УДК 519.62, 519.622
MSC 65L05, 65L06

Девятипараметрическое семейство вложенных методов шестого порядка*

И. В. Олемской, А. С. Еремин, О. С. Фирюлина

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Олемской И. В., Еремин А. С., Фирюлина О. С.* Девятипараметрическое семейство вложенных методов шестого порядка // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2023. Т. 19. Вып. 4. С. 449–468. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.403

Статья посвящена построению экономичного явного вложенного метода шестого порядка с автоматическим выбором шага численного интегрирования систем структурно разделенных обыкновенных дифференциальных уравнений. Выписана общая схема метода, алгоритмически учитывающая выделенные структурные особенности рассматриваемой полной канонической формы систем структурно разделенных уравнений. Приведен алгоритм построения методов шестого порядка и вложенных четвертого для оценки «контрольного» члена, использующего технологию FSAL. Представлены результаты сравнительного тестирования.

Ключевые слова: методы Рунге — Кутты, разделяющиеся системы, условия порядка, упрощающие условия.

1. Введение. Рассматривается *полная каноническая форма* структурно разделенной системы g обыкновенных дифференциальных уравнений

$$y_0' = f_0(x, y_0, \ldots, y_n), \tag{1}$$

$$y_i' = f_i(x, y_0, \ldots, y_{i-1}, y_{l+1}, \ldots, y_n), \qquad i = 1, \ldots, l, \tag{2}$$

$$y_j' = f_j(x, y_0, \ldots, y_{j-1}), \qquad j = l+1, \ldots, n, \tag{3}$$

где $x \in [X_0, X_k] \subset \mathbb{R}$, $y_s : [X_0, X_k] \longrightarrow \mathbb{R}^{r_s}$, $s = 0, \ldots, n$,

$$f_0 : [X_0, X_k] \times \mathbb{R}^{g} \longrightarrow \mathbb{R}^{r_0}, \qquad g = \sum_{s=0}^{n} r_s,$$

$$f_i : [X_0, X_k] \times \mathbb{R}^{g-\hat{r}_i} \longrightarrow \mathbb{R}^{r_i}, \quad \hat{r}_i = \sum_{s=i}^{l} r_s, \quad i = 1, \ldots, l,$$

$$f_j : [X_0, X_k] \times \mathbb{R}^{g-\hat{r}_j} \longrightarrow \mathbb{R}^{r_j}, \quad \hat{r}_j = \sum_{s=j}^{n} r_s, \quad j = l+1, \ldots, n.$$

Для нее строится экономичный явный одношаговый метод шестого порядка.

Две группы уравнений (2), (3) структурно тождественны. Каждое уравнение одной из них занимает определенное место в последовательности уравнений своей группы. Его правая часть не зависит от искомых функций, поведение которых описывается этим и всеми последующими уравнениями той же группы. Группа уравнений (1),

* Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00027, https://rscf.ru/project/23-21-00027/

в которую вошли все уравнения, не имеющие структурных особенностей указанного выше типа, называется *общей*. Она, как и группа уравнений (2), может отсутствовать. Необходимость в интегрировании систем такого типа возникает, например, в задачах небесной механики, физики высоких энергий.

В [1–3] дан алгоритм приведения произвольных систем обыкновенных дифференциальных уравнений $\Psi_k' = \varphi_k(x, \Psi_1, \ldots, \Psi_g)$, $k = 1, \ldots, g$, к виду (1)–(3).

В работе [4] предложено обобщение явного метода Рунге—Кутты [5, 6] для интегрирования систем структурно разделенных систем (1)–(3). Эффективность построенных методов определяется тем, что для общей группы уравнений (1) численное интегрирование по соотношению порядка метода (q) и минимально возможного числа этапов (m) тождественно методам Рунге—Кутты ($m > q$, $q \geqslant 5$), а для структурно выраженных групп уравнений (2), (3) предложенная модификация дает возможность уменьшить число этапов при сохранении порядка метода, причем в случае отсутствия общей группы уравнений она еще более значительна. Так, метод пятого порядка получен не за шесть этапов, а за четыре [7, 8], а метод шестого порядка — за шесть этапов вместо семи [9].

В основе изучаемого расширения лежит алгоритмическое использование выделенных структурных особенностей. Для полной канонической формы системы (1)–(3), содержащей общую группу уравнений, описываются алгоритмы построения шестипараметрического семейства экономичных методов шестого порядка семистадийных по общей группе и шестистадийных по выделенным [9–14] структурно разделенным. Здесь на этом семействе решений построено девятипараметрическое семейство вложенных методов с использованием технологии FSAL оценки контрольного члена.

2. Основные понятия. Предположим, что правые части рассматриваемой системы дифференциальных уравнений достаточно гладкие. Считаем, что точное решение $y_s(x)$, $s = 0, 1, \ldots, n$, задачи (1) в точке $x \in [X_0, X_k]$ известно.

Приближения z_s p-го порядка и $\hat{z}_s$ q-го порядка к точному решению $y_s(x+h)$, $s = 0, 1, \ldots, n$, в точке $x + h \in [X_0, X_k]$ ищем в виде

$$\begin{aligned}
&y_0(x+h) \approx z_0 = y_0(x) + h \sum_{w=1}^{m_0} b_{0,w} K_{0,w}, \\
&y_i(x+h) \approx z_i = y_i(x) + h \sum_{w=1}^{m_1} b_{1,w} K_{i,w}, \quad i = 1, \ldots, l, \\
&y_j(x+h) \approx z_j = y_j(x) + h \sum_{w=1}^{m_2} b_{2,w} K_{j,w}, \quad j = l+1, \ldots, n,
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
&y_0(x+h) \approx \hat{z}_0 = y_0(x) + h \sum_{w=1}^{m_0} \hat{b}_{0,w} K_{0,w}, \\
&y_i(x+h) \approx \hat{z}_i = y_i(x) + h \sum_{w=1}^{m_1} \hat{b}_{1,w} K_{i,w}, \quad i = 1, \ldots, l, \\
&y_i(x+h) \approx \hat{z}_j = y_i(x) + h \sum_{w=1}^{m_2} \hat{b}_{2,w} K_{j,w}, \quad j = l+1, \ldots, n,
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\|y_s(x+h) - z_s\| \approx O(h^{p+1}), \quad \|y_s(x+h) - \hat{z}_s\| \approx O(h^{q+1}), \quad s = 0, 1, \ldots, n. \tag{6}$$

При этом в строгой последовательности вычисляем значения

$$K_{0,1}, K_{1,1}, \ldots, K_{n,1}, K_{0,2}, K_{1,2}, \ldots, K_{n,2}, K_{0,3}, K_{1,3}, K_{2,3}, \ldots \tag{7}$$

по следующему правилу:

$$\begin{gathered}
\begin{aligned}
K_{0,w} &= f_0(x + c_{0,w}h, Y_{0,0,w}, Y_{0,1,w}, \ldots, Y_{0,l,w}, Y_{0,l+1,w}, \ldots, Y_{0,n,w}),\\
K_{i,w} &= f_i(x + c_{1,w}h, Y_{1,0,w}, Y_{1,1,w}, \ldots, Y_{1,i-1,w}, Y_{1,l+1,w}, \ldots, Y_{1,n,w}),\\
K_{j,w} &= f_j(x + c_{2,w}h, Y_{2,0,w}, Y_{2,1,w}, \ldots, Y_{2,l,w}, Y_{2,l+1,w}, \ldots, Y_{2,j-1,w}),
\end{aligned}\\
i = 1, \ldots, l, \quad j = l+1, \ldots, n,
\end{gathered} \tag{8}$$

где

$$\begin{aligned}
Y_{0,0,w} &= y_0(x) + h \sum_{\nu=1}^{w-1} a_{00,w,\nu} K_{0,\nu},\\
Y_{0,i,w} &= y_i(x) + h \sum_{\nu=1}^{w-1} a_{01,w,\nu} K_{i,\nu}, \quad i = 1, \ldots, l,\\
Y_{0,j,w} &= y_j(x) + h \sum_{\nu=1}^{w-1} a_{02,w,\nu} K_{j,\nu}, \quad j = l+1, \ldots, n,\\
Y_{1,0,w} &= y_0(x) + h \sum_{\nu=1}^{w} a_{10,w,\nu} K_{0,\nu},\\
Y_{1,i,w} &= y_i(x) + h \sum_{\nu=1}^{w} a_{11,w,\nu} K_{i,\nu}, \quad i = 1, \ldots, l-1,\\
Y_{1,j,w} &= y_j(x) + h \sum_{\nu=1}^{w-1} a_{12,w,\nu} K_{j,\nu}, \quad j = l+1, \ldots, n,\\
Y_{2,0,w} &= y_0(x) + h \sum_{\nu=1}^{w} a_{20,w,\nu} K_{0,\nu},\\
Y_{2,i,w} &= y_i(x) + h \sum_{\nu=1}^{w} a_{21,w,\nu} K_{i,\nu}, \quad i = 1, \ldots, l,\\
Y_{2,j,w} &= y_j(x) + h \sum_{\nu=1}^{w} a_{22,w,\nu} K_{j,\nu}, \quad j = l+1, \ldots, n-1.
\end{aligned}$$

Здесь $b_{u,w}$, $\hat{b}_{u,w}$, $c_{u,w}$, $a_{uw,\nu,\mu}$, $u, w \in \{0, 1, 2\}$, — параметры метода. Величину h назовем *шагом интегрирования*.

Разность двух приближений $E_{x+h} = \|z_s - \hat{z}_s\|$, называемая *контрольным членом*, используется [6, 15, 16] для управления шагом h_{new} интегрирования, который может корректироваться по формуле

$$h_{\text{new}} = 0.9\, h \left(\frac{\text{tol}}{E_{x+h}} \right)^{\frac{1}{q+1}}, \tag{9}$$

в которой tol — максимально допустимое значение контрольного члена.

Замечание. В соответствии с требованием алгоритма (7) для компонентов вектора числа этапов $M = (m_0, m_1, m_2)$ структурного метода [4, 7–14] (4)–(9) характерными являются соотношения

$$m_0 \geqslant m_1 \geqslant m_2.$$

Выбор параметров метода осуществляется таким образом, чтобы при выбранном числе этапов $M = (7, 6, 6)$ для метода шестого порядка ($p = 6$) разложение приближения и точного решения сопадали до h^6, т. е. погрешность на шаге $\|y_s(x+h) - z_s\| = O(h^7)$, $s = 0, 1, \ldots, n$. Для метода четвертого порядка ($q = 4$) с добавлением дополнительного этапа $M = (8, 7, 7)$ добиваемся, чтобы $\|y_s(x+h) - \hat{z}_s\| = O(h^5)$.

Введем векторы узлов $C_u = (c_{u,1}, ..., c_{u,m_u})^T$, две группы векторов весовых коэффициентов $B_u = (b_{u,1}, ..., b_{u,m_u})^T$, $\hat{B}_u = (\hat{b}_{u,1}, ..., \hat{b}_{u,m_u})^T$ и блочные матрицы

$$A_{uv} = \begin{pmatrix} a_{uv,1,1} & & & \\ a_{uv,2,1} & a_{uv,2,2} & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{uv,m_u,1} & a_{uv,m_u,2} & \cdots & a_{uv,m_u,m_v} \end{pmatrix}.$$

Здесь u — номер группы, v — номер блока в пределах группы, $u, v \in \{0, 1, 2\}$. Таким образом, в каждой выделенной группе содержится по три блока весовых параметров A_{uv}. Представление в виде табл. 1 рассматриваемого метода (4)–(9) наглядно показывает структурные особенности системы, алгоритмическое их использование при реализации и выводе.

Таблица 1. $M = (m_0, m_1, m_2)$**-стадийный метод (4)–(9) интегрирования системы (1)–(3)**

C_0	A_{00}	A_{01}	A_{02}	B_0	$\hat{B}_0$
C_1	A_{10}	A_{11}	A_{12}	B_1	$\hat{B}_1$
C_2	A_{20}	A_{21}	A_{22}	B_2	$\hat{B}_2$

Примечание. Матрицы A_{00}, A_{01}, A_{02}, A_{12} — строго нижнетреугольные, а A_{10}, A_{20}, A_{11}, A_{21}, A_{22} — нижнетреугольные.

Если в исходной системе отсутствует одна любая $u \in \{0, 1, 2\}$ из групп уравнений, то табл. 1 не содержит параметров, связанных с этой группой: C_u, B_u, $\hat{B}_u$, A_{uu}, A_{du}, A_{ud}, $d \in \{0, 1, 2\} \backslash \{u\}$. При отсутствии же в исходной системе (1)–(3) структурно разделенных групп уравнений (2), (3) рассматриваемый метод вырождается в явный метод Рунге—Кутты с параметрами $A \equiv A_{00}$, $B \equiv B_0$, $\hat{B} \equiv \hat{B}_0$, $C \equiv C_0$, $M \equiv m_0$.

3. Условия порядка. В рамках рассматриваемого метода (4), (6)–(8) шестого порядка как число нелинейных уравнений, связывающих параметры метода, так и количество самих параметров метода зависят от количества выделенных групп уравнений в исходной системе (1)–(3).

Известно [5, 6], что условия порядка для семистадийного метода ($m_0 = 7$) Рунге—Кутты шестого порядка образуют систему 37 нелинейных уравнений с 35 неизвестными параметрами C_0, B_0, A_{00}.

При построении шестистадийных ($m_1 = m_2 = 6$) методов шестого порядка [7, 8] для систем (1)–(3), не содержащих общей группы (1) уравнений, условия порядка образуют систему 74 нелинейных алгебраических уравнений с 61 неизвестным параметром C_1, C_2, B_1, B_2, A_{12}, A_{21}, если $l = 1$, $n = 2$. Если же $l > 1$, $n > 1$, $l + n \geqslant 4$, то число нелинейных уравнений в условиях порядка возрастает до 292, а число неизвестных параметров C_1, C_2, B_1, B_2, A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22} — до 103.

Условия порядка M-стадийного метода (4)–(8) шестого порядка с $M = (7, 6, 6)$ при использовании предположений

$$\sum_{\xi=1}^{\eta} a_{uv,\nu,\xi} = c_{u,\nu}, \quad u, v \in \{0, 1, 2\}, \quad \nu = 1, \dots, m_u, \tag{10}$$

$$\eta = \begin{cases} \nu - 1, & \text{если } (u, v) \in \{(0,0),\ (0,1),\ (0,2),\ (1,2)\}, \\ \nu, & \text{если } (u, v) \in \{(1,0),\ (1,1),\ (2,0),\ (2,1),\ (2,2)\}, \end{cases}$$

представляют собой [9–14] систему из 1224 нелинейных алгебраических уравнений, устанавливающих связь шести групповых параметров C_u, B_u с девятью блочными весовыми коэффициентами A_{uv} (считаем, что индексы u, w, v, e, t принимают все возможные групповые номера $\{0, 1, 2\}$):

$$\begin{gathered}
\sum_{\nu} b_{u,\nu} c_{u,\nu}^s = \frac{1}{s+1}, \quad s = 0, 1, \dots, 5, \\
\sum_{\nu} b_{u,\nu} c_{u,\nu}^s \sum_{\mu} a_{uw,\nu,\mu} c_{w,\mu} = \frac{1}{2(s+3)}, \quad s = 0, 1, 2, 3, \\
\sum_{\nu} b_{u,\nu} c_{u,\nu}^s \sum_{\mu} a_{uw,\nu,\mu} c_{u,\mu}^2 = \frac{1}{3(s+4)}, \quad s = 0, 1, 2, \\
\sum_{\nu} b_{u,\nu} c_{u,\nu}^s \sum_{\mu} a_{uw,\nu,\mu} \sum_{\xi} a_{wv,\mu,\xi} c_{v,\xi} = \frac{1}{6(s+4)}, \quad s = 0, 1, 2, \\
\sum_{\nu} b_{u,\nu} c_{u,\nu}^s \left(\sum_{\mu} a_{uw,\nu,\mu} c_{w,\mu} \right) \left(\sum_{\mu} a_{uw,\nu,\mu} c_{w,\mu} \right) = \frac{1}{4(s+5)}, \quad s = 0, 1, \\
\sum_{\nu} b_{u,\nu} c_{u,\nu}^s \sum_{\mu} a_{uw,\nu,\mu} c_{w,\mu}^3 = \frac{1}{4(s+5)}, \quad s = 0, 1, \\
\sum_{\nu} b_{u,\nu} \sum_{\mu} a_{uw,\nu,\mu} c_{w,\mu}^s \sum_{\xi} a_{wv,\mu,\xi} c_{v,\xi}^d = \\
= \frac{1}{10(s+d)(1+d)}, \quad (s, d) \in \{(0,2), (0,3), (1,1), (1,2), (2,1)\}, \\
\sum_{\nu} b_{u,\nu} \sum_{\mu} a_{uw,\nu,\mu} c_{w,\mu}^s \sum_{\xi} a_{wv,\mu,\xi} c_{v,\xi}^d \sum_{\psi} a_{rs,\xi,\psi} c_{s,\psi}^{\rho} = \\
= \frac{1}{60(s+2d+2\rho)}, \quad (s, d, \rho) \in \{(0,0,1), (1,0,1), (0,1,1)\}, \\
\sum_{\nu} b_{u,\nu} \left(\sum_{\mu} a_{uw,\nu,\mu} c_{w,\mu} \right) \left(\sum_{\mu} a_{uw,\nu,\mu} c_{w,\mu}^2 \right) = \frac{1}{36}, \\
\sum_{\nu} b_{u,\nu} \sum_{\mu} a_{uw,\nu,\mu} c_{w,\mu}^4 = \frac{1}{30}, \\
\sum_{\nu} b_{u,\nu} (\sum_{\mu} a_{uw,\nu,\mu} \sum_{\xi} a_{wv,\mu,\xi} c_{v,\xi}) \cdot (\sum_{\mu} a_{uw,\nu,\mu} c_{w,\mu}) = \frac{1}{72}, \\
\sum_{\nu} b_{u,\nu} c_{u,\nu} \sum_{\mu} a_{uw,\nu,\mu} \sum_{\xi} a_{wv,\mu,\xi} c_{v,\xi}^s = \frac{1}{24(1+s)}, \quad s = 1, 2,
\end{gathered} \tag{11}$$

$$\sum_{\nu} b_{u,\nu} \sum_{\mu} a_{uw,\nu,\mu} \left(\sum_{\xi} a_{wv,\mu,\xi} c_{v,\xi}\right) \left(\sum_{\xi} a_{wv,\mu,\xi} c_{v,\xi}\right) = \frac{1}{120},$$

$$\sum_{\nu} b_{u,\nu} c_{u,\nu} \sum_{\mu} a_{uw,\nu,\mu} \sum_{\xi} a_{wv,\mu,\xi} \sum_{\psi} a_{re,\xi,\psi} c_{e,\psi} = \frac{1}{144},$$

$$\sum_{\nu} b_{u,\nu} \sum_{\mu} a_{uw,\nu,\mu} \sum_{\xi} a_{wv,\mu,\xi} \sum_{\psi} a_{re,\xi,\psi} c^2_{e,\psi} = \frac{1}{360},$$

$$\sum_{\nu} b_{u,\nu} \sum_{\mu} a_{uw,\nu,\mu} \sum_{\xi} a_{wv,\mu,\xi} \sum_{\psi} a_{re,\xi,\psi} \sum_{\varphi} a_{et,\psi,\varphi} c_{t,\varphi} = \frac{1}{720}.$$

Помимо этих ограничений для построения вложенного метода (5)–(8) порядка $q = 4$ при уже определенных параметрах векторов C_u, B_u с девятью блочными весовыми коэффициентами A_{uv} должны выполняться еще 66 линейных относительно параметров $\hat{b}_{u,\nu}$ уравнений $(u, v, \eta \in \{0, 1, 2\})$

$$\begin{aligned}
&\sum_{\nu} \hat{b}_{u,\nu} c^s_{u,\nu} = \frac{1}{s+1}, \quad s = 0, 1, \ldots, 3,\\
&\sum_{\nu} \hat{b}_{u,\nu} \sum_{\mu} a_{uv,\nu,\mu} c_{v,\mu} = \frac{1}{6},\\
&\sum_{\nu} \hat{b}_{u,\nu} \sum_{\mu} a_{uv,\nu,\mu} c^2_{u,\mu} = \frac{1}{12},\\
&\sum_{\nu} \hat{b}_{u,\nu} \sum_{\mu} a_{uv,\nu,\mu} \sum_{\xi} a_{v\eta,\mu,\xi} c_{\eta,\xi} = \frac{1}{24}
\end{aligned} \qquad (12)$$

с 57 ограничениями

$\nu = 1, \ldots, 7$	$\mu = 1, \ldots, 6$	$\mu = 1, \ldots, 6$
$a_{00,8,\nu} = b_{0,\nu}$	$a_{01,8,\mu} = b_{1,\mu}$	$a_{02,8,\mu} = b_{2,\mu}$
$a_{10,7,\nu} = b_{0,\nu}$	$a_{11,7,\mu} = b_{1,\mu}$	$a_{12,7,\mu} = b_{2,\mu}$
$a_{20,7,\nu} = b_{0,\nu}$	$a_{21,7,\mu} = b_{1,\mu}$	$a_{22,7,\mu} = b_{2,\mu}$

, (13)

обеспечивающими реализацию технологии FSAL (последнее вычисление производных на текущем шаге совпадает с первым на следующем).

Количество параметров метода (4)–(8) шестого порядка, подлежащих определению, равно 216. При решении системы (10), (11) для каждой группы C_u, B_u и каждого блока весовых коэффициентов A_{uv} для весовых и узловых параметров введем упрощающие предположения

$$b_{u,2} = 0, \quad c_{u,1} = 0, \quad u = 0, 1, 2, \qquad (14)$$

а также упрощающие ограничения, представленные в табл. 2. Используя их в рамках структурного подхода [2, 3], преобразуем исходную систему (11) к нелинейной системе-следствию, которая (структурно) состоит из 12 блоков преобразованных уравнений системы и 198 упрощающих ограничений.

Общее число уравнений системы-следствия меньше исходной системы условий порядка. Число неизвестных параметров метода шестого порядка $c_{u,\nu}$, $b_{u,\nu}$, $a_{uv,\nu,g}$, $u, v \in \{0, 1, 2\}$, с учетом (10), (14) сократилось до 210. Система-следствие сохранила характерные структурные особенности исходной системы условий порядка (11) — разбиение на блоки, а также нелинейность связей неизвестных параметров метода внутри девяти блоков и между ними.

Таблица 2. **Упрощающие ограничения для условий порядка (12)**

$w=3,\ldots,7;\ \tau=0,1,2$	$\theta=0,1;\ \xi=1,2$	$s=1,\ldots,6;\ \mu=2,\ldots,6$
$\sum\limits_{\nu=1}^{w-1} a_{00,w,\nu}c_{0,\nu}^{\tau}=\dfrac{c_{0,w}^{\tau+1}}{\tau+1}$, $\sum\limits_{\nu=3}^{7} b_{0,\nu}c_{0,\nu}^{\xi}a_{00,\nu,2}=0$, $\sum\limits_{\nu=s+1}^{7} b_{0,\nu}a_{00,\nu,s}=$ $=b_{0,s}\left(1-c_{0,s}\right)$	$\sum\limits_{\nu=1}^{w-1} a_{01,w,\nu}c_{1,\nu}^{\theta}=\dfrac{c_{0,w}^{\theta+1}}{\theta+1}$, $\sum\limits_{\nu=3}^{7} b_{0,\nu}c_{0,\nu}^{2}a_{01,\nu,2}=0$, $\sum\limits_{\nu=s+1}^{7} b_{0,\nu}c_{0,\nu}^{\theta}a_{01,\nu,s}=$ $=\dfrac{b_{1,s}\left(1-c_{1,s}^{\theta+1}\right)}{\theta+1}$	$\sum\limits_{\nu=1}^{w-1} a_{02,w,\nu}c_{2,\nu}^{\theta}=\dfrac{c_{0,w}^{\theta+1}}{\theta+1}$, $\sum\limits_{\nu=3}^{7} b_{0,\nu}c_{0,\nu}^{2}a_{02,\nu,2}=0$, $\sum\limits_{\nu=s+1}^{7} b_{0,\nu}c_{0,\nu}^{\theta}a_{02,\nu,s}=$ $=\dfrac{b_{2,s}\left(1-c_{2,s}^{\theta+1}\right)}{\theta+1}$
$\sum\limits_{\nu=1}^{\mu} a_{10,\mu,\nu}c_{0,\nu}^{\tau}=\dfrac{c_{1,\mu}^{\tau+1}}{\tau+1}$, $\sum\limits_{\nu=2}^{6} b_{1,\nu}c_{1,\nu}^{\xi}a_{10,\nu,2}=0$, $\sum\limits_{\nu=s}^{6} b_{1,\nu}a_{10,\nu,s}=$ $=b_{0,s}\left(1-c_{0,s}\right)$	$\sum\limits_{\nu=1}^{\mu} a_{11,\mu,\nu}c_{1,\nu}^{\theta}=\dfrac{c_{1,\mu}^{\theta+1}}{\theta+1}$, $\sum\limits_{\nu=2}^{6} b_{1,\nu}c_{1,\nu}^{2}a_{11,\nu,2}=0$, $\sum\limits_{\nu=s}^{6} b_{1,\nu}c_{1,\nu}^{\theta}a_{11,\nu,s}=$ $=\dfrac{b_{1,\mu}\left(1-c_{1,\mu}^{\theta+1}\right)}{\theta+1}$	$\sum\limits_{\nu=1}^{\mu-1} a_{12,\mu,\nu}c_{2,\nu}^{\theta}=\dfrac{c_{1,\mu}^{\theta+1}}{\theta+1}$, $\sum\limits_{\nu=\mu}^{6} b_{1,\nu}a_{12,\nu,\mu-1}=$ $=b_{2,\mu-1}\left(1-c_{2,\mu-1}\right)$
$\sum\limits_{\nu=1}^{\mu} a_{20,\mu,\nu}c_{0,\nu}^{\tau}=\dfrac{c_{2,\mu}^{\tau+1}}{\tau+1}$, $\sum\limits_{\nu=2}^{6} b_{2,\nu}c_{2,\nu}^{\xi}a_{20,\nu,2}=0$, $\sum\limits_{\nu=s}^{6} b_{2,\nu}a_{20,\nu,s}=$ $=b_{0,s}\left(1-c_{0,s}\right)$	$\sum\limits_{\nu=1}^{\mu} a_{21,\mu,\nu}c_{1,\nu}^{\theta}=\dfrac{c_{2,\mu}^{\theta+1}}{\theta+1}$, $\sum\limits_{\nu=2}^{6} b_{2,\nu}c_{2,\nu}^{2}a_{21,\nu,2}=0$, $\sum\limits_{\nu=s}^{6} b_{2,\nu}c_{2,\nu}^{\theta}a_{21,\nu,s}=$ $=\dfrac{b_{1,s}\left(1-c_{1,s}^{\theta+1}\right)}{\theta+1}$	$\sum\limits_{\nu=1}^{\mu} a_{22,\mu,\nu}c_{2,\nu}^{\theta}=\dfrac{c_{2,\mu}^{\theta+1}}{\theta+1}$, $\sum\limits_{\nu=s}^{6} b_{2,\nu}c_{2,\nu}^{\theta}a_{22,\nu,s}=$ $=\dfrac{b_{2,s}\left(1-c_{2,s}^{\theta+1}\right)}{\theta+1}$

Нелинейная система-следствие (188 нелинейных уравнений с 210 неизвестными), описывающая ограничения на параметры метода шестого порядка, *распадается* на 12 систем, решение которых *в определенном порядке* сводится к решению систем, линейных относительно параметров $b_{u,\nu}$, $a_{uv,\nu,\mu}$.

Исследование на совместность уравнений нелинейной системы-следствия, частично представленное в [7, 8], позволило получить очень важные соотношения на узловые параметры $c_{u,\nu}$ метода, представление которых необходимо для построения вложенного метода четвертого порядка.

4. Алгоритм построения семейства методов шестого порядка. Считаем, что все узловые параметры $c_{w,\nu}$ выбраны таким образом, чтобы при выполнении предположений (14) и упрощающих ограничений (10), а также представленных в табл. 2 все параметры метода были определены и выполнялись неравенства $0 \leqslant b_{w,\nu} \leqslant 1$, $0 \leqslant c_{w,\nu} \leqslant 1$, $w \in \{0,1,2\}$. Заметим, что с учетом упрощающих ограничений из табл. 2 $c_{0,7}=1$, $c_{g,6}=1$, $g=1,2$.

4.1. Коэффициенты B_0**.** Разрешая линейную систему уравнений

$$\sum_{\nu=1}^{m_0} b_{0,\nu}c_{0,\nu}^{s}=\frac{1}{s+1}, \quad s=0,1,\ldots,5,$$

выражаем весовые параметры $b_{0,\nu}$ через свободные узловые параметры $c_{0,3}$, $c_{0,4}$, $c_{0,5}$, $c_{0,6}$:

$$b_{0,\nu} = b_{0,\nu}(c_{0,3}, c_{0,4}, c_{0,5}, c_{0,6}).$$

***4.2. Коэффициенты** B_1 **и** B_2**.* Две несвязанные к этому моменту линейные системы

$$\sum_{\nu=1}^{m_g} b_{g,\nu} c_{g,\nu}^s = \frac{1}{s+1}, \quad g = 1, 2, \quad s = 0, 1, \ldots, 5, \tag{15}$$

совместны при ограничениях на узловые параметры $c_{g,5} = c_{g,5}(c_{g,3}, c_{g,4})$:

$$c_{g,5} = \frac{5\, c_{g,4}\, c_{g,3} - 3\, c_{g,4} - 3\, c_{g,3} + 2}{10\, c_{g,4}\, c_{g,3} - 5\, g_{q,4} - 5\, c_{g,3} + 3}. \tag{16}$$

Групповые весовые параметры $b_{g,\nu}$, являющиеся решением системы (15), выражаются через узловые свободные параметры $c_{g,3}, c_{g,4}$ своих групп $b_{g,\nu} = b_{g,\nu}(c_{g,3}, c_{g,4})$.

***4.3. Блок** A_{00}**.* Теперь последовательно находим параметры метода $A_{uv} = \{a_{uv,\nu,\mu}\}$ как решение девяти совместных линейных относительно $a_{uv,\nu,\mu}$ систем. Для каждого блока определяемых параметров A_{uv} через N_{uv} обозначим число уравнений совместной линейной системы, используемой для их определения, а через S_{uv} — число неизвестных параметров $a_{uv,\nu,\mu}$ этого блока.

Построение решения системы-следствия начнем с первого диагонального блока матрицы параметров с $N_{00} = 20$, $S_{00} = 20$:

$$\sum_{\nu=1}^{s-1} a_{00,s,\nu} c_{0,\nu}^d = \frac{1}{d+1} c_{0,s}^{d+1}, \quad s = 3, \ldots, 6, \quad d = 0, 1, 2,$$

$$\sum_{\nu=3}^{7} b_{0,\nu} c_{0,\nu}^{\rho} a_{00,\nu,2} = 0, \quad \rho = 1, 2,$$

$$\sum_{\nu=s+1}^{7} b_{0,\nu} a_{00,\nu,s} = b_{0,s} \left(1 - c_{0,s}\right), \quad s = 2, \ldots, 7, \tag{17}$$

$$\sum_{\nu=4}^{7} b_{0,\nu} c_{0,\nu} \sum_{\mu=3}^{\nu-1} a_{00,\nu,\mu} c_{0,\mu}^3 = \frac{1}{24},$$

$$\sum_{\nu=5}^{7} b_{0,\nu} c_{0,\nu} \sum_{\mu=4}^{\nu-1} a_{00,\nu,\mu} \sum_{\xi=3}^{\mu-1} a_{00,\mu,\xi} c_{0,\xi}^2 = \frac{1}{72}.$$

Система (17) совместна при выполнении дополнительных ограничений на свободные параметры

$$c_{0,3} = \frac{3}{2} c_{0,2}, \quad c_{0,4} = \frac{6 c_{0,2}}{135 c_{0,2}^2 - 60 c_{0,2} + 8}. \tag{18}$$

Ее решения $a_{00,\nu,\mu} = a_{00,\nu,\mu}(c_{0,2}, c_{0,5}, c_{0,6})$ найдены в [13] и образуют трехпараметрическое семейство.

***4.4. Блок** A_{11}**.* Дальнейшее рассмотрение будет связано с поиском решения для четырех связанных между собой блоков параметров A_{11}, A_{12}, A_{21} и A_{22}. В работе [10] данный вопрос изучался достаточно подробно. Здесь, опуская представление самого решения для этих параметров, будем приводить условия совместности рассматриваемых систем, необходимые для нахождения четырех оставшихся блоков параметров.

В линейной системе, соответствующей блоку параметров A_{11}, число уравнений $N_{11} = 19$, а неизвестных — $S_{11} = 20$:

$$\sum_{\nu=1}^{s} a_{11,s,\nu} = c_{1,s}, \quad s = 2, \ldots, 6,$$

$$\sum_{\nu=1}^{\mu} a_{11,\mu,\nu} c_{1,\nu} = \frac{1}{2} c_{1,\mu}^2, \quad \mu = 2, \ldots, 5,$$

$$\sum_{\nu=2}^{6} b_{1,\nu} c_{1,\nu}^2 a_{11,\nu,2} = 0, \tag{19}$$

$$\sum_{\nu=s}^{6} b_{1,\nu} a_{11,\nu,s} = b_{1,s} \left(1 - c_{1,s}\right), \quad s = 2, \ldots, 6,$$

$$\sum_{\nu=\mu}^{6} b_{1,\nu} c_{1,\nu} a_{11,\nu,\mu} = \frac{1}{2} b_{1,\mu} \left(1 - c_{1,\mu}^2\right), \quad \mu = 2, \ldots, 4,$$

$$\sum_{\nu=3}^{6} b_{1,\nu} c_{1,\nu}^2 \sum_{\mu=2}^{\nu} a_{11,\nu,\mu} c_{1,\mu}^2 = \frac{1}{18}.$$

Решения системы (19) $a_{11,\nu,\mu}\left(c_{1,2}, c_{1,3}, c_{1,4}, a_{11,3,2}\right)$ с учетом (16) образуют многопараметрическое семейство относительно свободных параметров $c_{1,2}$, $c_{1,3}$, $c_{1,4}$, $a_{11,3,2}$.

4.5. Блок A_{12}. Система с $N_{12} = 14$, $S_{12} = 14$

$$\sum_{\nu=1}^{s-1} a_{12,s,\nu} c_{2,\nu}^d = \frac{1}{d+1} c_{1,w}^{d+1}, \quad d = 0, 1, \quad s = 3, \ldots, 5, \tag{20}$$

$$\sum_{\nu=\mu}^{6} b_{1,\nu} a_{12,\nu,\mu-1} = b_{2,\mu-1} \left(1 - c_{2,\mu-1}\right), \quad \mu = 2, \ldots, 5, \tag{21}$$

$$\sum_{\nu=3}^{6} b_{1,\nu} c_{1,\nu}^2 \sum_{\mu=2}^{\nu-1} a_{12,\nu,\mu} c_{2,\mu}^2 = \frac{1}{18}, \tag{22}$$

$$\sum_{\nu=3}^{6} b_{1,\nu} c_{1,\nu} \sum_{\mu=2}^{\nu-1} a_{12,\nu,\mu} c_{2,\mu} = \frac{1}{8}, \tag{23}$$

$$\sum_{\nu=3}^{6} b_{1,\nu} c_{1,\nu} \sum_{\mu=2}^{\nu-1} a_{12,\nu,\mu} c_{2,\mu}^2 = \frac{1}{15}, \tag{24}$$

$$\sum_{\nu=3}^{6} b_{1,\nu} c_{1,\nu} \sum_{\mu=2}^{\nu-1} a_{12,\nu,\mu} c_{2,\mu}^3 = \frac{1}{24} \tag{25}$$

позволяет после введения новых переменных

$$\psi_{12,s} = \sum_{\nu=s+1}^{6} b_{1,\nu} c_{1,\nu} a_{12,\nu,s}, \quad s = 2, 3, 4, \tag{26}$$

найти их представление через свободные узловые параметры, разрешив систему (23)–(25), линейную относительно $\psi_{12,s}$:

$$\psi_{12,2} = \frac{\left(c_{25}{}^4 - (1 + c_{23} + c_{24})\, c_{25}{}^3 + (c_{23}c_{24} + c_{23} + c_{24})\, c_{25}{}^2 - c_{23}c_{24}c_{25}\right) b_{25}}{c_{22}\,(c_{24} - c_{22})\,(c_{23} - c_{22})} + \\ + \frac{15c_{23}c_{24} - 8c_{23} - 8c_{24} + 5}{120c_{22}\,(c_{24} - c_{22})\,(c_{23} - c_{22})},$$

$$\psi_{12,3} = -\frac{\left(\left(-c_{25}{}^3 + (c_{24} + 1)\, c_{25}{}^2 - c_{24}c_{25}\right) c_{22} + c_{25}{}^4 - (c_{24} + 1)\, c_{25}{}^3 + c_{24}c_{25}{}^2\right) b_{25}}{c_{23}\,(c_{23} - c_{22})\,(c_{24} - c_{23})} - \\ - \frac{(15c_{24} - 8)\, c_{22} - 8c_{24} + 5}{120c_{23}\,(c_{23} - c_{22})\,(c_{24} - c_{23})},$$

$$\psi_{12,4} = \frac{\left(\left(-c_{25}{}^3 + (c_{23} + 1)\, c_{25}{}^2 - c_{23}c_{25}\right) c_{22} + c_{25}{}^4 - (c_{23} + 1)\, c_{25}{}^3 + c_{23}c_{25}{}^2\right) b_{25}}{c_{24}\,(c_{24} - c_{22})\,(c_{24} - c_{23})} + \\ + \frac{(15c_{23} - 8)\, c_{22} - 8c_{23} + 5}{120c_{24}\,(c_{24} - c_{22})\,(c_{24} - c_{23})}.$$

Используя (26), сводим решение исходной системы (20)–(25) к решению линейной системы-следствия (20)–(22), (26). Ее структура существенно проще и позволяет выразить параметры блока A_{12} через свободные параметры $c_{1,2}$, $c_{1,3}$, $c_{1,4}$, $c_{2,2}$, $c_{2,3}$ и $c_{2,4}$.

4.6. Блок A_{21}***.*** Далее при поиске решения системы с $N_{21} = 20$, $S_{21} = 20$

$$\begin{gathered}
\sum_{\nu=1}^{s} a_{21,s,\nu} = c_{2,s}, \quad s = 2, \ldots, 6, \\
\sum_{\nu=1}^{\mu} a_{21,\mu,\nu} c_{1,\nu} = \frac{1}{2} c_{2,\mu}^2, \quad \mu = 2, \ldots, 5, \\
\sum_{\nu=2}^{6} b_{2,\nu} c_{2,\nu}^2 a_{21,\nu,2} = 0, \\
\sum_{\nu=5}^{6} b_{2,\nu} a_{21,\nu,5} = b_{1,5}\,(1 - c_{1,5}), \\
\sum_{\nu=\mu}^{6} b_{2,\nu} c_{2,\nu}^d a_{21,\nu,\mu} = \frac{1}{d+1} b_{1,\mu} \left(1 - c_{1,\mu}^{d+1}\right), \quad \mu = 2, 3, 4, \quad d = 0, 1, \\
\sum_{\nu=3}^{6} b_{1,\nu} c_{1,\nu} \sum_{\mu=2}^{\nu-1} a_{12,\nu,\mu} \sum_{\xi=2}^{\mu} a_{21,\mu,\xi} c_{1,\xi}^2 = \frac{1}{72}, \\
\sum_{\mu=3}^{6} b_{2,\mu} c_{2,\mu}^2 \sum_{\xi=2}^{\mu} a_{21,\mu,\xi} c_{1,\xi}^2 = \frac{1}{18}, \\
\sum_{\nu=4}^{6} b_{1,\nu} c_{1,\nu} \sum_{\mu=3}^{\nu-1} a_{12,\nu,\mu} \sum_{\xi=3}^{\mu} a_{21,\mu,\xi} c_{1,\xi}^2 = \frac{1}{72}
\end{gathered} \tag{27}$$

находим условие ее совместности с использованием упрощающих предположений из табл. 2 и ранее полученных ограничений (26):

$$c_{2,2} = \frac{2c_{2,3} - 3c_{1,3}}{15c_{1,3}c_{2,3} - 10c_{2,3} + 2}. \tag{28}$$

Равенство (28) позволяет выразить параметры третьего блока $a_{21,\nu,\mu}$, $\nu = 2, \dots, 6$, $\mu = 1, \dots, \nu$, являющиеся решением системы (27), через свободные параметры $c_{1,3}$, $c_{1,4}$, $c_{2,3}$, $c_{2,4}$.

4.7. Блок A_{22}***.*** В последней из четырех систем, рассмотренных в [10], $N_{22} = 19$, $S_{22} = 20$. При всех упрощающих ограничениях и ограничениях (26), (28) на параметры блока $A_{22} = \{a_{22,\nu,\mu}\}$ эта система линейна и совместна:

$$
\begin{gathered}
\sum_{\nu=1}^{s} a_{22,s,\nu} = c_{2,s}, \quad s = 2, \dots, 6, \\
\sum_{\nu=1}^{\mu} a_{22,\mu,\nu} c_{2,\nu} = \frac{1}{2} c_{2,\mu}^2, \quad \mu = 2, \dots, 5, \\
\sum_{\nu=s}^{6} b_{2,\nu} a_{22,\nu,s} = b_{2,s}\left(1 - c_{2,s}^{d+1}\right), \quad s = 2, \dots, 6, \\
\sum_{\nu=\mu}^{6} b_{2,\nu} c_{2,\nu} a_{22,\nu,\mu} = \frac{1}{2} b_{2,\mu}\left(1 - c_{2,\mu}^2\right), \quad \mu = 2, 3, 4, \\
\sum_{\nu=3}^{6} b_{2,\nu} c_{2,\nu}^2 \sum_{\mu=2}^{\nu} a_{22,\nu,\mu} c_{2,\mu}^2 = \frac{1}{18}, \\
\sum_{\nu=3}^{6} b_{1,\nu} c_{1,\nu} \sum_{\mu=2}^{\nu-1} a_{12,\nu,\mu} \sum_{u=2}^{\mu} a_{22,\mu,u} c_{2,u}^2 = \frac{1}{72}.
\end{gathered}
\tag{29}
$$

Решения системы (29) образуют пятипараметрическое семейство относительно свободных параметров $c_{1,3}$, $c_{1,4}$, $c_{2,3}$, $c_{2,4}$, $a_{22,4,3}$: $a_{22,\nu,\mu} = a_{22,\nu,\mu}(c_{1,3}, c_{1,4}, c_{2,3}, c_{2,4}, a_{22,4,3})$, $\nu = 2, \dots, 6$, $\mu = 1, \dots, \nu$.

4.8. Блоки A_{10} ***и*** A_{20}***.*** В системах для определения параметров этих блоков $N_{10} = 21$, $N_{20} = 20$, $S_{10} = S_{20} = 20$:

$$
\begin{gathered}
\sum_{\nu=1}^{w} a_{g0,w,\nu} c_{0,\nu}^{\rho} = \frac{1}{\rho+1} c_{g,w}^{\rho+1}, \quad \rho = 0, 1, 2, \quad w = 2, \dots, 6, \\
\sum_{\nu=2}^{6} b_{g,\nu} c_{g,\nu}^{\rho} a_{g0,\nu,2} = 0, \quad \rho = 1, 2, \\
\sum_{\nu=w}^{6} b_{g,\nu} a_{g0,\nu,w} = b_{0,w}\left(1 - c_{0,w}\right), \quad w = 2, \dots, 6, \\
\sum_{\nu=3}^{6} b_{g,\nu} c_{g,\nu} \sum_{\mu=3}^{\nu} a_{g0,\nu,\mu} c_{0,\mu}^3 = \frac{1}{24}, \\
\sum_{\mu=3}^{6} c_{0,\mu}^2 \sum_{\nu=\mu}^{6} b_{1,\nu} c_{1,\nu}^2 a_{10,\nu\mu} = \frac{1}{18}.
\end{gathered}
\tag{30}
$$

Проверка на совместность двух систем (30) уравнений $A_{g0} = \{a_{g0,\nu,\mu}\}$, $g = 1, 2$, показала, что их решения существуют при ограничениях

$$
c_{1,2} = c_{2,2} = \frac{3}{2} c_{0,2}, \tag{31}
$$

$$c_{1,5} = c_{2,5}, \tag{32}$$

связывающих узловые параметры всех трех групп уравнений. Приведем результат прямого хода метода исключения решения системы (30) с учетом (31) и (32):

$$a_{g0,2,1} = \frac{3}{8} c_{0,2}, \qquad a_{g0,2,2} = \frac{9}{8} c_{0,2}, \qquad a_{g0,3,2} = \frac{c_{g,3}^2 \left(3c_{0,3} - 2c_{g,3}\right)}{6c_{0,2}(c_{0,3} - c_{0,2})},$$

$$a_{g0,3,3} = \frac{c_{g,3}^2 \left(2c_{g,3} - 3c_{0,2}\right)}{6c_{0,3}(c_{0,3} - c_{0,2})}, \qquad a_{g0,4,2} = -\frac{a_{g0,3,2} b_{g,3} \left(c_{g,6} - c_{g,3}\right) \left(c_{g,5} - c_{g,3}\right)}{b_{g,4} \left(c_{g,6} - c_{g,4}\right) \left(c_{g,5} - c_{g,4}\right)},$$

$$a_{g0,5,2} = \frac{a_{g0,3,2} b_{g,3} \left(c_{g,6} - c_{g,3}\right) \left(c_{g,4} - c_{g,3}\right)}{b_{g,5} \left(c_{g,6} - c_{g,5}\right) \left(c_{g,5} - c_{g,4}\right)},$$

$$a_{g0,6,2} = -\frac{a_{g0,3,2} b_{g,3} \left(c_{g,5} - c_{g,3}\right) \left(c_{g,4} - c_{g,3}\right)}{b_{g,6} \left(c_{g,6} - c_{g,5}\right) \left(c_{g,6} - c_{g,4}\right)},$$

$$a_{g0,4,3} = \frac{-6c_{0,2} \left(c_{0,4} - c_{0,2}\right) a_{g0,4,2} - 2{c_{g,4}}^3 + 3{c_{g,4}}^2 c_{0,4}}{6c_{0,3} \left(c_{0,4} - c_{0,3}\right)},$$

$$a_{g0,4,4} = \frac{6\, c_{0,2} \left(c_{0,3} - c_{0,2}\right) a_{g0,4,2} + 2\, {c_{g,4}}^3 - 3\, {c_{g,4}}^2 c_{0,3}}{6\, c_{0,4} \left(c_{0,4} - c_{0,3}\right)},$$

$$a_{g0,5,3} = -\frac{\left(c_{0,4} - c_{0,2}\right) c_{0,2} a_{g0,5,2}}{\left(c_{0,4} - c_{0,3}\right) c_{0,3}} + \frac{\left(c_{0,5} - c_{0,4}\right) c_{0,5} a_{g0,5,5}}{\left(c_{0,4} - c_{0,3}\right) c_{0,3}} + \frac{3\, {c_{g,5}}^2 c_{0,4} - 2\, {c_{g,5}}^3}{6\, \left(c_{0,4} - c_{0,3}\right) c_{0,3}},$$

$$a_{g0,5,4} = \frac{c_{0,2} \left(c_{0,3} - c_{0,2}\right) a_{g0,5,2}}{c_{0,4} \left(c_{0,4} - c_{0,3}\right)} + \frac{\left(c_{0,3} c_{0,5} - {c_{0,5}}^2\right) a_{g0,5,5}}{c_{0,4} \left(c_{0,4} - c_{0,3}\right)} + \frac{2\, {c_{g,5}}^3 - 3\, {c_{g,5}}^2 c_{0,3}}{6\, c_{0,4} \left(c_{0,4} - c_{0,3}\right)},$$

$$a_{g0,6,5} = \frac{b_{0,5}(1 - c_{0,5}) - a_{g0,5,5} b_{g,5}}{b_{g,6}}, \qquad a_{g0,6,6} = \frac{b_{0,6} \left(1 - c_{0,6}\right)}{b_{g,6}},$$

$$a_{g0,6,3} = \frac{c_{0,2} \left(c_{0,4} - c_{0,2}\right) a_{g0,6,2}}{c_{0,3} \left(c_{0,4} - c_{0,3}\right)} + \frac{c_{0,5} \left(c_{0,5} - c_{0,4}\right) a_{g0,6,5}}{c_{0,3} \left(c_{0,4} - c_{0,3}\right)} +$$

$$+ \frac{c_{0,6} \left(c_{0,6} - c_{0,4}\right) a_{g0,6,6}}{c_{0,3} \left(c_{0,4} - c_{0,3}\right)} - \frac{{c_{g,6}}^2 (2\, c_{g,6} - 3\, c_{0,4})}{6\, c_{0,3} \left(c_{0,4} - c_{0,3}\right)},$$

$$a_{g0,6,4} = \frac{c_{0,2}(c_{0,3} - c_{0,2}) a_{g0,6,2}}{c_{0,4}(c_{0,4} - c_{0,3})} + \frac{c_{0,5} \left(c_{0,5} - c_{0,3}\right) a_{g0,6,5}}{c_{0,4} \left(c_{0,4} - c_{0,3}\right)} +$$

$$+ \frac{c_{0,6} \left(c_{0,6} - {c_{0,3}}^2\right) a_{g0,6,6}}{c_{0,4} \left(c_{0,4} - c_{0,3}\right)} + \frac{{c_{g,6}}^2 (2\, c_{g,6} - 3\, c_{0,3})}{6\, c_{0,4} \left(c_{0,4} - c_{0,3}\right)},$$

$$a_{g0,5,5} = \frac{5\, c_{0,3} c_{0,4} - 2\, c_{0,3} - 2\, c_{0,4} + 1}{120\, b_{g,5} c_{0,5} (1 - c_{g,5})(c_{0,5} - c_{0,3})(c_{0,5} - c_{0,4})}.$$

Причем с использованием ранее полученных ограничений (16) на параметры $c_{1,5}$ и $c_{2,5}$ равенство (32) позволяет связать свободные параметры $c_{1,3}$, $c_{1,4}$, $c_{2,3}$, $c_{2,4}$ между собой:

$$c_{1,4} = \frac{5c_{1,3} c_{2,3} c_{2,4} - 5c_{2,3} c_{2,4} - c_{1,3} + c_{2,3} + c_{2,4}}{5c_{1,3} c_{2,3} + 5c_{1,3} c_{2,4} - 5c_{2,3} c_{2,3} - 5c_{1,3} + 1}.$$

Выполнив обратный ход, выразим все весовые параметры $a_{0g,\nu,\mu}$ этих двух блоков через свободные параметры $c_{0,5}$, $c_{0,6}$, $c_{1,3}$, $c_{2,3}$, $c_{2,4}$.

4.9. Блоки A_{01} ***и*** A_{02}***.*** Здесь $N_{01} = 21$, $N_{02} = 20$, $S_{01} = S_{02} = 20$:

$$\sum_{\nu=w+1}^{7} b_{0,\nu} c_{0,w}^{\rho} a_{0g,\nu,w} = \frac{1}{\rho+1} b_{g,w} \left(1 - c_{g,w}^{\rho+1}\right), \quad w = 3, \ldots, 6, \quad \rho = 0, 1,$$

$$\sum_{\nu=3}^{7} b_{0,\nu} c_{0,\nu}^{\rho} a_{0g,\nu,2} = 0, \quad \rho = 0,1,2,$$

$$\sum_{\nu=1}^{w-1} a_{g0,w,\nu} c_{0,\nu}^{\rho} = \frac{1}{\rho+1} c_{g,w}^{\rho+1}, \quad w = 3,\dots,7, \quad \rho = 0,1,$$

$$\sum_{\nu=4}^{7} b_{0,\nu} c_{0,\nu} \sum_{\mu=3}^{\nu-1} a_{00,\nu,\mu} \sum_{\xi=2}^{\mu-1} a_{0g,\mu,\xi} c_{g,\xi}^{2} = \frac{1}{72}, \tag{33}$$

$$\sum_{\nu=3}^{7} b_{0,\nu} c_{0,\nu}^{2} \sum_{\mu=2}^{\nu-1} a_{0g,\nu,\mu} c_{g,\mu}^{2} = \frac{1}{18},$$

$$\sum_{\nu=5}^{7} b_{0,\nu} c_{0,\nu} \sum_{\mu=4}^{\nu-1} a_{00,\nu,\mu} \sum_{\xi=3}^{\mu-1} a_{01,\mu,\xi} c_{1,\xi}^{2} = \frac{1}{72}.$$

Система (33) совместна при выполнении дополнительного ограничения на узловые параметры

$$c_{1,3} = \frac{3}{2} c_{0,2},$$

которое с полученными ранее условиями совместности (16), (18), (28), (32) позволяет выразить узловые параметры $c_{0,2}$, $c_{0,3}$, $c_{0,4}$, $c_{1,2}$, $c_{1,4}$, $c_{1,5}$, $c_{2,2}$, $c_{2,3}$, $c_{2,5}$ через параметры $c_{0,5}$, $c_{0,6}$, $c_{1,3}$, $c_{2,4}$:

$$\begin{gathered} c_{0,2} = \frac{2}{3} c_{1,3}, \quad c_{1,2} = c_{2,2} = c_{0,3} = c_{1,3}, \quad c_{2,3} = c_{0,4} = \frac{c_{1,3}}{15\, {c_{1,3}}^{2} - 10\, c_{1,3} + 2}, \\ c_{1,4} = \frac{20\, c_{1,3}^{2}\, c_{2,4} - 15\, c_{1,3}^{3} - 15\, c_{1,3}\, c_{2,4} + 10\, c_{1,3}^{2} + 2\, c_{2,4} - c_{1,3}}{70\, c_{1,3}^{2} + 5\, c_{1,3}\, c_{2,4} - 20\, c_{1,3} + 2 - 75\, c_{1,3}^{3} + 75\, c_{1,3}^{3}\, c_{2,4} - 50\, c_{1,3}^{2}\, c_{2,4}}, \\ c_{1,5} = c_{2,5} = \frac{45\, c_{1,3}^{2}\, c_{2,4} - 30\, c_{1,3}^{2} - 35\, c_{1,3}\, c_{2,4} + 23\, c_{1,3} + 6\, c_{2,4} - 4}{75\, c_{1,3}^{2}\, c_{2,4} - 45\, c_{1,3}^{2} - 60\, c_{1,3}\, c_{2,4} + 35\, c_{1,3} + 10\, c_{2,4} - 6}. \end{gathered} \tag{34}$$

Ограничимся приведением последовательности прямого хода решения системы (33):

$$a_{0g,3,1} = \frac{c_{0,3}(2\, c_{g,2} - c_{0,3})}{2\, c_{g,2}}, \qquad a_{0g,3,2} = \frac{{c_{0,3}}^{2}}{2\, c_{g,2}},$$

$$a_{0g,4,2}(a_{0g,7,2}) = \frac{a_{0g,7,2} b_{0,7}\, (1 - c_{0,6})\, (1 - c_{0,5}) - a_{0g,32} b_{0,3}\, (c_{0,6} - c_{0,3})\, (c_{0,5} - c_{0,3})}{b_{0,4}\, (c_{0,6} - c_{0,4})\, (c_{0,5} - c_{0,4})},$$

$$a_{0g,5,2}(a_{0g,7,2}) = \frac{a_{0g,7,2} b_{0,7}\, (1 - c_{0,6})\, (1 - c_{0,4}) + a_{0g,3,2} b_{0,3}\, (c_{0,6} - c_{0,3})\, (c_{0,4} - c_{0,3})}{b_{0,5}\, (c_{0,6} - c_{0,5})\, (c_{0,5} - c_{0,4})},$$

$$a_{0g,6,2}(a_{0g,7,2}) = \frac{a_{0g,7,2} b_{0,7}\, (c_{0,5} - 1)\, (1 - c_{0,4}) - a_{0g,3,2} b_{0,3}\, (c_{0,5} - c_{0,3})\, (c_{0,4} - c_{0,3})}{b_{0,6}\, (c_{0,6} - c_{0,5})\, (c_{0,6} - c_{0,4})},$$

$$a_{0g,4,1}(a_{0g,7,2}) = \frac{(c_{g,2} - c_{g,3})\, a_{0g,4,2}}{c_{g,3}} + \frac{c_{0,4}(2\, c_{g,3} - c_{0,4})}{2\, c_{g,3}},$$

$$a_{0g,4,3}(a_{0g,7,2}) = \frac{{c_{0,4}}^{2} - 2\, c_{g,2} a_{0g,4,2}}{2\, c_{g,3}},$$

$$a_{0g,6,5} = \frac{b_{g,5}\, (1 - c_{g,5})^{2}}{2\, b_{0,6}\, (1 - c_{0,6})}, \qquad a_{0g,7,5} = \frac{b_{g,5}\, (1 - c_{g,5})\, (c_{g,5} - 2\, c_{0,6} + 1)}{2\, b_{0,7}\, (1 - c_{0,6})},$$

$$a_{0g,5,4}(a_{0g,7,4}) = \frac{2\,b_{0,7}a_{0g,7,4}\,(1-c_{0,6}) - (1-c_{g,4})\,(c_{g,4}-2\,c_{0,6}+1)\,b_{g,4}}{2\,b_{0,5}\,(c_{0,6}-c_{0,5})},$$

$$a_{0g,6,4}(a_{0g,7,4}) = \frac{(1-c_{g,4})\,(c_{g,4}-2c_{0,5}+1)\,b_{g,4} - 2\,b_{0,7}a_{0g,7,4}\,(1-c_{0,5})}{2\,b_{0,6}\,(c_{0,6}-c_{0,5})},$$

$$a_{0g,5,3}(a_{0g,7,3}) = \frac{(1-c_{0,6})\,b_{0,7}a_{0g,7,3}}{b_{0,5}\,(c_{0,6}-c_{0,5})} - \frac{(c_{0,6}-c_{0,4})\,b_{0,4}a_{0g,4,3}}{b_{0,5}\,(c_{0,6}-c_{0,5})} + \\ + \frac{\left((2\,c_{g,3}-2)\,c_{0,6}-{c_{g,3}}^2+1\right)b_{g,3}}{2\,b_{0,5}\,(-c_{0,6}+c_{0,5})},$$

$$a_{0g,6,3}(a_{0g,7,3}) = \frac{(c_{0,5}-1)\,b_{0,7}a_{0g,7,3}+(c_{0,5}-c_{0,4})\,b_{0,4}a_{0g,4,3}}{b_{0,6}\,(c_{0,6}-c_{0,5})} + \\ + \frac{\left((2\,c_{g,3}-2)\,c_{0,5}-{c_{g,3}}^2+1\right)b_{g,3}}{2\,b_{0,6}\,(c_{0,6}-c_{0,5})}.$$

Параметры $a_{0g,5,1}$, $a_{0g,7,2}$, $a_{0g,7,3}$, $a_{0g,7,4}$ определяем, последовательно разрешая при $g=1,2$ две линейные относительно искомых параметров системы четырех уравнений:

$$\sum_{\nu=1}^{4} a_{0g,5,\nu}c_{g,\nu}^{s} = \frac{1}{s+1}c_{0,5}^{s+1}, \quad s=0,1,$$

$$\sum_{\nu=3}^{7} b_{0,\nu}c_{0,\nu}^{2}\sum_{\mu=2}^{\nu-1} a_{0g,\nu,\mu}c_{g,2}^{2} = \frac{1}{18},$$

$$\sum_{\nu=5}^{7} b_{0,\nu}c_{0,\nu}\sum_{\mu=4}^{\nu-1} a_{00,\nu,\mu}\sum_{\rho=3}^{\mu-1} a_{01,\mu,\rho}c_{1,\rho}^{2} = \frac{1}{72},$$

$$\sum_{\nu=4}^{7} b_{0,\nu}c_{0,\nu}\sum_{\mu=3}^{\nu-1} a_{00,\nu,\mu}\sum_{\rho=2}^{\mu-1} a_{02,\mu,\rho}c_{2,\rho}^{2} = \frac{1}{72}.$$

Выполнение обратного хода с учетом (34) позволяет выразить все искомые параметры $a_{0g,\nu,\mu}$ через свободные параметры $c_{0,5}$, $c_{0,6}$, $c_{1,3}$, $c_{2,4}$.

На этом работа алгоритма по построению метода шестого порядка закончена. Решение системы-следствия существует и образует шестипараметрическое семейство относительно свободных параметров $c_{0,5}$, $c_{0,6}$, $c_{1,3}$, $c_{2,4}$, $a_{11,3,2}$, $a_{22,4,3}$.

5. Семейство вложенных методов четвертого порядка. Для получения весовых параметров $\hat{B}_u$ при уже определенных B_u, C_u, A_{uv}, $u,v=0,1,2$, необходимо найти решение трех линейных (относительно $\hat{b}_{u,\nu}$) систем 66 уравнений (12) с 57 ограничениями (13).

На представленном выше шестипараметрическом семействе решений системы-следствия при использовании всех упрощающих ограничений из табл. 2 и условий совместности (16), (34) параметры вложенного метода $\hat{b}_{u,\nu}$ являются решением системы-следствия

$$\sum_{\nu=1}^{8} \hat{b}_{0,\nu}c_{0,\nu}^{s} = \frac{1}{s+1}, \quad s=0,1,\ldots,3,$$

$$\sum_{\nu=2}^{8} \hat{b}_{0,\nu}\sum_{\rho=1}^{\nu-1} a_{0g,\nu,\rho}c_{g,\rho}^{2} = \frac{1}{12}, \quad g=1,2, \tag{35}$$

$$\sum_{\nu=1}^{7} \hat{b}_{g,\nu} c_{g,\nu}^{s} = \frac{1}{s+1},$$
$$\sum_{\nu=2}^{7} \hat{b}_{g,\nu} \sum_{\rho=1}^{\nu-1} a_{g1,\nu,\rho} c_{g,\rho}^{2} = \frac{1}{12},$$

состоящей (в предположении $\hat{b}_{u,2} = 0$) из 16 линейно независимых уравнений системы (12). Решения системы (35) существуют и образуют семипараметрическое семейство

$$\hat{b}_{u,\nu}(c_{0,5},\ c_{0,6}, c_{1,3}, c_{2,4}, \hat{b}_{0,5}, \hat{b}_{1,3}, \hat{b}_{2,4}).$$

Для проверки работы алгоритма построения метода RKS6(4)[8,7,7]F с девятью свободными параметрами $c_{0,5}$, $c_{0,6}$, $c_{1,3}$, $c_{2,4}$, $a_{11,3,2}$, $a_{22,4,3}$, $\hat{b}_{0,5}$, $\hat{b}_{1,3}$, $\hat{b}_{2,4}$ и проведения сравнительного тестирования рассматриваемого метода было найдено частное решение (табл. 3) системы-следствия при свободных параметрах $c_{0,5} = \frac{2}{3}$, $c_{0,6} = \frac{4}{5}$, $c_{1,3} = \frac{1}{5}$, $c_{2,4} = \frac{1}{4}$, $a_{11,3,2} = 0$, $a_{22,4,3} = 0$.

При таком выборе узловых параметров весовые параметры вложенного метода образуют трехпараметрическое семейство $\hat{b}_{u,\nu}(\hat{b}_{0,5}, \hat{b}_{1,3}, \hat{b}_{2,4})$:

$$\hat{B}_0 = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} - \frac{7}{9}\hat{b}_{05} \\ 0 \\ \frac{125}{36}\hat{b}_{05} - \frac{125}{36} \\ \frac{27}{16} - \frac{7}{2}\hat{b}_{05} \\ \hat{b}_{0,5} \\ 0 \\ \frac{49}{36}\hat{b}_{05} - \frac{77}{96} \\ 1 - \frac{14}{9}\hat{b}_{05} \end{pmatrix}, \quad \hat{B}_1 = \begin{pmatrix} \frac{7}{72} - \frac{29}{150}\hat{b}_{1,3} \\ 0 \\ \hat{b}_{1,3} \\ \frac{1250}{2961} - \frac{928}{987}\hat{b}_{1,3} \\ \frac{1331}{3384} + \frac{1331}{7050}\hat{b}_{1,3} \\ \frac{2407}{525}\hat{b}_{1,3} - \frac{83}{252} \\ \frac{5}{12} - \frac{116}{25}\hat{b}_{1,3} \end{pmatrix}, \quad \hat{B}_2 = \begin{pmatrix} \frac{11}{96} - \frac{63}{512}\hat{b}_{2,4} \\ 0 \\ \frac{45}{104} - \frac{1701}{1664}\hat{b}_{2,4} \\ \hat{b}_{2,4} \\ \frac{1331}{3744} + \frac{1331}{6656}\hat{b}_{2,4} \\ \frac{623}{128}\hat{b}_{2,4} - \frac{89}{72} \\ \frac{4}{3} - \frac{116}{64}\hat{b}_{2,4} \end{pmatrix}.$$

Тестирование метода RKS6(4)[8,7,7]F проводилось при свободных параметрах вложенного метода $\hat{b}_{0,5} = \dfrac{3}{7}$, $\hat{b}_{1,3} = \dfrac{25}{348}$, $\hat{b}_{2,4} = \dfrac{16}{63}$.

6. Тестирование. Для проведения численного тестирования на решении $y_0(x) = \exp\left(4\sin x^2\right)$, $y_1(x) = \exp\left(5\sin x^2\right)$, $y_2(x) = \exp\left(\sin x^2\right)$, $y_3(x) = \cos\left(x^2\right)$, $y_4(x) = \sin\left(x^2\right) + 1$, все компоненты которого удовлетворяют начальным условиям $y_s(0) = 1$, $s = 0, 1, \dots, 4$, построена система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &y_0' = xy_3\left(y_1 y_2^{-1} + 7y_0\right) &&= f_0(x, y_0, y_1, y_2, y_3), \\ &y_1' = 10x\exp(5(y_4 - 1))y_3 &&= f_1(x, y_3, y_4), \\ &y_2' = 2xy_1^{\frac{1}{5}} y_3 + \frac{1}{4}\ln y_0 - y_4 + 1 &&= f_2(x, y_0, y_1, y_3, y_4), \\ &y_3' = -\frac{2}{5}x\ln\left(y_0 y_2\right) &&= f_3(x, y_0, y_2), \\ &y_4' = 2xy_0 y_1^{-1} y_2 y_3 &&= f_4(x, y_0, y_1, y_2, y_3), \\ &y_i(0) = 1, \quad i = 0, 1, \dots, 4. \end{aligned} \tag{36}$$

Тестовая задача (36) содержит все три группы уравнений полной канонической формы системы (1)–(3). Общая группа уравнений состоит из первого уравнения системы (36). Две пары последующих ее уравнений попадают соответственно в первую и вторую структурно выделенные группы.

Таблица 3. **Расчетная схема шестого порядка RKS6(4)[8,7,7]F интегрирования системы (1)–(3)**

$c_{0,w}$	$a_{00,w,g}$							$a_{01,w,g}$						$a_{02,w,g}$						$b_{0,w}$	$\hat{b}_{0,w}$
0	0							0						0						$\frac{7}{96}$	$\frac{1}{12}$
$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$							$\frac{2}{15}$						$\frac{2}{15}$						0	0
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$						$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$					$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$					$\frac{125}{672}$	$\frac{125}{672}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{11}{108}$	$\frac{-5}{36}$	$\frac{10}{27}$					$\frac{1}{18}$	$\frac{-5}{54}$	$\frac{10}{27}$				$\frac{1}{18}$	$\frac{5}{18}$	0				$\frac{27}{112}$	$\frac{3}{16}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{23}{54}$	$\frac{-5}{18}$	$\frac{-35}{54}$	$\frac{7}{6}$				$\frac{34}{81}$	$\frac{-5}{27}$	$\frac{-35}{27}$	$\frac{140}{81}$			$\frac{22}{45}$	$-\frac{25}{9}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{112}{45}$			$\frac{27}{112}$	$\frac{3}{7}$
$\frac{4}{5}$	$\frac{-83}{125}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{-189}{125}$	$\frac{72}{125}$			$\frac{-71}{150}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{286}{145}$	$\frac{-1064}{705}$	$\frac{27951}{68150}$		$\frac{-151}{250}$	$\frac{22}{5}$	$-\frac{126}{1625}$	$\frac{-416}{125}$	$\frac{1331}{3250}$		$\frac{125}{672}$	0
1	$\frac{23}{28}$	$-\frac{15}{28}$	$-\frac{80}{49}$	$\frac{108}{49}$	$-\frac{18}{49}$	$\frac{25}{49}$		$\frac{10}{21}$	$-\frac{5}{14}$	$-\frac{200}{203}$	$\frac{1360}{987}$	$\frac{1331}{2726}$	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{45}{14}$	$\frac{36}{455}$	$\frac{64}{21}$	$\frac{1331}{2730}$	0	$\frac{7}{96}$	$-\frac{7}{32}$
1	$\frac{7}{96}$	0	$\frac{125}{672}$	$\frac{27}{112}$	$\frac{27}{112}$	$\frac{125}{672}$	$\frac{7}{96}$	$\frac{23}{288}$	0	$\frac{125}{1392}$	$\frac{1000}{2961}$	$\frac{161051}{392544}$	$\frac{83}{1008}$	$\frac{13}{160}$	0	$\frac{81}{520}$	$\frac{256}{945}$	$\frac{161051}{393120}$	$\frac{89}{1080}$	0	$\frac{1}{3}$

$c_{1,w}$	$a_{10,w,g}$							$a_{11,w,g}$						$a_{12,w,g}$						$b_{1,w}$	$\hat{b}_{1,w}$
0	0							0						0						$\frac{23}{288}$	$\frac{1}{12}$
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$						$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$					$\frac{1}{5}$						0	0
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	0					$\frac{1}{10}$	0	$\frac{1}{10}$				$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$					$\frac{125}{1392}$	$\frac{25}{348}$
$\frac{3}{10}$	$\frac{69}{800}$	$\frac{-9}{160}$	$\frac{9}{32}$	$\frac{-9}{800}$				$\frac{1}{15}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{-1}{60}$			$\frac{27}{400}$	$\frac{39}{160}$	$\frac{-9}{800}$				$\frac{1000}{2961}$	$\frac{50}{141}$
$\frac{8}{11}$	$\frac{6118}{73205}$	$\frac{30}{1331}$	$\frac{7250}{102487}$	$\frac{26274}{73205}$	$\frac{98136}{512435}$			$\frac{3637}{23958}$	0	$\frac{-1340}{3993}$	$\frac{9280}{11979}$	$\frac{3}{22}$		$\frac{-47852}{73205}$	$\frac{195970}{14641}$	$\frac{516954}{73205}$	$\frac{-1395712}{73205}$			$\frac{161051}{392544}$	$\frac{6655}{16356}$
1	$\frac{101}{1660}$	$\frac{-15}{332}$	$\frac{25}{83}$	$\frac{87}{415}$	$\frac{9}{415}$	$\frac{75}{166}$		$\frac{-505}{2988}$	0	$\frac{20365}{14442}$	$\frac{-32320}{35109}$	$\frac{307461}{452516}$	0	$\frac{1601}{415}$	$\frac{-11255}{166}$	$\frac{-36555}{1079}$	$\frac{40448}{415}$	$\frac{14641}{10790}$		$\frac{83}{1008}$	0
1	$\frac{7}{96}$	0	$\frac{125}{672}$	$\frac{27}{112}$	$\frac{27}{112}$	$\frac{125}{672}$	$\frac{7}{96}$	$\frac{23}{288}$	0	$\frac{125}{1392}$	$\frac{1000}{2961}$	$\frac{161051}{392544}$	$\frac{83}{1008}$	$\frac{13}{160}$	0	$\frac{81}{520}$	$\frac{256}{945}$	$\frac{161051}{393120}$	$\frac{89}{1080}$	0	$\frac{1}{12}$

$c_{2,w}$	$a_{20,w,g}$							$a_{21,w,g}$						$a_{22,w,g}$						$b_{2,w}$	$\hat{b}_{2,w}$
0	0							0						0						$\frac{13}{160}$	$\frac{1}{12}$
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$						$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$					$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$					0	0
$\frac{1}{3}$	$\frac{11}{108}$	$\frac{-5}{36}$	$\frac{10}{27}$					$\frac{1}{18}$	$\frac{-5}{54}$	$\frac{10}{27}$				$\frac{1}{18}$	$\frac{5}{18}$	0				$\frac{81}{520}$	$\frac{9}{52}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{17}{256}$	$\frac{15}{256}$	$\frac{35}{256}$	$\frac{-3}{256}$				$\frac{49}{576}$	$\frac{5}{128}$	$\frac{55}{384}$	$\frac{-5}{288}$			$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{24}$	0	$\frac{-1}{24}$			$\frac{256}{945}$	$\frac{16}{63}$
$\frac{8}{11}$	$\frac{1214}{14641}$	$\frac{30}{1331}$	$\frac{1070}{14641}$	$\frac{5226}{14641}$	$\frac{2808}{14641}$			$\frac{329}{2178}$	$\frac{20}{1331}$	$\frac{-40240}{115797}$	$\frac{39520}{51183}$	$\frac{4095}{29986}$		$\frac{14093}{87846}$	$\frac{-27980}{43923}$	$\frac{4536}{14641}$	$\frac{33280}{43923}$	$\frac{3}{22}$		$\frac{161051}{393120}$	$\frac{1331}{3276}$
1	$\frac{11}{178}$	$\frac{-15}{356}$	$\frac{365}{1246}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{27}{1246}$	$\frac{1125}{2492}$		$\frac{-1067}{6408}$	$\frac{-5}{178}$	$\frac{11060}{7743}$	$\frac{-34360}{37647}$	$\frac{658845}{970456}$	0	$\frac{-407}{2136}$	$\frac{1045}{534}$	$\frac{-324}{1157}$	$\frac{-2176}{1869}$	$\frac{43923}{64792}$	0	$\frac{89}{1080}$	0
1	$\frac{7}{96}$	0	$\frac{125}{672}$	$\frac{27}{112}$	$\frac{27}{112}$	$\frac{125}{672}$	$\frac{7}{96}$	$\frac{23}{288}$	0	$\frac{125}{1392}$	$\frac{1000}{2961}$	$\frac{161051}{392544}$	$\frac{83}{1008}$	$\frac{13}{160}$	0	$\frac{81}{520}$	$\frac{256}{945}$	$\frac{161051}{393120}$	$\frac{89}{1080}$	0	$\frac{1}{12}$

Применение метода RKS6(4)[8,7,7]F для интегрирования системы (36) позволит уменьшить число обращений к процедуре вычисления правой части на единицу для $f_1, \ldots, f_4$ с сохранением порядка метода. Причем в этом случае проверку правильности найденных значений параметров метода проходят параметры всех девяти блоков A_{uv}.

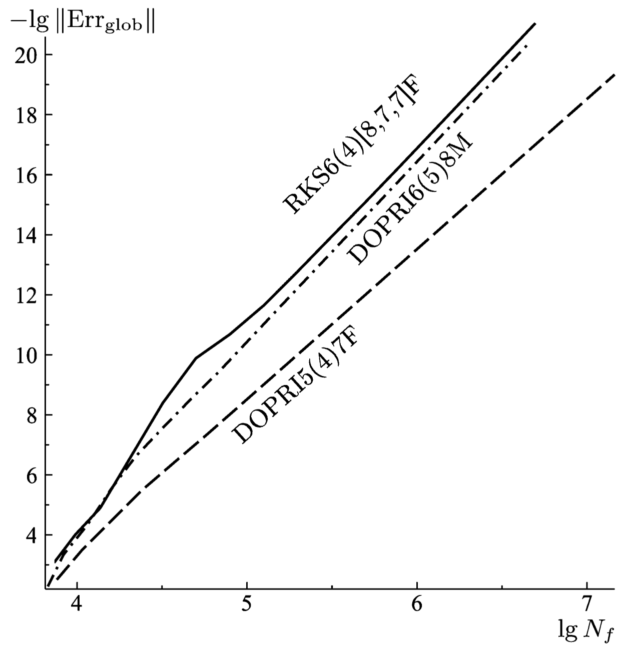

Рисунок. Зависимость нормы $\|\mathrm{Err}_{\mathrm{glob}}\|$ полной погрешности от общего количества обращений к процедурам вычисления правых частей N_f

На решении задачи Коши (36) при $x \in [0, 5]$, tol $\in [10^{-5}, 10^{-23}]$ сравнивали результаты применения наиболее известных [15, 16] методов DOPRI5(4)7F и DOPRI6(5)8M с представленной в табл. 3 расчетной схемой RKS6(4)[8,7,7]F.

Результаты сравнительного тестирования по критерию «общее количество вычислений правых частей (N_f) / глобальная погрешность$(\mathrm{Err}_{\mathrm{glob}})$» представлены на рисунке, на котором наклоны ломаных показывают, что для всех тестируемых методов зависимость глобальной погрешности $\mathrm{Err}_{\mathrm{glob}}$ от общего числа вычислений N_f правых частей отвечает заявленным порядкам. Предложенный здесь метод RKS6(4)[8,7,7]F в рассмотренном точностном диапозоне демонстрирует свои эффективность и конкурентоспособность.

7. Заключение. Таким образом, алгоритмическое использование структурных особенностей позволяет строить экономичные явные одношаговые методы шестого порядка с автоматическим выбором шага численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Литература

1. *Олемской И. В.* Алгоритм выделения структурных особенностей // Николай Ефимович Кирин: сб. ст. СПб.: НИИ Химии СПбГУ, 2003. С. 224–250.

2. *Олемской И. В.* Модификация алгоритма выделения структурных особенностей // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2006. Вып. 2. С. 55–64.

3. *Олемской И. В.* Методы интегрирования систем структурно разделенных дифференциальных уравнений. СПб.: Изд-во Санкт-Петербургского университета, 2009. 180 с.

4. *Олемской И. В.* Структурный подход в задаче конструирования явных одношаговых методов // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2003. Т. 43. № 7. С. 918–931.

5. *Butcher J. C.* On Runge — Kutta processes of high order // Journal of the Australian Mathematical Society. 1964. Vol. 4. P. 179–194.

6. *Hairer E., Nørsett S. P., Wanner G.* Solving ordinary differential equations. I: Nonstiff problems. 2^{nd} ed., 3^{rd} corr. print. Heidelberg; Berlin: Springer-Verlag, 2008. 528 p.

7. *Олемской И. В.* Четырехэтапный метод пятого порядка численного интегрирования систем специального вида // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2002. Т. 42. № 8. С. 1135–1145.

8. *Олемской И. В.* Вложенный метод пятого порядка типа Дормана — Принса // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2005. Т. 45. № 7. С. 1140–1150.

9. *Еремин А. С., Олемской И. В.* Вложенный метод интегрирования систем структурно разделенных обыкновенных дифференциальных уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2010. Т. 50. № 3. С. 434–448.

10. *Олемской И. В., Коврижных Н. А.* Семейство шестиэтапных методов шестого порядка // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2018. Т. 14. Вып. 3. С. 215–229. https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2018.303

11. *Eremin A. S., Kovrizhnykh N.A., Olemskoy I. V.* An explicit one-step multischeme sixth order method for systems of special structure // Applied Mathematics and Computation. 2019. Vol. 347. P. 853–864.

12. *Олемской И. В., Коврижных Н. А., Фирюлина О. С.* Двухпараметрическое семейство методов шестого порядка интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2019. Т. 15. Вып. 4. С. 502–517. https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2019.407

13. *Олемской И. В., Фирюлина О. С., Тумка О. А.* Семейства вложенных методов шестого порядка // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2022. Т. 18. Вып. 2. С. 285–296. https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2022.209

14. *Olemskoy I. V., Eremin A. S.* Algorithm of construction of effective explicit methods for structurally partitioned systems of ordinary differential equations // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2021. Т. 17. Вып. 4. С. 353–369. https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2021.404

15. *Dormand J. R., Prince P. J.* A family of embedded Runge — Kutta formulae // Journal of Computational and Applied Mathematics. 1980. Vol. 6. Iss. 1. P. 19–26.

16. *Dormand J. R., Prince P. J.* High order embedded Runge — Kutta formulae // Journal of Computational and Applied Mathematics. 1981. Vol. 7. Iss. 1. P. 67–75.

Статья поступила в редакцию 7 августа 2023 г.
Статья принята к печати 12 октября 2023 г.

Контактная информация:

Олемской Игорь Владимирович — д-р физ.-мат. наук, проф.; i.olemskoj@spbu.ru

Еремин Алексей Сергеевич — канд. физ.-мат. наук, доц.; a.eremin@spbu.ru

Фирюлина Оксана Сергеевна — канд. физ.-мат. наук, ст. преп.; o.firulina@spbu.ru

A nine-parametric family of embedded methods of sixth order*

I. V. Olemskoy, A. S. Eremin, O. S. Firuylina

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg,
199034, Russian Federation

* This work was founded by the Russian Science Foundation (project N 23-21-00027, https://rscf.ru/project/23-21-00027/)

For citation: Olemskoy I. V., Eremin A. S., Firyulina O. S. A nine-parametric family of embedded methods of sixth order. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2023, vol. 19, iss. 4, pp. 449–468.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.403 (In Russian)

In the paper an effective explicit Runge — Kutta type method of the sixth order with an embedded error estimator of order four is presented. The method is applied to the systems that can be structurally partitioned into three subsystems. Its computational scheme effectively uses the structural properties. However this leads to much larger systems of order conditions. These nonlinear conditions and the algorithm of finding a solution with nine free parameters are presented. A certain computational scheme is written down and a numerical comparison to Dormand — Prince pairs of orders 5 and 6 is performed.

Keywords: Runge — Kutta methods, partitioned systems, order conditions, simplifying conditions.

References

1. Olemskoy I. V. Algoritm vydeleniia strukturnykh osobennostei [An algorithm for finding the structural properties]. *Nikolai Efimovich Kirin.* Papers dedicated to the memory. St. Petersburg, Research Institute of Chemistry of St. Petesburg State University Publ., 2003, pp. 224–250. (In Russian)

2. Olemskoy I. V. Modifikatsiia algoritma vydeleniia strukturnykh osobennostei [Updating of algorithm of allocation structural features]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 10. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2006, iss. 2, pp. 55–64. (In Russian)

3. Olemskoy I. V. *Metody integrirovaniia sistem strukturno razdelennykh differentsial'nykh uravnenii* [*Integration of structurally partitioned systems of ordinary differential equations*]. St. Petersburg, St. Petersburg State University Press, 2009, 180 p. (In Russian)

4. Olemskoy I. V. Strukturnyi podkhod v zadache konstruirovaniia iavnykh odnoshagovykh metodov [Structural approach to the design of explicit one-stage methods]. *Comput Math. and Math. Phys.*, 2003, vol. 43, iss. 7, pp. 918–931. (In Russian)

5. Butcher J. C. On Runge — Kutta processes of high order. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 1964, vol. 4, pp. 179–194.

6. Hairer E., Nørsett S. P., Wanner G. *Solving ordinary differential equations. I: Nonstiff problems.* 2nd ed., 3rd corr. print. Heidelberg, Berlin, Springer-Verlag Press, 2008, 528 p.

7. Olemskoy I. V. Chetyrekhetapnyi metod piatogo poriadka chislennogo integrirovaniia sistem spetsial'nogo vida [Fifth-order four-stage method for numerical integration of special systems]. *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2002, vol. 42, iss. 8, pp. 1135–1145. (In Russian)

8. Olemskoy I. V. Vlozhennyi metod piatogo poriadka tipa Dormana — Prinsa [A fifth-order five-stage embedded method of the Dormand — Prince type]. *Comput Math. and Math. Phys.*, 2005, vol. 45, iss. 7, pp. 1140–1150. (In Russian)

9. Eremin A. S., Olemskoy I. V. Vlozhennyi metod integrirovaniia sistem strukturno razdelennykh obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii [An embedded method for integrating systems of structurally separated ordinary differential equations]. *Comput Math. and Math. Phys.*, 2010, vol. 50, iss. 3, pp. 434–448. (In Russian)

10. Olemskoy I. V., Kovrizhnykh N. A. Semeistvo shestietapnykh metodov shestogo poriadka [A family of sixth-order methods with six stages]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2018, vol. 14, iss. 3, pp. 215–229.
https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2018.303 (In Russian)

11. Eremin A. S., Kovrizhnykh N. A., Olemskoy I. V. An explicit one-step multischeme sixth order method for systems of special structure. *Applied Mathematics and Computation*, 2019, vol. 347, pp. 853–864.

12. Olemskoy I. V. Kovrizhnykh N. A, Firyulina O. S. Dvukhparametricheskoe semeistvo metodov shestogo poriadka integrirovaniia sistem obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii [Two-parametric family of sixth order numerical methods for solving systems of ordinary differential equations]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2019, vol. 15, iss. 4, pp. 502–517. https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2019.407 (In Russian)

13. Olemskoy I. V., Firyulina O. S., Tumka O. A. Semeistva vlozhennykh metodov shestogo poriadka [Families of embedded methods of order six]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2022, vol. 18, iss. 2, pp. 285–296.
https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2022.209 (In Russian)

14. Olemskoy I. V., Eremin A. S. Algorithm of construction of effective explicit methods for structurally partitioned systems of ordinary differential equations. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2021, vol. 17, iss. 4, pp. 353–369. https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2021.404

15. Dormand J. R., Prince P. J. A family of embedded Runge — Kutta formulae. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1980, vol. 6, iss. 1, pp. 19–26.

16. Dormand J. R., Prince P. J. High order embedded Runge — Kutta formulae. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1981, vol. 7, iss. 1, pp. 67–75.

Received: August 7, 2023.
Accepted: October 12, 2023.

Authors' information:

Igor V. Olemskoy — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; i.olemskoj@spbu.ru

Alexey S. Eremin — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor; a.eremin@spbu.ru

Oksana S. Firyulina — PhD in Physics and Mathematics, Senior Lecturer; o.firulina@spbu.ru