УДК 533.9.01 Вестник СПбГУ. Прикладная математика. Информатика... 2022. Т. 18. Вып. 2
MSC 97M50

Влияние столкновений на динамику волн конечной амплитуды в плазме*

А. Р. Каримов[1,2,3], *В. К. Богданов*[1,2]

[1] Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Российская Федерация, 115409, Москва, Каширское ш., 31
[2] Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова, Российская Федерация, 117997, Москва, Стремянный пер., 36
[3] Объединенный институт высоких температур Российской академии наук, Российская Федерация, 117997, Москва, Ижорская ул., 13/19

Для цитирования: *Каримов А. Р., Богданов В. К.* Влияние столкновений на динамику волн конечной амплитуды в плазме // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2022. Т. 18. Вып. 2. С. 231–238. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2022.204

В рамках кинетического подхода исследуется эволюция нелинейных волн конечной амплитуды в слабостолкновительной максвелловской плазме. Для описания столкновений электронов с нейтральными частицами используется интеграл столкновений в форме Бхатнагара — Гросса — Крука, а коллективные взаимодействия определяются потенциалом Юкавы. Полученные соотношения позволяют оценить размер и тип возникающих структур.

Ключевые слова: неидеальная плазма, слабые столкновения, когерентные структуры, волны конечной амплитуды.

1. Введение. В настоящей работе рассматривается один из возможных сценариев эволюции когерентных кинетических структур (нелинейные ленгмюровские волны конечной амплитуды, электронные дырки и т. д.), возникающих в слабостолкновительной максвелловской плазме. Данная задача представляет интерес как с точки зрения развития коллективных методов ускорения, так и многочисленных естественных приложений (см., например, [1–10]). В бесстолкновительных или слабостолкновительных плазменных средах образование и развитие таких структур определяется характером взаимодействия волн с частицами. В частности, ответственное за эти процессы затухание Ландау можно трактовать [3, 4] как фазовое перемешивание незатухающих собственных мод Ван-Кампена [11, 12], которые, в свою очередь, можно рассматривать как БГК-моды в линейном пределе [13].

Однако линейная теория бесстолкновительного затухания справедлива только для времен $t \ll \tau_r = (\frac{m_e}{e\Phi_0 k^2})^{1/2}$, где k — волновое число, Φ_0 — амплитуда потенциала электрического поля. Для больших времен ($t \gg \tau_r$) следует учитывать захват электронов в потенциальную яму волны конечной амплитуды [3, 14], что делает задачу существенно нелинейной. К тому же для больших времен на динамику захвата должны оказывать влияние различные столкновительные процессы. Например, если плазма содержит нейтральные частицы, то для времен $t \sim \nu^{-1}$ (ν — частота столкно-

* Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (договор № 075-15-2021-1361 от 07.10.2021 г.) и в рамках гранта «Регулирование процессов структурообразования в высокомолекулярных соединениях в неравновесных условиях» Российского экономического университета им. Г. В. Плеханова (приказ № 657 от 07.06.2021 г.).

вений электронов с нейтральными частицами) придется также учитывать соударения электронов с нейтральными частицами.

Поэтому интересно одновременно рассмотреть резонансные и диссипативные процессы в нелинейном режиме, как было проделано в [15, 16]. Настоящая работа представляет собой попытку подойти к решению данной задачи.

2. Постановка задачи. Рассмотрим континуум взаимодействующих частиц с потенциалом парного взаимодействия $K(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ вблизи как равновесных, так и существенно неравновесных состояний. Предположим, что ионы образуют неподвижный однородный фон. Динамика такой системы определяется кинетическим уравнением

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = I_c, \tag{1}$$

здесь f — функция распределения электронов; $\mathbf{F}$ — сила, действующая на частицу с массой m. Интеграл столкновений I_c записан в форме Бхатнагара — Гросса — Крука:

$$I_c = -\nu(f - f_e), \tag{2}$$

где f_e — равновесная функция распределения электронов. Как отмечалось выше, для простоты здесь мы ограничиваемся рассмотрением случая только столкновений электронов с нейтральными частицами с частотой $\nu = \text{const}$. Предполагается, что взаимодействие между частицами зависит только от расстояния между частицами $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, поэтому силу $\mathbf{F}$ можно записать через скалярный потенциал $\Phi = \Phi(t, \mathbf{r})$ в виде

$$\mathbf{F} = -\nabla \Phi.$$

Он определяется выражением

$$\Phi(t, \mathbf{r}) = \int K(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) f(t, \mathbf{r}', \mathbf{v}') d\mathbf{r}' d\mathbf{v}' + \Pi(t, \mathbf{r}), \tag{3}$$

в которое введена функция $\Pi(t, \mathbf{r})$, отражающая действие внешних электрических и магнитных полей. В процессе работы будем рассматривать собственную динамику плазменной среды в отсутствие внешних сил, потому в рамках задачи $\Pi(t, \mathbf{r}) \equiv 0$.

Следуя [17, 18], частное решение системы (1)–(3) можно представить как конечный ряд [19]:

$$f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) = \sum_{k=0}^{L} \left[e^{-\nu t} D^k W_0(\mathbf{v}) + \frac{C_0}{T^k} e^{-(\mathbf{v} - \mathbf{V})^2 / 2T} \right] \frac{\Phi^k}{k!}, \tag{4}$$

а равновесную функцию распределения следующим образом:

$$f_e(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) = \sum_{k=0}^{L} C_k \exp\left[-\frac{(\mathbf{v} - \mathbf{V})^2}{2T} \right] \Phi^k. \tag{5}$$

В (4) и (5) C_0 — произвольная постоянная, $\mathbf{V}$ — постоянная скорость дрейфа, константа $T > 0$ имеет смысл температуры, оператор D определяется выражением

$$D = \frac{\mathbf{V} - \mathbf{v}}{(\mathbf{V} - \mathbf{v})^2} \nabla_v,$$

а константы C_k связаны отношением

$$C_{k+1} = \frac{C_k}{(k+1)T}.$$

Функция $W_0(\mathbf{v})$ описывает перераспределение частиц в пространстве скоростей. Это может быть как равновесным, так и неравновесным процессом, происходящим в рассматриваемой системе, но $W_0(\mathbf{v})$ должна обеспечивать конечность моментов искомой функции распределения и потенциала Φ, который для $\Pi = 0$ при подстановке (4) в (3) задается уравнением

$$\Phi(t, \mathbf{r}) = \sum_{k=0}^{L} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{K(\mid \mathbf{r} - \mathbf{r}' \mid)}{k!} \left[C + D_k e^{-\nu t}\right] \Phi^k(t, \mathbf{r}') d\mathbf{r}'. \tag{6}$$

В (6) $C = C_0(2\pi T)^{3/2}$, а величина D_k определяется соотношением

$$D_k = \int\limits_{-\infty}^{\infty} D^k W_0(\mathbf{v}) d\mathbf{v}.$$

3. Локально-равновесный предел. В качестве простейшего, но содержательного случая, к тому же демонстрирующего корректность используемого подхода, возьмем W_0 максвелловского типа:

$$W_0(\mathbf{v}) = \frac{1}{(2\pi\theta)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(\mathbf{v} - \mathbf{V})^2}{2\theta}\right], \tag{7}$$

где константа $\theta > 0$ играет роль второй температуры. Рассмотрим случай $L \to \infty$, когда (4) сводится к уравнению

$$f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) = \frac{1}{(2\pi\theta)^{3/2}} e^{-\nu t} \exp\left[-\frac{(\mathbf{v} - \mathbf{V})^2}{2\theta} + \frac{\Phi}{\theta}\right] + \\ + \frac{1}{(2\pi T)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(\mathbf{v} - \mathbf{V})^2}{2T} + \frac{\Phi}{T}\right].$$

При этом (6) примет следующий вид:

$$\Phi(t, \mathbf{r}) = e^{-\nu t} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(\mid \mathbf{r} - \mathbf{r}' \mid) \exp(\Phi/\theta) d\mathbf{r}' + C \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(\mid \mathbf{r} - \mathbf{r}' \mid) \exp(\Phi/T) d\mathbf{r}'. \tag{8}$$

Нелинейное интегральное уравнение (8) допускает пространственно однородное решение. Подставив $\Phi_0 = \Phi_0(t)$ в (8), получим уравнение

$$\Phi_0 = \gamma \left(e^{-\nu t + \Phi_0/\theta} + C e^{\Phi_0/T}\right), \tag{9}$$

где

$$\gamma = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) d\mathbf{r}' < \infty.$$

В общем случае данное нелинейное алгебраическое уравнение определяет двухтемпературное распределение для $\theta \neq T$. В пределе $\theta \to T$ соотношение (8) переходит в обычное локально-равновесное распределение.

Рассмотрим этот предельный случай при $\frac{|\Phi_0|}{T} \ll 1$, когда можно ограничиться только линейным приближением в разложении соответствующих экспоненциальных членов в (9). Тогда, положив $\theta = T$, из (9) находим, что

$$\Phi_0 = \frac{\gamma(e^{-\nu t} + C)}{1 - \gamma(e^{-\nu t} + C)/T}. \tag{10}$$

Соотношение (10) при $\nu t \to \infty$ переходит в соответствующее стационарное состояние, определяемое видом потенциала взаимодействия через константу γ. Как и ожидалось, в случае локально-равновесного распределения вне зависимости от типа межчастичного потенциала $K(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ за времена порядка ν^{-1} система приходит в равновесное состояние. Однако даже в таком случае возможна нетривиальная динамика системы.

Чтобы исследовать динамику системы вблизи этого локально-равновесного состояния, представим потенциал в виде суммы равновесного потенциала (10) и его возмущения:

$$\Phi = \Phi_0 + \delta\Phi.$$

Подставив данное соотношение в (8), получим выражение

$$\delta\Phi - \frac{e^{\Phi_0/T}}{T}\left(e^{-\nu t} + C\right)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(|\,\mathbf{r} - \mathbf{r}'\,|)\delta\Phi(\mathbf{r}')d\mathbf{r}' = 0. \tag{11}$$

Проанализируем поведение описываемой системы в пределе $\nu t \to \infty$, когда (11) допускает стационарное решение вида

$$\delta\Phi = Ae^{i\mathbf{kr}}. \tag{12}$$

Подставив (12) в (11), находим, что

$$1 - \lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(|\,\mathbf{r} - \mathbf{r}'\,|)\exp(-i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'))d\mathbf{r}' = 0. \tag{13}$$

В (13) введен параметр

$$\lambda(T, C) = \frac{C\exp(\Phi_0/T)}{T}.$$

Интеграл

$$J = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(|\,\mathbf{r} - \mathbf{r}'\,|)\exp(-i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'))d\mathbf{r}'$$

можно преобразовать к виду

$$J = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\pi \int\limits_0^{2\pi} K(\rho)\exp\left[-ik\rho\cos(\vartheta)\right]\rho^2\sin(\vartheta)d\varphi d\vartheta d\rho =$$
$$= \frac{4\pi}{k}\int\limits_0^{+\infty} K(\rho)\rho\sin(k\rho)d\rho.$$

В результате получим дисперсионное соотношение [20]

$$1 - \frac{4\pi\lambda}{k} \int\limits_0^{+\infty} K(\rho)\rho \sin(k\rho) d\rho = 0, \tag{14}$$

позволяющее определить размер и тип образующихся структур в зависимости от соотношения параметров Φ_0, T, C, а также ядра межчастичного взаимодействия $K(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$.

Так, в случае потенциала Юкавы ядро парного взаимодействия определяется выражением

$$K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\mu}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \exp(-q|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|), \tag{15}$$

где константы μ и q зависят от типа взаимодействия (взаимодействие адронов или экранированное кулоновское поле). Из (14) находим уравнение

$$1 - \frac{4\pi\lambda\mu}{k^2 + q^2} = 0,$$

которое имеет действительные корни, если выполняется соотношение $4\pi\lambda\mu \geqslant q^2$, а пространственный масштаб возникающей структуры определяется в виде $k^{-1} = (4\pi\lambda\mu - q^2)^{\frac{1}{2}}$ и задается входящими в λ начальными характеристиками и параметрами взаимодействия μ, q.

4. Заключение. В настоящей работе исследовалось одновременное влияние резонансных и диссипативных процессов на формирование нелинейных структур вблизи локально-равновесного состояния слабостолкновительной плазмы. Описанный частный случай — формирование однотемпературного распределения максвелловского типа на больших временах — относится к простейшим вариантам эволюции предложенной модели. Однако приведенный пример показывает, как из однородного состояния, благодаря коллективному взаимодействию, может возникнуть пространственно неоднородная структура. Эти результаты как по форме, так по своему физическому содержанию близки к полученным в работах по динамике электронных дырок в максвелловской плазме [4, 7], где возбуждается солитоноподобный потенциал. Принимая во внимание высокую чувствительность рассматриваемой модели к возмущениям в начальных условиях, можно сделать вывод, что существует небольшой интервал параметров системы, в котором можно увидеть реально описываемый эффект. Также следует отметить, что при $q \gg 1$ потенциал (15) переходит в модель твердых шаров, описывающую столкновение нейтральных частиц, в рамках которой формирование упорядоченных динамических структур в максвелловской плазме маловероятно.

Предложенная методика хорошо применима в случае сферической симметричности задачи. В случае более сложной конфигурации полученные результаты могут помочь в описании, но модель требует существенных изменений. Более используемыми оказываются подходы, основанные на численном моделировании [9, 10]. Но и в таком случае заранее просчитанные аналитически найденные упрощения могут заметно снизить требуемое количество вычислений.

Представленный метод может быть применен для сред с различными равновесными потенциалами. Для этого необходимо в качестве функции W_0 использовать другую функцию распределения частиц по скоростям, в частности распределение Ферми—Дирака частиц по кинетическим энергиям.

С математической точки зрения максвелловский случай был задан выбором $W_0(\mathbf{v})$ (см. соотношение (7)). В результате имеем модель, описывающую квазиравновесную среду, где возможно получение ограниченного класса динамических структур. Поэтому приведенные результаты следует трактовать как предварительные, указывающие направление, где в средах с коллективным взаимодействием возможно образование нелинейных структур.

Литература

1. *Файнберг Я. Б.* Ускорение частиц в плазме // Атомная энергия. 1959. Т. 6. Вып. 4. С. 431–446.
2. *Ашанин И. А., Ключевская Ю. Д., Махоро А. А., Механикова В. Ю., Мосолова О. А., Полозов С. М., Проников А. И., Ращиков В. И.* Динамика пучка в линейном ускорителе-инжекторе Специализированного источника синхротронного излучения 4-го поколения ИССИ-4 // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2019. Т. 15. Вып. 1. С. 126–139. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2019.110
3. *Кадомцев Б. Б.* Затухание Ландау и эхо в плазме // Успехи физ. наук. 1968. Т. 95. Вып. 1. С. 111–129.
4. *Schamel H.* Hole equilibria in Vlasov — Poisson systems: A challenge to wave theories of ideal plasmas // Phys. Plasmas. 2000. Vol. 7. Iss. 12. P. 4831–4844.
5. *Овсянников Д. А., Дривотин О. И.* Моделирование интенсивных пучков заряженных частиц. СПб.: С.-Петерб. гос. ун-т, 2003. 176 с.
6. *Diamond P. H., Itoh S.-I., Itoh K., Hahm T. S.* Zonal flows in plasma — a review // Plasma Phys. Control. Fusion. 2005. Vol. 47. Iss. 5. P. R35–R161.
7. *Rowlands G., Dieckmann M. E., Shukla P. K.* The plasma filamentation instability in one dimension: nonlinear evolution // New J. Phys. 2007. Vol. 9. Iss. 8. N 247.
8. *Polozov S. M.* A possible scheme of electron beam bunching in laser plasma accelerators // NIM A. 2013. Vol. 729. Iss. 11. P. 517–521.
9. *Roudskoy I., Kulevoy T. V., Petrenko S. V., Kuibeda R. P., Seleznev D. N., Pershin V. I., Hershcovitch A., Johnson B. M., Gushenets V. I., Oks E. M., Poole H. P.* Bernas ion source discharge simulation // Review of Scientific Instruments. 2008. Vol. 79. Iss. 2. P. 02B313.
10. *Потанин Е. П.* Нагрев ионов гадолиниевой плазмы методом ионного циклотронного резонанса // Журн. техн. физики. 2006. Т. 76. Вып. 12. С. 47–51.
11. *Van Kampen N. G.* On the theory of stationary waves in plasmas // Physica. 1955. Vol. 21. P. 949–963.
12. *Case K. M.* Plasma oscillations // Ann. Phys. 1959. Vol. 7. Iss. 3. P. 349–364.
13. *Bernstein I. B., Greene J. M., Kruskal M. D.* Exact nonlinear plasma oscillations // Phys. Rev. 1957. Vol. 108. Iss. 3. P. 546–549.
14. *Villani C.* Particle systems and nonlinear Landau damping // Phys. Plasmas. 2014. Vol. 21. Iss. 3. P. 030901.
15. *Kaganovich I. D.* Effects of collisions and particle trapping on collisionless heating // Phys. Rev. 1999. Vol. 88. Iss. 2. P. 327–330.
16. *Zheng J., Qin H.* On the singularity of the Vlasov — Poisson system // Phys. Plasmas. 2013. Vol. 20. Iss. 9. P. 092114.
17. *Karimov A. R., Lewis H. R.* Nonlinear solutions of the Vlasov — Poisson equations // Phys. Plasmas. 1999. Vol. 6. Iss. 3. P. 759–761.
18. *Karimov A. R.* Nonlinear solutions of a Maxwellian type for the Vlasov — Poisson equations // Phys. Plasmas. 2001. Vol. 8. Iss. 5. P. 1533–1537.
19. *Karimov A. R., Bogdanov V. K.* Formation of kinetics coherent structures in weakly collisional media // Plasma. 2021. Vol. 4. Iss. 2. P. 359–365.
20. *Власов А. А.* Нелокальная статистическая механика. М.: Наука, 1978. 264 с.

Статья поступила в редакцию 11 апреля 2022 г.
Статья принята к печати 5 мая 2022 г.

Контактная информация:

Каримов Александр Рашатович — д-р физ.-мат. наук, проф.; arkarimov@mephi.ru

Богданов Владислав Константинович — bogdanov.starscream@mail.ru

Impact of collisions on the dynamics of waves of finite amplitude in a plasma*

A. R. Karimov[1,2,3], *V. K. Bogdanov*[1,2]

[1] National Research Nuclear University “MEPhI”, 31, Kashirskoe sh., Moscow, 115409, Russian Federation
[2] G. V. Plekhanov Russian Economic University, 36, Stremyanny per., Moscow, 117997, Russian Federation
[3] Joint Institute for High Temperatures of the Russian Academy of Sciences, 13/19, Izhorskaya ul., Moscow, 117997, Russian Federation

For citation: Karimov A. R., Bogdanov V. K. Impact of collisions on the dynamics of waves of finite amplitude in a plasma. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2022, vol. 18, iss. 2, pp. 231–238.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2022.204 (In Russian)

The problem of determining wave dynamics, considering the evolution of nonlinear waves of finite amplitude in a weakly collisional, Maxwellian plasma, is the focus of this article. Considering this medium with a certain interaction potential associated with a certain limited core of pairwise interaction, the dynamics of the distribution function was studied using the Vlasov equation. Collisions of electrons with neutral particles are described using the collision integral in the Bhatnagar — Gross — Krook form. Having constructed its particular solution and the equilibrium distribution function in the form of a series, an equation was obtained that makes it possible to determine the potential function. Considering the case of a Maxwellian plasma, an integral potential equation was obtained. Based on it, an equation was constructed that determines the perturbation of the potential relative to the spatially homogeneous one. At the same time, this perturbation appears due to the existence of some spatial-temporal stable structure. Based on this, a dispersion relation was obtained, which makes it possible to estimate the spatial scales of the coherent structure.

Keywords: nonideal plasma, weak collisions, coherent structures, waves of finite amplitude.

References

1. Fainberg Ja. B. Uskorenie chastits v plasme [Acceleration of particles in plasma.] *Atomic Energy*, 1959, vol. 6, iss. 4, pp. 431–446. (In Russian)

2. Ashanin I. A., Klyuchevskaya Yu. D., Makhoro A. A., Mekhanikova V. Yu., Mosolova O. A., Polozov S. M., Pronikov A. I., Rashchikov V. I. Dinamika puchka v lineinom uskoritele-inzhektore Spetsializirovannogo istochnika sinkhrotronnogo izlucheniia 4-go pokoleniia ISSI-4 [Beam dynamics in the linear accelerator-injector of the Specialized source of synchrotron radiation of the 4^{th} generation ISSI-4]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2019, vol. 15, no. 1, pp. 126–139. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2019.110 (In Russian)

3. Kadomtsev B. B. Zatukhanie Landau i echo v plasme [Landau damping and echo in plasma.] *Usp. phys. nauk* [*Successes of Physical Sciences*], 1968, vol. 95, iss. 1, pp. 111–129. (In Russian)

4. Schamel H. Hole equilibria in Vlasov — Poisson systems: A challenge to wave theories of ideal plasmas. *Phys. Plasmas*, 2000, vol. 7, iss. 12, pp. 4831–4844.

5. Ovsyannikov D. A., Drivotin O. I. *Modelirovanie intensivnykh puchkov zariazhennykh chastits* [*Simulation of intense beams of charged particles*]. St Petersburg, St Petersburg State University Press, 2003, 176 p. (In Russian)

6. Diamond P. H., Itoh S.-I., Itoh K., Hahm T. S. Zonal flows in plasma — a review. *Plasma Phys. Control. Fusion*, 2005, vol. 47, iss. 5, pp. R35–R161.

---

* This work was financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (contract N 075-15-2021-1361 dated October 07, 2021), and within the framework of the grant “Regulation of structure formation processes in macromolecular compounds under non-equilibrium conditions” of the G. V. Plekhanov Russian Economic University (order N 657 of June 07, 2021).

7. Rowlands G., Dieckmann M. E., Shukla P. K. The plasma filamentation instability in one dimension: nonlinear evolution. *New J. Phys.*, 2007, vol. 9, iss. 8, no. 247.

8. Polozov S. M. A possible scheme of electron beam bunching in laser plasma accelerators. *NIM A*, 2013, vol. 729, iss. 11, pp. 517–521.

9. Roudskoy I., Kulevoy T. V., Petrenko S. V., Kuibeda R. P., Seleznev D. N., Pershin V. I., Hershcovitch A., Johnson B. M., Gushenets V. I., Oks E. M., Poole H. P. Bernas ion source discharge simulation. *Review of Scientific Instruments*, 2008, vol. 79, iss. 2, p. 02B313.

10. Potanin E. P. Nagrev ionov gadolinievoi plazmy metodom ionnogo tsiklotronnogo rezonansa [Heating of gadolinium plasma ions by the ion cyclotron resonance method]. *Journal of Technical Physics*, 2006, vol. 76, iss. 12, pp. 47–51. (In Russian)

11. Van Kampen N. G. On the theory of stationary waves in plasmas. *Physica*, 1955, vol. 21, pp. 949–963.

12. Case K. M. Plasma oscillations. *Ann. Phys.*, 1959, vol. 7, iss. 3, pp. 349–364.

13. Bernstein I. B., Greene J. M., Kruskal M. D. Exact nonlinear plasma oscillations. *Phys. Rev.*, 1957, vol. 108, iss. 3, pp. 546–549.

14. Villani C. Particle systems and nonlinear Landau damping. *Phys. Plasmas*, 2014, vol. 21, iss. 3, p. 030901.

15. Kaganovich I. D. Effects of collisions and particle trapping on collisionless heating. *Phys. Rev.*, 1999, vol. 88, iss. 2, pp. 327–330.

16. Zheng J., Qin H. On the singularity of the Vlasov — Poisson system. *Phys. Plasmas*, 2013, vol. 20, iss. 9, p. 092114.

17. Karimov A. R., Lewis H. R. Nonlinear solutions of the Vlasov — Poisson equations. *Phys. Plasmas*, 1999, vol. 6, iss. 3, pp. 759–761.

18. Karimov A. R. Nonlinear solutions of a Maxwellian type for the Vlasov — Poisson equations. *Phys. Plasmas*, 2001, vol. 8, iss. 5, pp. 1533–1537.

19. Karimov A. R., Bogdanov V. K. Formation of kinetics coherent structures in weakly collisional media. *Plasma*, 2021, vol. 4, iss. 2, pp. 359–365.

20. Vlasov A. A. *Nelokal'naia statisticheskaia mekhanika* [*Nonlocal statistical mechanics*]. Moscow, Nauka Publ., 1978, 264 p. (In Russian)

Received: April 11, 2022.
Accepted: May 05, 2022.

Authors' information:

Alexander R. Karimov — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; arkarimov@mephi.ru

Vladislav K. Bogdanov — bogdanov.starscream@mail.ru