4. Zubov V. I. *Lektsii po teorii upravleniya* [*Lectures on control theory*]. Moscow, Nauka Publ., 1975, 496 p. (In Russian)

5. Ekimov A. V., Zhabko A. P., Yakovlev P. V. Ustoichivost differencialno-raznostnyh sistem s proportsionalnym zapazdyvaniem. I. Lineynye upravlyaemye sistemy [The stability of differential-difference systems with proportional time delay. I. Linear controlled systems]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Sciences. Control Processes*, 2020, vol. 16, iss. 3, pp. 316–325. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2020.308 (In Russian)

Received: January 12, 2022.
Accepted: May 05, 2022.

Authors' information:

Aleksei P. Zhabko — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; zhabko.apmath.spbu@mail.ru

Natalya A. Zhabko — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor; ztasha@mail.ru

Pavel V. Yakovlev — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor; w330433@gmail.com