УДК 517.977 Вестник СПбГУ. Прикладная математика. Информатика... 2022. Т. 18. Вып. 1
MSC 34H05, 34G20, 34K10

Решение локальной граничной задачи в классе дискретных управлений для нелинейной нестационарной системы

А. Н. Квитко, Н. Н. Литвинов

Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация,
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Квитко А. Н., Литвинов Н. Н.* Решение локальной граничной задачи в классе дискретных управлений для нелинейной нестационарной системы // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2022. Т. 18. Вып. 1. С. 18–36. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2022.102

Разработан алгоритм построения ограниченной по норме дискретной управляющей функции, обеспечивающей перевод широкого класса нелинейных нестационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений из начального состояния в заданное конечное состояние. Найдено конструктивное достаточное условие, при котором возможен указанный перевод. Эффективность метода иллюстрируется при решении задачи управления однозвенным роботом-манипулятором и ее численном моделировании.

Ключевые слова: дискретное управление, нелинейная нестационарная система, стабилизация, граничные условия.

1. Введение. Одним из важных направлений развития математической теории управления является решение вопросов, связанных с построением управляющих функций, переводящих объект управления, описываемый системой обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), из начального состояния в некоторое заданное конечное состояние. Эти вопросы составляют предмет исследования граничных задач для управляемых систем ОДУ.

Полное решение граничной задачи для линейных систем в классе управляющих функций, суммируемых с квадратом, получено в работе [1]. В последующие десятилетия появились исследования, посвященные изучению граничных задач для линейных, квазилинейных и нелинейных систем специального вида в классах измеримых, непрерывных, кусочно-дифференцируемых и импульсных управляющих функций.

В свою очередь, использование цифровой вычислительной техники при формировании управляющего воздействия диктует необходимость применения дискретных управлений. Это обстоятельство обосновывает актуальность исследования граничных задач для управляемых систем ОДУ в классе указанных управлений.

Основные подходы к решению граничных задач в классе дискретных управлений на конечном промежутке времени включают в себя вопросы, связанные с нахождением необходимых и достаточных условий, гарантирующих существование их решений [2–8], построения или оценки множества достижимости, а также разработки точных или приближенных методов построения искомых управляющих функций [4, 5, 8–13].

Значительный практический интерес представляют задачи стабилизации линейных и нелинейных систем ОДУ в классе дискретных управлений. Эти задачи можно рассматривать как граничные на бесконечном интервале времени [11–17].

В настоящее время локальные и глобальные граничные задачи в классе дискретных управлений достаточно хорошо изучены для линейных, квазилинейных и нелинейных систем специального вида [2–26]. Однако теория решения граничных задач для нелинейных систем ОДУ общего вида в данном классе управлений еще недостаточно разработана и трудности по ее созданию велики.

Главное отличие результатов настоящей статьи от известных ранее состоит в том, что для широкого класса нелинейных нестационарных систем ОДУ получен достаточно простой для численной реализации алгоритм построения ограниченных по норме дискретных управляющих функций, гарантирующих перевод из начального состояния в начало координат. Кроме того, найдено конструктивное достаточное условие, гарантирующее существование указанного управления.

2. Постановка задачи и основная теорема. Рассмотрим управляемую систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, u, t), \tag{1}$$

в которой $x \in \mathbb{R}^n,\ x = (x_1, \ldots, x_n)^T,\ u \in \mathbb{R}^r,\ u = (u_1, \ldots, u_r)^T,\ r \leqslant n,\ t \in [0,1], f = (f_1, \ldots, f_n)^T,\ f \in C^{(n)}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^1; \mathbb{R}^n)$;

$$\|u\| \leqslant N,\ \ N > 0,\ \ N = \text{const}. \tag{2}$$

В дальнейшем под нормой вектора x будем понимать величину $\|x\| = \sqrt{\sum x_i^2}$, а под нормой матрицы — норму, согласованную с нормой вектора x.

Правая часть системы (1) удовлетворяет условиям

$$f(0, 0, t) \equiv 0, \tag{3}$$

$$A_0 = \tfrac{\partial f}{\partial x}(0,0,1),\ B_0 = \tfrac{\partial f}{\partial u}(0,0,1),\ S_0 = (B_0, A_0B_0, \ldots, A_0^{n-1}B_0),$$

$$\text{rank}\ S_0 = n. \tag{4}$$

Введем в рассмотрение матрицы вида

$$\begin{aligned} P &= \alpha e^{-\alpha\tau}A_0 + \alpha e^{-2\alpha\tau}A_1 + \ldots + \alpha e^{-(n-1)\alpha\tau}A_{n-2}, \\ Q &= \alpha e^{-\alpha\tau}B_0 + \alpha e^{-2\alpha\tau}B_1 + \ldots + \alpha e^{-(n-1)\alpha\tau}B_{n-2}, \end{aligned} \tag{5}$$

где $A_i = \frac{(-1)^i}{i!}\frac{\partial^{i+1} f}{\partial x \partial t^i}(0,0,1)$, $i = 1, \ldots, n-1$; $B_i = \frac{(-1)^i}{i!}\frac{\partial^{i+1} f}{\partial u \partial t^i}(0,0,1)$, $i = 1, \ldots, n-1$.

Построим матрицу

$$S = \big\{L_1(\tau), \ldots, L_n(\tau)\big\},$$

здесь $\mathrm{L}_1(\tau) = Q(\tau),\ L_i(\tau) = P(\tau)L_{i-1}(\tau) - \frac{dL_{i-1}}{d\tau},\ i = 2, \ldots, n$. Пусть

$$\text{rank}\ S(\tau) = n,\ \ \tau \in [0, \infty),\ \alpha > 0. \tag{6}$$

Рассмотрим разбиение интервала $[0, 1]$ на бесконечное число точек:

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k < 1,$$

где $t_k \to \infty$ при $k \to \infty$.

Определение. *Управление* $u(t)$ *назовем дискретным, если* $u(t) = u_k$, $u_k \in R^r$, $\forall t \in [t_k, t_{k+1})$, $k = 0, 1, \dots$.

Задача 1. Найти дискретное управление $u(t)$, определенное на бесконечном разбиении интервала $[0, 1]$ и абсолютно непрерывную функцию $x(t)$, которые почти всюду удовлетворяют системе (1) и условиям

$$x(0) = x_0,\ x(1) = 0,\ x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)^T.$$

Задача 2. Найти дискретное управление $u(t)$, определенное на конечном разбиении $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m < 1$ интервала $[0, 1]$, $t \in [0, t_m]$ и абсолютно непрерывную функцию $x(t)$, почти всюду удовлетворяющую системе (1) и условиям

$$x(0) = x_0,\ \| x(t_m) \| \leqslant \varepsilon_1,\ |t_m - 1| < \varepsilon_2,$$

где t_m — неизвестное значение времени; $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ — фиксированные числа.

Теорема. *Предположим, что для правой части системы уравнений* (1) *выполнены условия* (3), (4), (6), *тогда есть* $\varepsilon > 0$ *такое, когда для всех* x_0, *таких, что* $\|x_0\| < \varepsilon$, *существуют решения задач 1 и 2, которые могут быть найдены при помощи решения задачи стабилизации линейной нестационарной системы ОДУ с экспоненциальными коэффициентами и последующим решением задачи Коши для вспомогательной системы.*

3. Построение вспомогательной системы. Рассмотрим задачу.

Найти абсолютно непрерывную функцию $x(t)$ и дискретную управляющую функцию $\bar{u}(t)$, которые почти всюду удовлетворяют системе (1) и условиям

$$x(0) = x_0,\ x(t) \to 0 \ \text{ при } t \to 1. \tag{7}$$

Указанную пару функций $x(t)$, $\bar{u}(t)$ будем называть решением задачи (1), (7).

Очевидно, имея решение задачи (1), (7), с помощью предельного перехода при $t \to 1$ можно получить решение задачи 1.

Для решения задачи (1), (7) выполним в системе (1) преобразование независимой переменной t по формуле

$$t(\tau) = 1 - e^{-\alpha\tau},\ \tau \in [0, \infty), \tag{8}$$

где $\alpha > 0$ — некоторая постоянная, которая подлежит определению.

Тогда исходная система (1) и условия (7) примут вид

$$\frac{dc}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau} f(c, d, t(\tau)), \tag{9}$$

$$c(0) = x_0,\ c(\tau) \to 0 \ \text{ при } \ \tau \to \infty,$$

$$c(\tau) = x(t(\tau)),\ c = (c_1 \dots c_n)^T,\ d(\tau) = u(t(\tau)),\ d = (d_1 \dots d_r)^T. \tag{10}$$

Рассмотрим дискретную управляющую функцию вида

$$\bar{d}(\tau) = d(kh),\ \tau \in [kh, (k+1)h),\ h > 0,\ k = 0, 1, \dots .$$

Задача 3. Найти дискретное управление $\bar{d}(\tau)$ и абсолютно непрерывную функцию $c(\tau)$, которые удовлетворяют почти всюду системе (9) и следующим условиям:

$$c(0) = x_0,\ c(\tau) \to 0 \text{ при } \tau \to \infty. \tag{11}$$

Искомую пару функций $c(\tau)$, $\bar{d}(\tau)$ назовем решением задачи (9), (11).

Введем обозначения: $\tilde{x} = \theta_i c,\ \tilde{d} = \theta_i d,\ \tilde{t}(\tau) = 1 - \theta_i e^{-\alpha\tau},\ \theta_i \in [0,1]$.

Пусть $k_1, \ldots, k_n$, $m_1, \ldots, m_r$ — произвольные натуральные числа, тогда

$$|k| = \sum_{j=1}^{n} k_j,\ |m| = \sum_{j=1}^{r} m_j,\ k! = k_1! \ldots k_n!,\ m! = m_1! \ldots m_r!.$$

Представим правую часть системы (9) в окрестности точки $(0,0,1)$ в виде ряда Тейлора:

$$\begin{gathered}
\frac{dc_i}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0,0,1) c_j + \alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial f_i}{\partial u_j}(0,0,1) d_j + \\
+ \frac{1}{2}\alpha e^{-\alpha\tau} \Bigg(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(0,0,1) c_j c_k + \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r} \frac{\partial^2 f_i}{\partial u_j \partial u_k}(0,0,1) d_j d_k + \\
+ 2 \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{r} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial u_k}(0,0,1) c_j d_k - 2\alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial t}(0,0,1) c_j - \\
- 2\alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial^2 f_i}{\partial u_j \partial t}(0,0,1) d_j \Bigg) + \ldots + \\
+ \alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{\substack{|k|+|m|+l=n-1,\\ |k|+|m|\geqslant 1}} \frac{1}{k!m!l!} \frac{\partial f_i^{|k|+|m|+l}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n} \partial u_1^{m_1} \ldots \partial u_r^{m_r} \partial t^l}(0,0,1) \times \\
\times c_1^{k_1} \ldots c_n^{k_n} d_1^{m_1} \ldots d_r^{m_r} (-1)^l e^{-l\alpha\tau} + \\
+ \alpha e^{-\alpha\tau} \times \sum_{\substack{|k|+|m|+l=n,\\ |k|+|m|\geqslant 1}} \frac{1}{k!m!l!} \frac{\partial f_i^{|k|+|m|+l}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n} \partial u_1^{m_1} \ldots \partial u_r^{m_r} \partial t^l}(\tilde{c}, \tilde{d}, \tilde{t}(\tau)) \times \\
\times c_1^{k_1} \ldots c_n^{k_n} d_1^{m_1} \ldots d_r^{m_r} (-1)^l e^{-l\alpha\tau},\ i = 1, \ldots, n.
\end{gathered} \tag{12}$$

Все рассуждения, приведенные ниже, будем проводить с учетом ограничений на функцию $c(\tau)$:

$$\|c(\tau)\| < C_1,\ C_1 > 0,\ \tau \in [0, \infty). \tag{13}$$

Объединяя в правой части системы (12) все слагаемые, линейные по компонентам векторов c и d с коэффициентами $e^{-i\alpha\tau}$, $i = 1, \ldots, n$, систему (12) можно записать следующим образом:

$$\begin{gathered}
\frac{dc}{d\tau} = P \cdot c + Q \cdot d + R_1(c,d,\tau) + R_2(c,d,\tau) + R_3(c,d,\tau), \\
R_1 = (R_1^1 \ldots R_1^n)^T,\ R_2 = (R_2^1 \ldots R_2^n)^T,\ R_3 = (R_3^1 \ldots R_3^n)^T,
\end{gathered} \tag{14}$$

где P и Q определяются по формулам (5). Через R_i^1 обозначены слагаемые правой части системы (14), которые линейно зависят от компонент вектора c с коэффициентами $e^{-n\alpha\tau}$, через R_i^2 — слагаемые, линейно зависящие от компонент вектора d с коэффициентами $e^{-n\alpha\tau}$. В R_i^3 входят все слагаемые, нелинейные по компонентам векторов c и d.

Из построения функций R_1, R_2, R_3 с учетом (2), (13) следуют оценки

$$\|R_1(c,d,\tau)\| \leqslant e^{-n\alpha\tau}L_1\|c\|,\ L_1>0, \tag{15}$$

$$\|R_2(c,d,\tau)\| \leqslant e^{-n\alpha\tau}L_2\|d\|,\ L_2>0, \tag{16}$$

$$\|R_3(c,d,\tau)\| \leqslant e^{-\alpha\tau}L_3(\|c\|^2+\|d\|^2),\ L_3>0. \tag{17}$$

Введем вспомогательную управляющую функцию $\upsilon(\tau)$, связанную с $d(\tau)$ следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{dd(\tau)}{d\tau} = \upsilon(\tau),\ \upsilon = (\upsilon_1,\dots,\upsilon_r)^T. \tag{18}$$

Пусть

$$d(0) = 0. \tag{19}$$

Тогда система (14), (18) и начальные условия (11), (19) могут быть записаны так:

$$\frac{d\bar{c}}{d\tau} = \bar{P}\cdot\bar{c} + \bar{Q}\cdot\upsilon + \bar{R}_1(c,d,\tau) + \bar{R}_2(c,d,\tau) + \bar{R}_3(c,d,\tau), \tag{20}$$

$$\bar{P} = \begin{pmatrix} P & Q \\ O_1 & O_2 \end{pmatrix}_{n+r\times n+r},\ \bar{Q} = \begin{pmatrix} O_3 \\ E \end{pmatrix}_{n+r\times r}, \tag{21}$$

где $\bar{c} = (c,d)^T_{n+r\times 1}$, $\bar{R}_1 = (R_1^1,\dots,R_1^n,0,\dots,0)^T_{n+r\times 1}$; $\bar{R}_2 = (R_2^1,\dots,R_2^n,0,\dots,0)^T_{n+r\times 1}$; $\bar{R}_3 = (R_3^1,\dots,R_3^n,0,\dots,0)^T_{n+r\times 1}$; O_1,O_2,O_3 — матрицы соответствующих размерностей, состоящие из нулевых элементов; E — единичная матрица,

$$\bar{c}(0) = \bar{c}_0,\ \bar{c}_0 = (c(0),0,\dots,0)^T_{n+r\times 1}. \tag{22}$$

4. Решение задачи стабилизации вспомогательной системы. Рассмотрим линейную часть системы (20):

$$\frac{d\bar{c}}{d\tau} = \bar{P}\cdot\bar{c} + \bar{Q}\cdot\upsilon. \tag{23}$$

Лемма. *Пусть для системы дифференциальных уравнений* (1) *выполнены условия* (4), (6), *тогда существует вспомогательная управляющая функция* $\upsilon(\tau)$ *вида*

$$\upsilon(\tau) = M(\tau)\bar{c}, \tag{24}$$

$$\|M(\tau)\| = O(e^{n\alpha\tau})\ \textit{при}\ \tau\to\infty, \tag{25}$$

которая обеспечивает экспоненциальное убывание фундаментальной матрицы системы (23), *замкнутой функцией* (24).

Приведем краткое описание основных этапов решения поставленной задачи.

После решения задачи стабилизации системы (23) находим решение задачи Коши для системы (20) с начальными условиями (22), замкнутую найденным вспомогательным управлением (24). В итоге получим функции $c(\tau)$, $d(\tau)$, $\upsilon(\tau)$ при $\tau\in[0,\infty)$. Далее построим функцию

$$\bar{d}(\tau) = d(kh),\ \tau\in[kh,(k+1)h),\ k=0,1,\dots, \tag{26}$$

и решим задачу Коши для системы (20) с начальными условиями (22) после подстановки функции $\bar{d}(\tau)$ в ее правую часть первых n уравнений. В результате получим функцию $\bar{c}(\tau)$. В свою очередь, первая компонента $\bar{c}(\tau)$ даст функции $c(\tau)$. Если в функциях $c(\tau)$, $\bar{d}(\tau)$ перейти к исходным независимым переменным по формулам (8), (10), то из построения системы (20) будем иметь функции $x(t)$, $\bar{u}(t)$, которые являются решением задачи 3. Переходя к пределу в функциях $x(t)$, $\bar{u}(t)$ при $t \to 1$, получим решение задачи 1. При этом точки переключения дискретного управления t_k определяются по формуле

$$t_k = 1 - e^{-\alpha k h}, \;\; k = 0, 1, \dots . \tag{27}$$

Если выбрать в решении задачи 1 значения t_m такие, что $\| \, x(t_m) \, \| \leqslant \varepsilon_1$, $1 - t_m < \varepsilon_2$, то сужения функций $x(t)$, $\bar{u}(t)$ на промежутке $[0, t_m]$ дадут решение задачи 2.

Доказательство леммы. Обозначим через L_1^j, $j = 1, \dots, r$, j-й столбец матрицы $\bar{Q}$. Рассмотрим матрицу

$$\begin{gathered} S_1 = \left\{ L_1^1, L_2^1, \dots, L_{k_1}^1, L_1^2, L_2^2, \dots, L_{k_2}^2, \dots, L_1^r, L_2^r, \dots, L_{k_r}^r \right\}, \\ L_i^j = \bar{P} L_i^{j-1} - \frac{dL_i^{j-1}}{d\tau}, \; j = 1, \dots, r, \; i = 2, \dots, k_j, \end{gathered} \tag{28}$$

где $k_j, j = 1, \dots, r,$ — максимальное количество столбцов матрицы $L_1^j, \dots, L_{k_j}^j$, $j = 1, \dots, r$, таких, что векторы $L_1^1, L_2^1, \dots, L_{k_1}^1, L_1^2, L_2^2, \dots, L_{k_2}^2, \dots, L_1^r, L_2^r, \dots, L_{k_r}^r$ линейно независимы.

Замечание 1. Легко видеть, что матрица S_1 с точностью до перестановки столбцов имеет следующую структуру:

$$S_1 = \begin{pmatrix} O_{n \times r} & L_1 & \dots & L_n \\ E_{r \times r} & O_{r \times r} & \dots & O_{r \times r} \end{pmatrix},$$

где $O_{r \times r}$ — матрица размера $r \times r$, состоящая из нулевых элементов,

$$L_1 = Q, \; L_i = P L_i - \tfrac{dL_i}{d\tau}, \; i = 2, \dots, n.$$

Пусть $\bar{L}_1^j$, $j = 1, \dots, r,$ — j-й столбец матрицы $\alpha e^{-\alpha\tau} B_0$. Рассмотрим матрицу

$$\begin{gathered} S_2 = \left\{ \bar{L}_1^1, \bar{L}_2^1, \dots, \bar{L}_{k_1}^1, \bar{L}_1^2, \bar{L}_2^2, \dots, \bar{L}_{k_2}^2, \dots, \bar{L}_1^r, \bar{L}_2^r, \dots, \bar{L}_{k_r}^r \right\}, \\ \bar{L}_i^j = \alpha e^{-\alpha\tau} A_0 \bar{L}_i^{j-1} - \tfrac{d\bar{L}_i^{j-1}}{d\tau}, \; j = 1, \dots, r, \; i = 2, \dots, k_j. \end{gathered}$$

С одной стороны, при помощи рассуждения от противного и принимая во внимание (4), можно убедиться в справедливости условия

$$\operatorname{rank} S_2 = n, \; \tau \in [0, \infty). \tag{29}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} A_0 + e^{-\alpha\tau} A_1 + \ldots + e^{-(n-2)\alpha\tau} A_{n-2} \to A_0 \text{ при } \tau \to \infty, \\ B_0 + e^{-\alpha\tau} B_1 + \ldots + e^{-(n-2)\alpha\tau} B_{n-2} \to B_0 \text{ при } \tau \to \infty. \end{aligned} \tag{30}$$

Из (29), (30) следует оценка

$$\|S_2^{-1}\| = O(e^{n\alpha\tau}), \;\; \tau \to \infty. \tag{31}$$

Из условия (6) и структуры матрицы S_1 (см. Замечание 1) вытекает условие

$$\operatorname{rank} S_1 = n + r,\ \tau \in [0, \infty). \tag{32}$$

Из построения столбцов матрицы S_2 находим, что ее элементы убывают со скоростью не выше $e^{-n\alpha\tau}$. Отсюда и из структуры матриц $\bar{P}$ и $\bar{Q}$ следует, что элементы матрицы S_2^{-1} будут возрастать со скоростью не выше, чем $e^{n\alpha\tau}$ (см. (31)). В результате имеем оценку

$$\|S_1^{-1}\| = O(e^{n\alpha\tau}),\ \tau \to \infty. \tag{33}$$

Используя (32), выполним замену переменных:

$$\bar{c} = S_1(\tau)y. \tag{34}$$

В итоге система (23) примет вид

$$\frac{dy}{d\tau} = S_1^{-1}\left(\bar{P}S_1 - \frac{dS_1}{d\tau}\right)y + S_1^{-1}\bar{Q}\upsilon. \tag{35}$$

В соответствии с [27] матрицу правой части системы (35) запишем следующим образом:

$$S_1^{-1}\left(\bar{P}S_1 - \frac{dS_1}{d\tau}\right) = \{e_2, \ldots, e_{k_1}, \varphi_{k_1}(\tau), \ldots, e_{k_1+\ldots+k_{r-1}+2}, \ldots, e_{k_1+\ldots+k_r}, \varphi_{k_r}(\tau)\}. \tag{36}$$

В (36) $e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)^T_{n+r\times 1}$ — столбец матрицы, в котором 1 стоит на i-м месте.

Компоненты вектора $\varphi_{k_j}(\tau)$ имеют вид

$$\varphi_{k_j}(\tau) = (-\varphi^1_{k_1}(\tau), \ldots, -\varphi^{k_1}_{k_1}(\tau), \ldots, -\varphi^1_{k_j}(\tau), \ldots, -\varphi^{k_j}_{k_j}(\tau), 0, \ldots, 0)^T_{n+r\times 1},$$

где $-\varphi^i_{k_j}(\tau)$ — коэффициенты разложения вектора $L^j_{k_j+1}$ по векторам $L^1_i,\ i = 1, \ldots, k_1$; $L^2_i,\ i = 1, \ldots, k_2$; $L^j_i,\ i = 1, \ldots, k_j,\ j = 1, \ldots, r,\ \sum_{j=1}^r k_j = n + r$;

$$\begin{gathered} L^j_{k_j+1} = -\sum_{i=1}^{k_1}\varphi^i_{k_1}(\tau)L^1_i - \ldots - \sum_{i=1}^{k_j}\varphi^i_{k_j}(\tau)L^j_i, \\ S_1^{-1}Q = \{e_1, \ldots, e_{k_j+1}, \ldots, e_{\gamma+1}\},\quad \gamma = \sum_{i=1}^{r-1} k_i. \end{gathered} \tag{37}$$

Рассмотрим задачу стабилизации системы

$$\frac{dy_{k_j}}{d\tau} = \{e^{k_j}_2, \ldots, e^{k_j}_2, \bar{\varphi}_{k_j}\}y_{k_j} + e^{k_j}_1 d_j,\ j = 1, \ldots, r, \tag{38}$$

в которой $y_{k_j} = (y^1_{k_j}, \ldots, y^{k_j}_{k_j})^T_{k_j\times 1}$, $e^{k_j}_1 = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)^T_{k_j\times 1}$, 1 на i-м месте, $\bar{\varphi}^i_{k_j} = (-\varphi^1_{k_j}, \ldots, -\varphi^{k_j}_{k_j})^T_{k_i\times 1}$.

Пусть $y_{k_j}^{k_j} = \psi$. Из структуры матрицы правой части системы (38) следуют равенства

$$\begin{gathered} y_{k_j}^{k_j} = \psi,\ y_{k_j}^{k_j-1} = \psi^{(1)} + \varphi_{k_j}^{k_j}\psi, \\ y_{k_j}^{k_j-2} = \psi^{(2)} + \varphi_{k_j}^{k_j}\psi^{(1)} + \left(\frac{d\varphi_{k_j}^{k_j}}{d\tau} + \varphi_{k_j}^{k_j-1}\right)\psi, \\ y_{k_j}^{1} = \psi^{(k_j-1)} + r_{k_j-2}(\tau)\psi^{(k_j-2)} + \ldots + r_1(\tau)\psi^{(1)} + r_0(\tau)\psi. \end{gathered} \tag{39}$$

После дифференцирования последнего равенства (39) и подстановки последнего выражения в первое уравнение системы (38) будем иметь систему

$$\psi^{(k_j)} + \varepsilon_{k_j-1}(\tau)\psi^{(k_j-1)} + \ldots + \varepsilon_0(\tau)\psi = \upsilon_j,\ j = 1, \ldots, r. \tag{40}$$

Замечание 2. Из построения матриц $\bar{P}$ и $\bar{Q}$, а также из формул (37) вытекает ограниченность функций $\varphi_{k_j}^{k_j}, \ldots, \varphi_{k_j}^{2}, \varphi_{k_j}^{1}$, их производных, а также функций $r_{k_j-2}(\tau), \ldots, r_1(\tau), r_0(\tau)$.

Пусть

$$\upsilon_j = \sum_{i=1}^{k_j} (\varepsilon_{k_j-i}(\tau) - \gamma_{k_j-i})\psi^{(k_j-i)},\ \ j = 1, \ldots, r, \tag{41}$$

и коэффициенты γ_{k_j-i} выбраны таким образом, чтобы корни характеристического уравнения

$$\lambda^{k_i} + \gamma_{k_i-1}\lambda^{k_i-1} + \ldots + \gamma_0 = 0,\ i = 1, \ldots, r,$$

удовлетворяли условиям

$$\lambda_{k_i}^{i} \neq \lambda_{k_i}^{j},\ i \neq j;\ \lambda_{k_i}^{j} < -(2n+1)\alpha - 1,\ j = 1, \ldots, k_i,\ i = 1, \ldots, r. \tag{42}$$

Возвращаясь к исходным переменным, получаем

$$\upsilon_j = \delta_{k_j} T_{k_j}^{-1} S_{1k_j}^{-1}\bar{c},\ \ j = 1, \ldots, r, \tag{43}$$

где $\delta_{k_j} = (\varepsilon_{k_j-1}(\tau) - \gamma_{k_j-1}, \ldots, \varepsilon_0(\tau) - \gamma_0)$; T_{k_j} — матрица из равенств (39) такая, что $y_{k_j} = T_{k_j}\bar{\psi}$, $\bar{\psi} = (\psi^{k_j-1}, \ldots, \psi)^T$; $S_{1k_j}^{-1}$ — матрица, состоящая из соответствующих k_j строк S_1^{-1}.

Полученная вспомогательная управляющая функция может быть записана в форме (24), в которой $M(\tau) = \delta_k T_k^{-1} S_{1k}^{-1} = (\delta_{k_1} T_{k_1}^{-1} S_{1k_1}^{-1}, \ldots, \delta_{k_r} T_{k_r}^{-1} S_{1k_r}^{-1})^T$.

Пусть $\Psi(\tau)$ — фундаментальная матрица системы (40), замкнутая вспомогательным управлением (41). Из (42) следует, что $\Psi(\tau)$ является фундаментальной матрицей экспоненциально устойчивой линейной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Отсюда вытекает, что

$$\|\Psi(\tau)\Psi(t)^{-1}\| \leqslant \bar{M}e^{-\lambda(\tau-t)},\ \bar{M} > 0,\ \lambda > 0. \tag{44}$$

Рассмотрим систему (23), замкнутую вспомогательной управляющей функцией (43):

$$\frac{d\bar{c}}{d\tau} = D(\tau)\bar{c},\ D(\tau) = \bar{P}(\tau) + \bar{Q}(\tau)M(\tau). \tag{45}$$

Пусть $\Phi(\tau)$ ($\Phi(0) = E$) — фундаментальная матрица системы (45), E — единичная матрица. Введем блочную диагональную матрицу $T(\tau)$ с матрицами T_{k_j}, $j = 1, \ldots, r$, на ее диагонали. Из формул (34) и (39) получаем равенство

$$\Phi(\tau) = S_1(\tau)T(\tau)\Psi(\tau)\Psi^{-1}(0)T^{-1}(0)S_1^{-1}(0). \tag{46}$$

Далее, из (33), (34), (39), (44), (46) и замечания 2 следуют оценки

$$\begin{gathered} \|\Phi(\tau)\| \leqslant \bar{K}e^{-\lambda\tau},\ \lambda > 0,\ \bar{K} > 0, \\ \|\Phi(\tau)\Phi^{-1}(t)\| \leqslant \bar{K}_1 e^{-\lambda(\tau-t)}e^{(n-1)\alpha t},\ \tau \geqslant t,\ \bar{K}_1 > 0, \\ \|M(\tau)\| = O(e^{n\alpha\tau}),\ \tau \to \infty. \end{gathered} \tag{47}$$

Лемма доказана.

5. Доказательство теоремы. Рассмотрим систему (20), замкнутую найденным вспомогательным управлением (24):

$$\frac{d\bar{c}}{d\tau} = D(\tau)\bar{c} + \bar{R}_1(c, d, \tau) + \bar{R}_2(c, d, \tau) + \bar{R}_3(c, d, \tau). \tag{48}$$

Выполним следующую замену переменных:

$$\bar{c} = z(\tau)e^{-n\alpha\tau},\ z = (z_1, z_2)^T,\ \bar{c}(0) = z(0),\ c = z_1(\tau)e^{-n\alpha\tau},\ d = z_2(\tau)e^{-n\alpha\tau}. \tag{49}$$

В результате система примет вид

$$\begin{gathered} \frac{dz}{d\tau} = C(\tau)z + e^{n\alpha\tau}(\bar{R}_1(z_1e^{-n\alpha\tau}, z_2e^{-n\alpha\tau}, \tau) + \bar{R}_2(z_1e^{-n\alpha\tau}, z_2e^{-n\alpha\tau}, \tau) + \\ + \bar{R}_3(z_1e^{-n\alpha\tau}, z_2e^{-n\alpha\tau}, \tau)),\ C(\tau) = D(\tau) + n\alpha E. \end{gathered} \tag{50}$$

Покажем, что все решения системы (50) с начальными условиями (49), начинающиеся в достаточно малой окрестности нуля, экспоненциально убывают.

Пусть $\Phi_1(\tau)$, $\Phi_1(0) = E$, — фундаментальная матрица системы $\frac{dz}{d\tau} = C(\tau)z$. Тогда, согласно (47), (49):

$$\|\Phi_1(\tau)\| \leqslant \bar{K}e^{-\beta\tau},\ \|\Phi_1(\tau)\Phi_1^{-1}(t)\| \leqslant K_1 e^{-\beta(\tau-t)}e^{(n-1)\alpha t},\ \beta = \lambda - n\alpha,\ \tau \geqslant t. \tag{51}$$

Выберем значение α так, чтобы выполнялось условие

$$\beta > 0. \tag{52}$$

Решение системы (48) с начальными условиями (22), (49) представим следующим образом:

$$\begin{gathered} z(\tau) = \Phi_1(\tau)\Phi_1^{-1}(\tau_1)z(\tau_1) + \int\limits_{\tau_1}^{\tau} \Phi_1(\tau)\Phi_1^{-1}(t)e^{n\alpha t}(R_1(z_1e^{-n\alpha t}, z_2e^{-n\alpha t}, t) + \\ + R_2(z_1e^{-n\alpha t}, z_2e^{-n\alpha t}, t) + R_3(z_1e^{-n\alpha t}, z_2e^{-n\alpha t}, t))dt, \quad \tau \in [\tau_1, \infty), \end{gathered} \tag{53}$$

$$\begin{gathered} z(\tau) = \Phi_1(\tau)\bar{c}(0) + \int\limits_{0}^{\tau} \Phi_1(\tau)\Phi_1^{-1}(t)e^{n\alpha t}(R_1(z_1e^{-n\alpha t}, z_2e^{-n\alpha t}, t) + \\ + R_2(z_1e^{-n\alpha t}, z_2e^{-n\alpha t}, t) + R_3(z_1e^{-n\alpha t}, z_2e^{-n\alpha t}, t))dt, \quad \tau \in [0, \tau_1]. \end{gathered} \tag{54}$$

Из (53), (54) с учетом (15)–(17), (51), (52) в области (2), (13) следуют оценки

$$\|z(\tau)\| \leqslant \bar{K}e^{-\beta\tau}\|\Phi_1^{-1}(\tau_1)z(\tau_1)\| + \int\limits_{\tau_1}^{\tau} K_1 e^{-\beta(\tau-t)}Le^{-\alpha t}\|z\|dt,\ \tau \in [\tau_1, \infty), \tag{55}$$

$$\|z(\tau)\| \leqslant \bar{K}e^{-\beta\tau}\|c(0)\| + \int\limits_{0}^{\tau} K_1 e^{-\beta(\tau-t)}Le^{-\alpha t}\|z\|dt,\ \tau \in [0, \tau_1], \tag{56}$$

в которых $L > 0$ — константа, зависящая от области (2), (13).

Воспользовавшись теоремой 6.1 [28], из неравенств (55), (56) получаем оценку

$$\|z(\tau)\| \leqslant \bar{K}e^{-\gamma\tau}\|z(\tau_1)\|, \quad \tau \in [\tau_1, \infty), \tag{57}$$

где $\gamma = \beta - K_1 L e^{-\alpha\tau_1}$,

$$\|z(\tau)\| \leqslant \bar{K}e^{-\mu\tau}\|c(0)\|, \quad \tau \in [0, \tau_1], \tag{58}$$

$\mu = \beta - K_1 L$.

Воспользовавшись условием (52), выберем $\tau_1 > 0$ таким образом, чтобы выполнялись неравенства $\gamma > 0$. Оценки (57), (58) можно записать так:

$$\|z(\tau)\| \leqslant K_1 e^{-\gamma\tau}\|c(0)\|, \quad \tau \in [0, \infty). \tag{59}$$

Из (59) следует, что все решения системы (50), начинающиеся в области

$$\|x_0\| \leqslant \tfrac{C_1}{K_1},$$

экспоненциально убывают.

При помощи формул (24) и (49) получаем функции $\bar{c}(\tau) = (c(\tau), d(\tau))^T$, $\upsilon(\tau)$. Вторая компонента вектора $\bar{c}(\tau)$ даст функцию $d(\tau)$. Из (49), (57) вытекает, что в области (2), (13) имеет место оценка

$$\|\bar{c}(\tau)\| \leqslant K_2 e^{-(\gamma+n\alpha)\tau},\ \tau \in [\tau, \infty),\ K_2 > 0. \tag{60}$$

Постоянная K_2 зависит от области (2), (13).

Подстановка $d(\tau)$ в (26) дает управление $\bar{d}(\tau)$. Рассмотрим систему (23), которая замкнута вспомогательной управляющей функцией $\upsilon(\tau)$ после подстановки в правую часть ее первых n уравнений функции $\bar{d}(\tau)$, введенную в постановке задачи 3. Эту систему можно записать в виде

$$\begin{gathered}\frac{d\bar{c}}{d\tau} = D(\tau)\bar{c} + \bar{Q}(\bar{d} - d) + \bar{R}_1(c, d, \tau) + \bar{R}_2(c, d, \tau) + \bar{R}_3(c, d, \tau) + \\ + (\bar{R}_2(c, \bar{d}, \tau) - \bar{R}_2(c, d, \tau)) + (\bar{R}_3(c, \bar{d}, \tau) - \bar{R}_3(c, d, \tau)), \\ \tau \in [kh, (k+1)h),\ k = 0, 1, \ldots, \bar{Q} = (Q, O_4)^T_{n+r\times r},\end{gathered} \tag{61}$$

здесь O_4 — матрица соответствующей размерности, состоящая из нулевых элементов.

Из теоремы о среднем получаем следующие равенства:

$$\begin{aligned} R_2^i(c,\bar{d},\tau) - R_2^i(c,d,\tau) &= \left(\left(\frac{\partial R_2^i}{\partial d}(c,\tilde{d},\tau)\right)^T, (d-\bar{d})\right) = \\ &= \left(\left(\frac{\partial R_2^i}{\partial d}(c,\tilde{d},\tau)\right)^T, \frac{d}{d\tau}d(\bar{\tau})h\right), \\ R_3^i(c,\bar{d},\tau) - R_3^i(c,d,\tau) &= \left(\left(\frac{\partial R_3^i}{\partial d}(c,\tilde{d},\tau)\right)^T, (d-\bar{d})\right) = \\ &= \left(\left(\frac{\partial \bar{R}_3^i}{\partial d}(c,\tilde{d},\tau)\right)^T, \frac{d}{d\tau}d(\bar{\tau})h\right), \end{aligned} \tag{62}$$

где $\tilde{d}$ — средняя точка в области (2); $\tilde{d} = (\tilde{d}_1,\ldots,\tilde{d}_r)^T$.

Из (18), (24), (25), (60), (62) в области (2), (13) следуют оценки

$$\begin{aligned} \|\upsilon(\tilde{\tau})\| = \left\|\frac{d}{d\tau}d(\tilde{\tau})\right\| \leqslant \| M(\tilde{\tau}) \| \| \bar{c}(\tilde{\tau}) \| \leqslant K_4 e^{-\gamma\tilde{\tau}} = \\ = K_3 e^{-\gamma\tau} e^{\gamma(\tau-\tilde{\tau})} \leqslant K_3 e^{-\gamma\tau} e^{\gamma h} = K_4 e^{-\gamma\tau}, \\ K_4 > 0,\ K_4 = K_3 e^{\gamma h},\ \tilde{\tau} \in [kh,(k+1)h), \tau \in [kh,(k+1)h), \\ \tilde{\tau} = (\tilde{\tau}_1,\ldots,\tilde{\tau}_r)^T,\ \upsilon(\tilde{\tau}) = (\upsilon_1(\tilde{\tau}_1),\ldots,\upsilon_r(\tilde{\tau}_r))^T. \end{aligned} \tag{63}$$

В (63) постоянная K_4 зависит от области (2), (13), но не зависит от номера k.

Из (62), (63) получим неравенства

$$\begin{aligned} \| \bar{d} - d \| \leqslant K_5 e^{-\gamma\tau} h,\ K_5 > 0,\ \| R_2^i(c,\bar{d},\tau) - R_2^i(c,d,\tau) \| \leqslant K_6 e^{-\gamma\tau} h,\ K_6 > 0, \\ \| R_2^i(c,\bar{d},\tau) - R_2^i(c,d,\tau) \| \leqslant K_7 e^{-\gamma\tau} h,\ K_7 > 0,\ \tau \in [kh,(k+1)h),\ k = 0,1,\ldots . \end{aligned} \tag{64}$$

В (64) постоянные K_5, K_6, K_7 зависят от области (2), (13), но не зависят от значения k. Покажем, что все решения системы (61), начинающиеся в достаточно малой окрестности нуля, экспоненциально убывают. В системе (61) выполним замену переменной $\bar{c}$ по формуле (49). В результате имеем равенства

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\tau} = C(\tau)z + e^{n\alpha\tau}(\bar{Q}(\bar{d}-d) + \bar{R}_1(z_1 e^{-n\alpha\tau},\bar{d},\tau) + \bar{R}_2(z_1 e^{-n\alpha\tau},d,\tau) + \\ + \bar{R}_3(z_1 e^{-n\alpha\tau},d,\tau) + (\bar{R}_2(z_1 e^{-n\alpha\tau},\bar{d},\tau) - \bar{R}_2(z_1 e^{-n\alpha\tau},d,\tau)) + \\ + (\bar{R}_3(z_1 e^{-n\alpha\tau},\bar{d},\tau) - \bar{R}_3(z_1 e^{-n\alpha\tau},d,\tau))), \\ d(\tau) = z_2(\tau)e^{-n\alpha\tau},\ \bar{d}(kh) = z_2(kh)e^{-n\alpha kh},\ \tau \in [kh,(k+1)h),\ k = 0,1,\ldots . \end{aligned} \tag{65}$$

Решение системы (65) с начальными условиями (49), (22) имеет вид

$$\begin{aligned} z(\tau) = \Phi_1(\tau)\Phi_1^{-1}(kh)z(kh) + \int\limits_{kh}^{\tau} \Phi_1(\tau)\Phi_1^{-1}(t)e^{n\alpha t}(\bar{Q}(\bar{d}-d) + \\ + \bar{R}_1(z_1 e^{-n\alpha t}, z_2 e^{-n\alpha t}, t) + \bar{R}_2(z_1 e^{-n\alpha t}, z_2 e^{-n\alpha t}, t) + R_3(z_1 e^{-n\alpha t}, z_2 e^{-n\alpha t}, t) + \\ + (\bar{R}_2(z_1 e^{-n\alpha\tau},\bar{d},\tau) - \bar{R}_2(z_1 e^{-n\alpha\tau},d,\tau)) + \\ + (\bar{R}_3(z_1 e^{-n\alpha\tau},\bar{d},\tau) - \bar{R}_3(z_1 e^{-n\alpha\tau},d,\tau)))dt,\ \tau \in [kh,(k+1)h), \end{aligned} \tag{66}$$

$$z(\tau) = \Phi_1(\tau)\bar{c}(0) + \int\limits_0^\tau \Phi_1(\tau)\Phi_1^{-1}(t)e^{n\alpha t}(\bar{Q}(\bar{d} - d) +$$
$$+ \bar{R}_1(z_1 e^{-n\alpha t}, z_2 e^{-n\alpha t}, t) + \bar{R}_2(z_1 e^{-n\alpha t}, z_2 e^{-n\alpha t}, t) + R_3(z_1 e^{-n\alpha t}, z_2 e^{-n\alpha t}, t) + \quad (67)$$
$$+ (\bar{R}_2(z_1 e^{-n\alpha\tau}, \bar{d}, \tau) - \bar{R}_2(z_1 e^{-n\alpha\tau}, d, \tau)) +$$
$$+ (\bar{R}_3(z_1 e^{-n\alpha\tau}, \bar{d}, \tau) - \bar{R}_3(z_1 e^{-n\alpha\tau}, d, \tau)))dt, \ \tau \in [0, kh).$$

Из формул (66), (67) с учетом (15), (16), (17), (49), (51), (60), (63), (64) следуют оценки

$$\|z(\tau)\| \leqslant \bar{K}e^{-\beta(\tau - kh)}\|z(kh)\| + \int\limits_{kh}^{\tau} Ke^{-\beta(\tau - t)}(L\|z\| + K_8 h)e^{-\alpha t}dt, \quad \tau \in [kh, (k+1)h), \quad (68)$$

$$\|z(\tau)\| \leqslant Ke^{-\beta\tau}\|c(0)\| + \int\limits_0^\tau Ke^{-\beta\tau}(L\|z\| + K_8 h)e^{-\alpha t}dt, \ \tau \in [0, kh], \quad (69)$$

здесь $\bar{K} = Ke^{(n-1)\alpha kh}$.

Применяя к (68), (69) известный результат (см. [28]), получим оценки

$$\|z(\tau)\| \leqslant \bar{K}e^{-\gamma_1(\tau - k_1 h)}\|z(k_1 h)\| + K_9 h e^{-\alpha\tau}, \ \tau \in [k_1 h, (k_1 + 1)h), \quad (70)$$

в которых $\gamma_1 = \beta - KLe^{-\alpha k_1 h}$,

$$\|z(\tau)\| \leqslant \bar{K}e^{-\mu_1\tau}\|c(0)\| + K_{10}h, \ \tau \in [0, k_1 h], \quad (71)$$

где $\mu_1 = \beta - KL$.

Выберем значение $k = k_1$ таким, чтобы выполнялось условие $\gamma_1 > 0$.

В (70), (71) константы $K_9, K_{10} > 0$ зависят от области (2), (13) и не зависят от значения k. С одной стороны, из (70), (71) следует, что все решения системы (50), принадлежащие области (2), (13), экспоненциально убывают. С другой стороны, согласно (71) можно подобрать $\varepsilon > 0$, $h_0 > 0$ такие, что для любых $x_0, h : ||x_0|| < \varepsilon$, $0 < h < h_0$ решение системы будет принадлежать области (2), (13).

Тогда подстановка (66), (67) в формулы (24), (49) даст известные функции $\bar{c}(\tau)$, $\upsilon(\tau)$. В силу построения систем (14), (20) и (65) имеем то, что функция $c(\tau)$, соответствующая первой компоненте функции $\bar{c}(\tau)$, удовлетворяет системе (9) при подстановке в правую часть $\bar{d}(\tau)$. Из (49), (70) следует, что функция $c(\tau)$ удовлетворяет граничным условиям (11). Следовательно, пара функций $c(\tau)$, $\bar{d}(\tau)$ является решением задачи 3.

Возвращаясь к исходной независимой переменной t по формулам (8), (9), (27), получаем функции $x(t) = c(\tau(t))$, $\bar{u}(t) = \bar{d}(\tau(t))$ и $\bar{v}(t) = \upsilon(\tau(t))$, которые удовлетворяют системе

$$\begin{aligned} &\dot{x} = f(x, \bar{u}(t), t), \\ &\dot{u} = \alpha^{-1}(1-t)^{-1}\bar{\upsilon}(t) \end{aligned} \quad (72)$$

и начальным условиям

$$x(0) = 0, \ u(0) = 0, \ \ \bar{u}(t) = u(t_k), \ t \in [t_k, t_{k+1}), \ k = 0, 1, \ldots \ . \quad (73)$$

В свою очередь, из построения системы (72) вытекает, что найденная пара функций $x(t)$, $\bar{u}(t)$ есть решение задачи (1), (7). Далее, переходя к пределу при $t \to 1$ в функциях $x(t)$, $\bar{u}(t)$, получаем решение задачи 1.

Сужения функций $x(t)$, $\bar{u}(t)$ на интервале $[0, t_m]$ дадут решение задачи 2. Теорема доказана.

6. Описание алгоритма управления. На основании доказательства теоремы построим алгоритм решения задачи 1, который состоит из следующих этапов:

1) построение вспомогательной системы (20) выполняется при помощи разложения в ряд Тейлора системы (1) с остаточным членом в форме Лагранжа, замены исходной независимой переменной t на вспомогательную независимую переменную τ по формуле (8) и введением вспомогательного управления, удовлетворяющего (18);

2) решение задачи стабилизации системы (23), реализуется аналитическими методами;

3) решение задачи Коши для вспомогательной системы (14) с начальными условиями $c(0) = x_0$, замкнутой вспомогательным управлением $\upsilon(\tau) = M(\tau)\bar{c}$. В результате получаем функции $\bar{c}(\tau) = (c(\tau), d(\tau))$, $\upsilon(\tau)$. Выполняется численными методами;

4) нахождение точек переключения t_k по формуле (27), осуществляется аналитическими методами;

5) переход функции $\upsilon(\tau)$ к исходной независимой переменной t по формуле (8). Получим $\bar{\upsilon}(t) = \upsilon(\tau(t))$. Реализуется аналитическими методами;

6) решение задачи Коши (72) с начальными данными (73), выполняется численными методами.

Следует отметить, что этапы 1, 2, 4, 5 алгоритма можно реализовать средствами символьной алгебры. В качестве численных методов достаточно применения стандартных программ, реализующих методы решения ОДУ, которые входят в наиболее распространенные вычислительные пакеты, например, ode45 или ode23 в MATLAB.

7. Задача управления однозвенным роботом-манипулятором. Рассмотрим задачу управления роботом-манипулятором, который перемещает груз переменной массы в заданную точку.

В соответствии с [29, 30] систему уравнений запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -a_2(t)\sin x_1 - a_1(t)x_2 + u, \end{aligned}$$

здесь x_1 — угол отклонения манипулятора от вертикальной оси, x_2 — угловая скорость манипулятора, $a_1(t) = \bar{\alpha}L^{-2}m_1(t)^{-1}$, $m_1(t) = m(t) + M/3$, $a_2(t) = gL^{-1}\big(m(t) + M/2\big)m_1(t)^{-1}$, M — масса манипулятора, L — длина манипулятора, g — ускорение свободного падения, $\bar{\alpha}$ — коэффициент трения, $m(t) = m_0 - qt$ — масса груза, $q > 0$, m_0 — начальная масса груза, $x = (x_1, x_2)^T$ — вектор состояния, u — скалярное управление.

Рассмотрим граничные условия

$$x(0) = \bar{x},\ x(1) = 0.$$

Аналоги системы уравнений (20) и условий (22) имеют вид

$$\begin{aligned} &\frac{dc_1}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau}c_2, \\ &\frac{dc_2}{d\tau} = -\alpha e^{-\alpha\tau}a_2(1 - e^{-\alpha\tau})\sin c_1 - \alpha e^{-\alpha\tau}a_1(1 - e^{-\alpha\tau})c_2 + \alpha e^{-\alpha\tau}d, \\ &\frac{d}{d\tau}d(\tau) = \upsilon, \end{aligned} \tag{74}$$

в которых $c_1(\tau) = x_1(t(\tau))$, $c_2(\tau) = x_2(t(\tau))$,

$$c_1(0) = \bar{x}_1,\ c_2(0) = \bar{x}_2,\ d(0) = 0,\ c_i(\tau) \to 0. \tag{75}$$

Приведем линейную часть системы (74):

$$\frac{d\bar{c}}{d\tau} = \bar{P}\bar{c} + \bar{Q}\upsilon, \quad \bar{c} = (c_1, c_2, d)^T. \tag{76}$$

В (76) $\bar{P}$ и $\bar{Q}$ построены по формулам (21):

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha e^{-\alpha\tau} & 0 \\ -a_2(1)\alpha e^{-\alpha\tau} & -a_1(1)\alpha e^{-\alpha\tau} & \alpha e^{-\alpha\tau} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \bar{Q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Составим матрицу (28):

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha^2 e^{-2\alpha\tau} \\ 0 & \alpha e^{-\alpha\tau} & \alpha^2 e^{-\alpha\tau} - a_1(1)\alpha^2 e^{-2\alpha\tau} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{77}$$

Из (77) следует, что выполнены условия (4) и (6).

Матрица $\bar{S}$ имеет вид

$$\bar{S} = S^{-1}\left(\bar{P}S - \frac{dS}{d\tau}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \alpha^2\left(-2e^{2\alpha\tau} + a_1(1)e^{\alpha\tau} - a_2(1)\right)e^{-2\alpha\tau} \\ 0 & 1 & 3\alpha - a_1(1)\alpha e^{-\alpha\tau} \end{bmatrix}. \tag{78}$$

Введем обозначения для элементов третьего столбца матрицы (78):

$$\begin{bmatrix} \varphi_1(\tau) \\ \varphi_2(\tau) \\ \varphi_3(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha^2\left(-2e^{2\alpha\tau} + a_1(1)e^{\alpha\tau} - a_2(1)\right)e^{-2\alpha\tau} \\ 3\alpha - a_1(1)\alpha e^{-\alpha\tau} \end{bmatrix}.$$

Матрица T имеет вид

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -\varphi_3(\tau) & -(\frac{d\varphi_3(\tau)}{d\tau} + \varphi_2(\tau)) \\ 0 & 1 & -\varphi_3(\tau) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{79}$$

Строку $\delta = (\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ ищем в форме

$$\delta = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -\gamma_2 - \varphi_3 \\ -\gamma_1 - 2\frac{d\varphi_3(\tau)}{d\tau} - \varphi_2(\tau) \\ -\gamma_0 - \frac{d^2\varphi_3(\tau)}{d\tau^2} - \frac{d\varphi_2(\tau)}{d\tau} \end{bmatrix}^T, \tag{80}$$

где $\gamma_2 = 12$, $\gamma_1 = 47$, $\gamma_0 = 60$.

Подставляя (80), (79), (77) в (43), получим

$$\upsilon(\tau) = M(\tau)\bar{c},\ M(\tau) = \delta T^{-1}S^{-1},\ \bar{c} = (c_1, c_2, d), \tag{81}$$

$$M(\tau) = (m_1(\tau), m_2(\tau), m_3(\tau)),$$

$$m_1(\tau) = -a_1(1)a_2(1)\alpha e^{-\alpha\tau} + 3a_2(1)\alpha + a_2(1)\gamma_2 - 8\alpha e^{2\alpha\tau} - 4\gamma_2 e^{2\alpha\tau} - \frac{2\gamma_1 e^{2\alpha\tau}}{\alpha} - \frac{\gamma_0 e^{2\alpha\tau}}{\alpha^2},$$
$$m_2(\tau) = -a_1(1)^2\alpha e^{-\alpha\tau} + 3a_1(1)\alpha + a_1(1)\gamma_2 + a_2(1)\alpha e^{-\alpha\tau} - 7\alpha e^{\alpha\tau} - 3\gamma_2 e^{\alpha\tau} - \frac{\gamma_1 e^{\alpha\tau}}{\alpha},$$
$$m_3(\tau) = -3\alpha + a_1(1)\alpha e^{-\alpha\tau} - \gamma_2.$$

Далее решаем задачу Коши для системы (74) с начальными условиями (75), замкнутую управлением (81). В итоге имеем функции $c_1(\tau)$, $c_2(\tau)$, $d(\tau)$, $\upsilon(\tau)$.

Используя формулы (8) и (27), получим функцию $\bar{\upsilon}(t) = \bar{\upsilon}(\tau(t))$ и точки переключения t_k.

Решим задачу Коши для системы уравнений

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2,\\
\dot{x}_2 &= -a_2(t)\sin x_1 - a_1(t)x_2 + \bar{u},\\
\dot{u} &= \alpha^{-1}(1-t)^{-1}\upsilon(t)
\end{aligned}$$

с начальными условиями $x_1(0) = \bar{x}_1$, $x_2(0) = \bar{x}_2$, $u(0) = 0$.

Численное моделирование проводилось при следующих значениях параметров модели: $\bar{x}_1 = -0.5$ рад, $\bar{x}_2 = -0.8$ рад/с, $\bar{\alpha} = 0.1$, $\alpha = 0.25$, $L = 10$ м, $M = 20$ кг, $m_0 = 1$ кг, $h = 0.01$, $q = 0.01$, $t \in [0, 0.99]$.

При решении задачи Коши применен метод Рунге—Кутты второго порядка. На рисунке представлены графики изменения фазовых координат $x_1(t)$, $x_2(t)$ и управления $u(t)$.

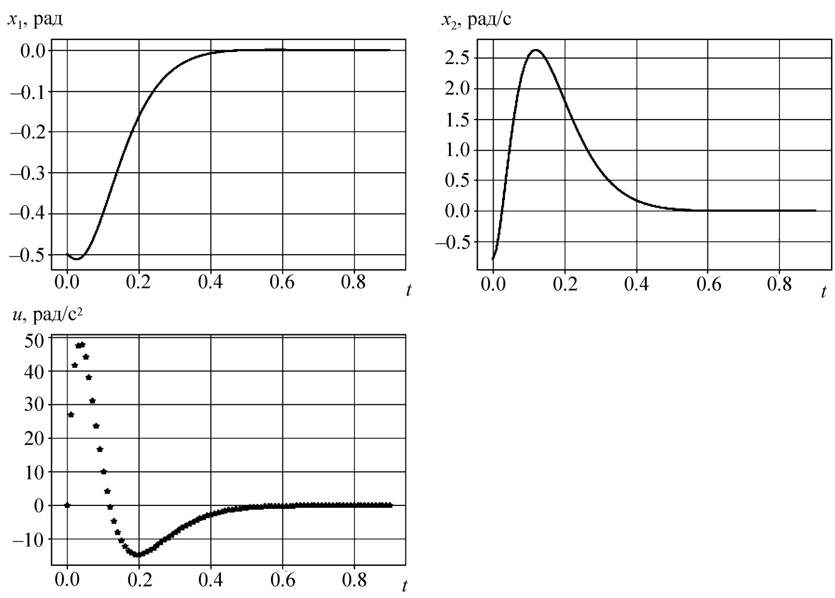

Рисунок. Графики функций $x_1(t)$, $x_2(t)$, $u(t)$

8. Заключение. Предварительный анализ численного моделирования решения задачи управления движением робота-манипулятора позволяет сделать следующие выводы:

1) графики изменения функций фазовых координат и управления иллюстрируют переходной процесс;

2) наибольшие затраты ресурса управления приходятся на начальный участок перевода от 0 до 0.2 и максимальное значение управляющего воздействия составляет около 50 рад/с^2;

3) предложенный алгоритм может быть использован при решении задачи стабилизации на конечном промежутке времени для широкого класса нелинейных нестационарных систем. Это сокращает время переходного процесса.

Анализ результатов численного моделирования позволяет утверждать, что полученный в работе алгоритм может быть использован при разработке систем управления различными техническими объектами и их моделировании.

Литература

1. *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем / пер. с англ.; под ред. Э. Л. Напельбаума. М.: Мир, 1971. 399 с.

2. *Петров Н. Н.* Локальная управляемость автономных систем // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4. № 7. С. 1218–1232.

3. *Петров Н. Н.* Решение одной задачи теории управляемости // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5. № 5. С. 962–963.

4. *Верещагин И. Ф.* Методы исследования режимов полета аппарата переменной массы: учеб. пособие. Пермь: Изд-во Перм. гос. ун-та, 1972. Т. 2. 294 с.

5. *Зубов В. И.* Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975. 496 с.

6. *Furi M., Nistri P., Pera M. P., Zezza P.* Linear controllability by piecewise constant controls with assigned switching times // J. Optim. Theory Appl. 1985. Vol. 45. Iss. 2. P. 219–229. https://doi.org/10.BF00939978

7. *Seilova R. D., Amanov T. D.* Construction of piece wise constant controls for linear impulsive systems // Proceedings of International Symposium “Reliability and quality”. 2005. P. 4–5.

8. *Kvitko A. N., Maksina A. M., Chistyakov S. V.* On a method for solving a local boundary problem for a nonlinear stationary system with perturbations in the class of piecewise constant controls // Intern. J. Robust Nonlinear Control. 2019. Vol. 29. P. 4515–4536.

9. *Baier R., Gerdts M.* A computational method for non-convex reachable sets using optimal control // European Control Conference (ECC). Budapest, Hungary, 2009. P. 97–102.

10. *Plotnikov A. V., Arsiry A. V., Komleva T. A.* Piecewise constant controller linear fuzzy systems // Intern. J. Ind. Math. 2012. Vol. 4. N 2. P. 77–85.

11. *Квитко А. Н., Якушева Д. Б.* Решение задачи синтеза дискретной стабилизации с учетом неполной информации для нелинейной стационарной управляемой системы // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2012. Т. 45. Вып. 2. С. 65–72.

12. *Перегудова О. А., Филаткина Е. В.* О стабилизации нелинейных систем каскадного вида с кусочно-постоянным управлением // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2014. Т. 21. № 1. С. 80–82.

13. *Попков А. С.* Построение множеств достижимости и управляемости в специальной линейной задаче управления // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2021. Т. 17. Вып. 3. С. 294–308. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.307

14. *Gryn L.* Discrete feedback stabilization of semilinear control systems // Control, Optim. Calc. Var. 1996. Vol. 1. P. 207–224.

15. *Габдрахимов А. Ф.* О стабилизации линейных стационарных управляемых систем с неполной обратной связью // Вестн. Удмуртск. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2008. Вып. 2. С. 30–31.

16. *Лизина Е. А., Щенников В. Н., Щенникова Е. В.* Стабилизация непрерывно-дискретной системы с периодической матрицей коэффициентов // Изв. высш. учеб. заведений. Поволжск. регион. Физ.-мат. науки. Физика. 2013. № 1(25). С. 181–195.

17. *Лапин С. В.* Кусочно-постоянная стабилизация систем, линейных относительно управления // Автоматика и телемеханика. 1992. Т. 53. Вып. 6. С. 37–45.

18. *Ailon A., Segev R.* Driving a linear constant system by a piecewise constant control // Intern. J. Control. 1988. N 47. P. 815–825.

19. *Shushlyapin E. A.* On the equivalency of piecewise-constant control with a known number of switchings and arbitrary amplitude bounded control in a terminal problem for a linear non-stationary system // J. Sov. Math. 1993. N 65(2). P. 1550–1554.

20. *Булгаков А. И., Жуковский С. Е.* Бэнг-бэнг принцип для линейного дифференциального уравнения второго порядка // Вестн. Тамбов. гос. ун-та. 2001. Т. 6. Вып. 2. С. 150–154.

21. *Alzabut J. O.* Piecewise constant control of boundary value problem for linear impulsive differential systems // Math. Methods Eng. 2007. P. 123–129.

22. *Максимов В. П., Чадов А. Л.* Об одном классе управлений для функционально-дифференциальной непрерывно-дискретной системы // Изв. высш. учеб. заведений. Математика. 2012. № 9. С. 72–76.

23. *Oaks O. J., Cook G.* Piecewise linear control of nonlinear systems // IEEE Transactions on Industrial Electronics and Control Instrumentation. 1976. N IECI-23(1). P. 56–63.

24. *Сачков Ю. Л., Ардентов А. А., Маштаков А. П.* Конструктивное решение задачи управления на основе метода нильпотентной аппроксимации // Материалы конференции «Программные системы: теория и приложения». Переславль-Залесский, 2009. Т. 2. С. 5–23.

25. *Юркевич В. Д.* Синтез нелинейных нестационарных систем управления с разнотемповыми процессами. СПб.: Наука, 2000. 287 с.

26. *Кузнецов А. В.* Условия локальной оптимальности для нелинейных управляемых систем в классе кусочно-постоянных управлений // Вестн. Рязанск. гос. радиотехнич. ун-та. 2011. Т. 38. № 4. С. 125–128.

27. *Смирнов Е. Я.* Стабилизация программных движений. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1997. 301 с.

28. *Барбашин Е. А.* Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1967. 224 с.

29. *Афанасьев В. Н., Колмановский В. Б., Носов В. Р.* Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа, 2003. 614 с.

30. *Kvitko A. N.* Solution of the local boundary value problem for a nonlinear non-stationary system in the class of synthesising controls with account of perturbations // Intern. J. Control. 2020. Vol. 93. N 8. P. 1931–1941. https://doi.org/10.1080/00207179.2018.1537520

Статья поступила в редакцию 13 апреля 2021 г.
Статья принята к печати 1 февраля 2022 г.

Контактная информация:

Квитко Александр Николаевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; alkvit46@mail.ru

Литвинов Николай Николаевич — аспирант; st080999@student.spbu.ru

Solution of a local boundary problem for a non-linear non-stationary system in the class of discrete controls

A. N. Kvitko, N. N. Litvinov

St Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St Petersburg,
199034, Russian Federation

For citation: Kvitko A. N., Litvinov N. N. Solution of a local boundary problem for a non-linear non-stationary system in the class of discrete controls. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2022, vol. 18, iss. 1, pp. 18–36. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2022.102 (In Russian)

This article proposes an algorithm of construction for the discrete controlling function which is restricted by a norm and provides transition for the wide class of the systems of non-stationary nonlinear ordinary differential equations from the initial state to the setting final state. A constructive sufficient condition that provides this transition is obtained. Efficiency of the method is demonstrated by the solution of the robot-manipulator control problem and its numerical modeling.

Keywords: discrete control, non-linear non-stationary system, stabilization, boundary conditions.

References

1. Kalman R. E., Falb P. L., Arbib M. A. *Ocherki po matematicheskoj teorii sistem* [*Topics in mathematical system theory*]. Moscow, Mir Publ., 1971, 399 p. (In Russian)

2. Petrov N. N. Lokal'naya upravlyaemost' avtonomnyh sistem [Local controllability of autonomous systems]. *Differencial'nye uravneniya* [*Differential Equations*], 1968, vol. 4, no. 7, pp. 1218–1232. (In Russian)

3. Petrov N. N. Reshenie odnoj zadachi teorii upravlyaemosti [A solution of a certain problem in control theory]. *Differencial'nye uravneniya* [*Differential Equations*], 1969, vol. 5, no. 5, pp. 962–963. (In Russian)

4. Vereshchagin I. F. *Metody issledovaniya rezhimov poleta apparata peremennoj massy* [*Methods for investigating flight regimes of changing mass apparatus*]. Perm', Perm' State University Press, 1972, vol. 2, 294 p. (In Russian)

5. Zubov V. I. *Lekcii po teorii upravleniya* [*Lectures in control theory*]. Moscow, Nauka Publ., 1975, 496 p. (In Russian)

6. Furi M., Nistri P., Pera M. P., Zezza P. Linear controllability by piecewise constant controls with assigned switching times. *J. Optim. Theory Appl.*, 1985, vol. 45, iss. 2, pp. 219–229. https://doi.org/10.BF00939978

7. Seilova R. D., Amanov T. D. Construction of piece wise constant controls for linear impulsive systems. *Proceedings of International Symposium "Reliability and quality"*, 2005, pp. 4–5.

8. Kvitko A. N., Maksina A. M., Chistyakov S. V. On a method for solving a local boundary problem for a nonlinear stationary system with perturbations in the class of piecewise constant controls. *Intern. J. Robust Nonlinear Control*, 2019, vol. 29, pp. 4515–4536.

9. Baier R., Gerdts M. A computational method for non-convex reachable sets using optimal control. *European Control Conference (ECC)*. Budapest, Hungary, 2009, pp. 97–102.

10. Plotnikov A. V., Arsiry A. V., Komleva T. A. Piecewise constant controller linear fuzzy systems. *Intern. J. Ind. Math.*, 2012, vol. 4, no. 2, pp. 77–85.

11. Kvitko A. N., Yakusheva D. B. Reshenie zadachi sinteza diskretnoj stabilizacii s uchetom nepolnoj informacii dlya nelinejnoj stacionarnoj upravlyaemoj sistemy [Synthesis of discrete stabilization for a nonlinear stationary control system under incomplete information]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2012, vol. 45, iss. 2, pp. 65–72. (In Russian)

12. Peregudova O. A., Filatkina E. V. O stabilizacii nelinejnyh sistem kaskadnogo vida s kusochno-postoyannym upravleniem [On stabilization of cascade-type non-linear systems with piecewise constant control]. *Review Appl. Ind. Math.*, 2014, vol. 21, no. 1, pp. 80–82. (In Russian)

13. Popkov A. S. Postroenie mnozhestv dostizhimosti i upravliaemosti v spetsial'noi lineinoi zadache upravleniia [Construction of reachability and controllability sets in a special linear control problem]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Sciences. Control Processes*, 2021, vol. 17, iss. 3, pp. 294–308. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.307 (In Russian)

14. Gryn L. Discrete feedback stabilization of semilinear control systems. *Control, Optim. Calc. Var.*, 1996, vol. 1, pp. 207–224.

15. Gabdrakhimov A. F. O stabilizacii linejnyh stacionarnyh upravlyaemyh sistem s nepolnoj obratnoj svyaz'yu [On the stabilization of linear stationary control systems with incomplete feedback]. *Vestnik of Udmurtsky University. Mathematics. Mechanics. Computer Sciences*, 2008, iss. 2, pp. 30–31. (In Russian)

16. Lizina E. A., Shchennicov V. N., Shchennicova E. V. Stabilizaciya nepreryvno-diskretnoj sistemy s periodicheskoj matricej koefficientov [Stabilization of continuous-discrete system with periodic matrix of coefficients]. *Izv. vyssh. uchebn. zaved. Povolzhsk. region. Fiz.-mat. nauki. Fizika* [*Proceedings of Higher Educational Investigations. Povolzhsk Region. Physics and Mathematics Sciences. Physics*], 2013, no. 1(25), pp. 181–195. (In Russian)

17. Lapin S. V. Kusochno-postoyannaya stabilizaciya sistem, linejnyh otnositel'no upravleniya [Piecewise-constant stabilization of systems that are linear with respect to control]. *Avtomatika i telemekhanika* [*Autom. Remote Control*], 1992, vol. 53, iss. 6, pp. 37–45. (In Russian)

18. Ailon A., Segev R. Driving a linear constant system by a piecewise constant control. *Intern. J. Control*, 1988, no. 47, pp. 815–825.

19. Shushlyapin E. A. On the equivalency of piecewise-constant control with a unknown number of switchings and arbitrary amplitude bounded control in a terminal problem for a linear non-stationary system. *J. Sov. Math.*, 1993, no. 65(2), pp. 1550–1554.

20. Bulgakov A. I., Zhukovskii S. E. Beng-beng princip dlya linejnogo differencial'nogo uravneniya vtorogo poryadka [The "bang-bang" principle for second order linear differential equations]. *Vestnik of Tambov State University*, 2001, vol. 6, iss. 2, pp. 150–154. (In Russian)

21. Alzabut J. O. Piecewise constant control of boundary value problem for linear impulsive differential systems. *Math. Methods Eng.*, 2007, pp. 123–129.

22. Maksimov V. P., Chadov A. L. Ob odnom klasse upravlenij dlya funkcional'no- differencial'noj nepreryvno-diskretnoj sistemy [On a class of controls for a functional-differential continuous-discrete system]. *Izvestiia vysshikh uchebnykh zavedenii. Matematika* [*Proceedings of Higher Educational Investigations. Mathematics*], 2012, no. 9, pp. 72–76. (In Russian)

23. Oaks O. J., Cook G. Piecewise linear control of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Industrial Electronics and Control Instrumentation*, 1976, no. IECI-23(1), pp. 56–63.

24. Sachkov Y. L., Ardentov A. A., Mashtakov A. P. Konstruktivnoe reshenie zadachi upravleniya na osnove metoda nil'potentnoj approksimacii [Constructive solution to control problem via nilpotent approximation method]. *Programmnye sistemy: teoriia i prilozheniia* [*"Program Systems: Theory and Applications"*], Pereslavl'-Zalesskij, Russia, 2009. Proceedings of Program Systems Institute Scientific Conference, 2009, vol. 2, pp. 5–23. (In Russian)

25. Yurkevich V. D. *Sintez nelinejnyh nestacionarnyh sistem upravleniya s raznotempovymi processami* [*Design of two-time-scale non-linear time-varying control systems*]. St Petersburg, Nauka Publ., 2000, 287 p. (In Russian)

26. Kuznetsov A. V. Usloviya lokal'noj optimal'nosti dlya nelinejnyh upravlyaemyh sistem v klasse kusochno-postoyannyh upravlenij [Local optimality conditions for non-linear controlled systems in the class of piecewise-constant control laws]. *Vestnik of Rjazan' State Radiotechnical University*, 2011, vol. 38, no. 4, pp. 125–128. (In Russian)

27. Smirnov E. Y. *Stabilizaciya programmnyh dvizhenij* [*Stabilization of programmed motion*]. St Petersburg, Saint Petersburg University Press, 1997, 301 p. (In Russian)

28. Barbashin E. A. *Vvedenie v teoriyu ustojchivosti dvizheniya* [*Introduction to stability theory*]. Moscow, Nauka Publ., 1967, 224 p. (In Russian)

29. Afanas'ev V. N., Kolmanovskii V. B., Nosov V. R. *Matematicheskaya teoriya konstruirovaniya sistem upravleniya* [*Mathematical theory of control systems design*]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 2003, 614 p. (In Russian)

30. Kvitko A. N. Solution of the local boundary value problem for a nonlinear non-stationary system in the class of synthesising controls with account of perturbations. *Inter. J. Control*, 2020, vol. 93, no. 8, pp. 1931–1941. https://doi.org/10.1080/00207179.2018.1537520

Received: April 13, 2021.
Accepted: February 01, 2022.

Authors' information:

Aleksandr N. Kvitko — Dr. Sci in Physics and Mathematics, Professor; alkvit46@mail.ru

Nikolay N. Litvinov — Postgraduate Student; st080999@student.spbu.ru