

## ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519.216.5  
MSC 65C05

**Аппроксимация супремумных и инфимумных процессов как стохастический подход к выполнению требований гомеостаза\***

*Г. И. Белявский, Н. В. Данилова, Г. А. Угольницкий*

Южный федеральный университет, Российская Федерация,  
344006, Ростов-на-Дону, ул. Большая Садовая, 105/42

**Для цитирования:** *Белявский Г. И., Данилова Н. В., Угольницкий Г. А.* Аппроксимация супремумных и инфимумных процессов как стохастический подход к выполнению требований гомеостаза // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2022. Т. 18. Вып. 1. С. 5–17.  
<https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2022.101>

Рассматривается вычисление ограниченных функционалов на траекториях стационарного диффузионного процесса. Поскольку аналитического решения данной задачи, как правило, не существует, то необходимо использовать численные методы. Одно из возможных направлений получения численного метода — это применение метода Монте-Карло (МК), который предполагает воспроизведение траектории случайного процесса с последующим усреднением по траекториям. Для упрощения воспроизведения траектории используется преобразование Гирсанова. Основная цель данной работы — аппроксимация супремумного и инфимумного процессов, позволяющая более точно по сравнению с классическим методом вычислить математическое ожидание функции, зависящей от значений супремумного и инфимумного процессов на конце временного интервала. Метод основывается на случайном разбиении интервала на оси времени моментами остановки — пассажами винеровского процесса, аппроксимации плотности для замены меры и использовании метода МК при вычислении математического ожидания. Одно из приложений метода — задача удержания случайного процесса в заданной области, т. е. задача гомеостаза.

*Ключевые слова:* диффузия, метод Монте-Карло, преобразование Гирсанова, гомеостаз.

**1. Введение.** Рассматривается вычисление ограниченных функционалов на траекториях стационарного диффузионного процесса, подчиняющегося стохастическому дифференциальному уравнению  $dX_t = f(X_t)dt + \varphi(X_t)dW_t$ , где коэффициент  $\varphi(x) > 0$ , на конечном интервале  $[0, T]$ , с начальным значением  $X_0$  и коэффициентами, удовлетворяющими стандартным условиям, например глобальному условию

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17-19-01038).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2022

Лишшица  $|f(x) - f(y)| + |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq L|x - y|$ , которые гарантируют существование и единственность сильного решения дифференциального уравнения. Решение уравнения обычно представляется следующим образом:

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(X_s)ds + \int_0^t \varphi(X_s)dW_s.$$

Первый интеграл в этой формуле — потраекторный интеграл Лебега, второй — интеграл Ито по винеровскому процессу. Если задать на оси времени точки разбиения  $t_i$  и применить формулу прямоугольников при вычислении интегралов, то приближенное решение в точках разбиения оси времени будет иметь вид

$$X_{t_i} = X_{t_{i-1}} + f(X_{t_{i-1}})(t_i - t_{i-1}) + \varphi(X_{t_{i-1}})\sqrt{t_i - t_{i-1}}\varepsilon_i,$$

в котором  $\varepsilon_i$  — это последовательность независимых стандартных нормальных случайных величин.

Во многих приложениях необходимо на траекториях решения вычислять математическое ожидание  $E\Psi(\bar{X}_T, \underline{X}_T)$  для ограниченной функции  $\Psi$ . Процессы  $\bar{X}$  и  $\underline{X}$  — супремумный и инфимумный процессы соответственно, т. е.  $\bar{X}_t = \sup_{s \leq t} X_s, \underline{X}_t = \inf_{s \leq t} X_s$ .

Пусть  $X_t$  — винеровский процесс и случайное время  $\tau$  распределено по показательному закону распределения с параметром  $\lambda$ . Для супремумного процесса случайная величина  $\bar{X}_\tau$  распределена по показательному закону распределения с параметром  $\sqrt{2\lambda}$ . Для инфимумного процесса случайная величина  $\underline{X}_\tau$  также распределена по показательному закону, но на отрицательной полуоси с тем же параметром. Аналогичным свойством, но с другими законами распределения обладают все процессы Леви. Можно привести еще один факт, связанный с супремумным процессом, свойственный винеровскому процессу, а именно, для произвольного  $t$  справедливо равенство  $P(\bar{X}_t \geq h) = 2(1 - \Phi(h/\sqrt{t}))$ . Одно из приложений рассматриваемой задачи — вычисление цен барьерных опционов в финансовой математике, другое — удержание случайного процесса в полосе в течение определенного времени в связи с гомеостазом. Одна из постановок этой задачи рассматривается в настоящей статье.

Поскольку аналитического решения задачи вычисления математического ожидания  $E\Psi(\bar{X}_T, \underline{X}_T)$  для ограниченной функции  $\Psi$ , как правило, не существует, то необходимо использовать численные методы. Одно из возможных направлений получения численного метода — это применение метода Монте-Карло (МК) [1, 2], который предполагает воспроизведение траектории решения уравнения, вычисление  $\Psi(\bar{X}_T, \underline{X}_T)$  с последующим усреднением по траекториям. Для упрощения воспроизведения решения используется преобразование Гирсанова [3], связанное с заменой меры при вычислении математического ожидания. Оно позволяет заменить исходное уравнение на два более простых уравнения:

$$dX_t = \varphi(X_t)dB_t, \quad dZ_t = Z_t \frac{f(X_t)}{\varphi(X_t)}dB_t \quad (1)$$

с заданным значением  $X_0$  и  $Z_0 = 1$ .

При определении математического ожидания производится такая замена меры:  $E^W \Psi(\bar{X}_T, \underline{X}_T) = E^B [Z_T \Psi(\bar{X}_T, \underline{X}_T)]$ . Мера  $P^B$  такова, что относительно нее дифференциал процесса  $B$ , т. е.  $dB_t = \frac{f(X_t)}{\varphi(X_t)}dt + dW_t$ , есть винеровский. Упрощение

исходного уравнения с помощью преобразования Гирсанова возможно при условии  $E^B Z_T = 1$ . Достаточным условием выполнения данного равенства является условие Новикова [4]:

$$E \exp \left( \frac{1}{2} \int_0^T \left( \frac{f(X_t)}{\varphi(X_t)} \right)^2 dt \right) < \infty.$$

При этом решение второго уравнения есть равномерно интегрируемый мартингал, поэтому  $E^B Z_T = 1$ . Очевидно, что условие Новикова выполняется, если функция  $f(x)/\varphi(x)$  ограниченная. Далее будем это предполагать.

Численные методы решения стохастического дифференциального уравнения предполагают воспроизведение траектории при помощи дискретного множества точек  $\{X_i^\delta: i = 1, 2, \dots, n\}$ , связанного с разбиением интервала  $[0, T]$  на  $n$  частей:  $0 = \tau_0 < \dots < \tau_n = T$  с  $\delta = \max(\tau_i - \tau_{i-1})$ , которые приближенно равны соответствующим точкам  $\{X_i: i = 1, 2, \dots, n\}$  на траектории решения дифференциального уравнения ( $X_i = X_{\tau_i}$ ). Полное изложение численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений можно найти в монографии [5]. Они в качестве своих прототипов имеют аналогичные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений, например метод Эйлера или метод Рунге — Кутты. При выполнении определенных условий относительно коэффициентов уравнения для численных методов гарантируется выполнение неравенства  $E |X_{\tau_i} - X_{\tau_i}^\delta| \leq C\delta^\gamma$ , константа  $C$  не зависит от  $\delta$ . Причем существует такое  $\delta_0$ , что данное неравенство выполняется для всех  $0 < \delta < \delta_0$ ,  $0 < \gamma < 1$  (подробнее см. [5]). Авторам неизвестно доказательство аналогичного неравенства для супремумного и инфимумного процессов, связанных с решением стохастического дифференциального уравнения.

Основная цель работы — аппроксимация супремумного и инфимумного процессов, позволяющая более точно по сравнению с классическим методом вычислить математическое ожидание  $E\Psi(\bar{X}_T, \underline{X}_T)$ . Метод основывается на случайном разбиении интервала на оси времени моментами остановки — пассажирами винеровского процесса, аппроксимации плотности замены меры  $Z_T$  — решения второго уравнения и применении метода МК при расчете математического ожидания.

Случайное разбиение временного интервала с помощью показательного закона распределения впервые было применено П. Карром [6] при вычислении справедливой цены американского опциона put. Затем в дальнейшем оно очень часто учитывалось в расчетах на моделях под управлением процессов Леви [7–9]. В данной работе описывается другое случайное разбиение. В работе [10] для этого внедряются пассажиры диффузионного процесса.

Важное приложение метода — задача удержания случайного процесса в заданной области, которое трактуется как поддержание гомеостаза. Если сложная динамическая система удовлетворяет условию гомеостаза, то система развивается устойчиво на протяжении времени ее функционирования. Математическое описание гомеостаза (живучести) приведено в [11]. Устойчивому управлению в связи с гомеостазом посвящена работа [12].

**2. Случайное разбиение и аппроксимация.** Наиболее подходящей для предлагаемого метода является модель, в которой локальная изменчивость — постоянная величина, т. е.  $\varphi(x) = \sigma$ . Поэтому дальнейшее изложение посвящено такому случаю с сознательной потерей общности результата.

Произведем равномерное разбиение фазовой оси  $OY = R$ . Выберем основной параметр алгоритма равным  $h$ . Для данного  $h$  шаг разбиения равен  $h\sigma$ , и будем счи-

татъ, что  $X_0 \in \{i\sigma h, i = 0, \pm 1, \dots\}$ . Произведем случайное разбиение интервала  $[0, T]$ . Зададим стохастический базис  $\langle \Omega, F_t^B, P^B \rangle$ , порождаемый винеровским процессом, в котором  $\Omega = C[0, T]$ ,  $F_t^B = \sigma(B_s, s \in [0, t])$ . Далее построим разбиение интервала  $[0, T]$  последовательностью моментов остановки относительно этого базиса, которая вычисляется следующим образом:  $\tau_0 = 0$ ,  $\tau_i = \min \{s \geq \tau_{i-1} : |B_s - B_{\tau_{i-1}}| = h\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Из строго марковского свойства винеровского процесса следует, что  $\tau_i = \tau_{i-1} + \nu_i$ , где  $\nu_i$  — независимые случайные величины с общим законом распределения, совпадающим с законом распределения случайной величины  $\nu = \min \{s \geq 0 : |B_s| = h\}$ . Плотность распределения этого закона имеет вид

$$p_\nu(t) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{h(1+2k)}{t} \varphi_t(h(1+2k)), \quad (2)$$

здесь  $\varphi_t(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{a^2}{2t}}$  (см. [13]). Отметим, что  $E\nu = h^2$ . Пусть  $n$  — единственное целое решение двойного неравенства  $nh^2 \leq T \leq (n+1)h^2$ . Отсюда  $0 \leq T - E\tau_n \leq h^2$ . Дисперсия  $D\nu = h^4$ , поэтому  $D\tau_n \leq h^2 T$ . Неравенство  $E(\tau_n - T)^2 = D\tau_n + (T - E\tau_n)^2 \leq h^2(T+1)$  очевидно. Следовательно, при  $h \rightarrow 0$   $\tau_n \rightarrow T$  в метрике  $L_2$ . Поскольку  $\tau_n$  — это сумма независимых и одинаково распределенных случайных величин с ограниченной дисперсией, то возможно применение центральной предельной теоремы в ее простейшем варианте. Ее следствием является следующее неравенство:  $|\tau_n - T| \leq (1 + k_\alpha)h^2$ , выполняющееся с доверительной вероятностью  $\alpha$ , где  $k_\alpha = \Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)$ ,  $\Phi^{-1}(x)$  — обратная функция Лапласа.

При постоянной изменчивости  $\sigma$  уравнение  $dX_t = \sigma dB_t$  имеет точное решение  $X_t = \sigma B_t$ . При случайном разбиении  $\tau$  рассмотрим последовательность точек

$$X_{\tau_i}^\tau = X_{\tau_{i-1}}^\tau + \sigma B_{\nu_i}^{(i)} \quad (3)$$

на траектории решения уравнения. В (3)  $B^{(i)}$  обозначает  $i$ -ю независимую копию винеровского процесса  $B$ . Здесь применено строго марковское свойство винеровского процесса, поэтому важно, чтобы случайное разбиение производилось моментами остановки. Из определения моментов остановки следует, что случайные величины  $B_{\nu_i}^{(i)} \in \{-h, h\}$  — независимые и одинаково распределенные случайные величины с вероятностями  $P(B_{\nu_i}^{(i)} = -h) = P(B_{\nu_i}^{(i)} = h) = \frac{1}{2}$ . Отсюда уравнение (3) можно представить следующим образом:

$$X_{\tau_i}^{\tau, \delta} = X_{\tau_{i-1}}^{\tau, \delta} + \sigma h \delta_i, \quad X_{\tau_0}^{\tau, \delta} = X_0,$$

где  $\delta$  — последовательность радемахеровских случайных величин. Для избранных разбиения и аппроксимации очевидно, что, во-первых,  $X_{\tau_i}^{\tau, \delta} \in \{j\sigma h, j = 0, \pm 1, \dots\}$ , если  $X_0 \in \{j\sigma h, j = 0, \pm 1, \dots\}$ ; во-вторых, выполняются неравенства  $X_{\tau_{i-1}}^{\tau, \delta} - \sigma h \leq \inf_{[\tau_{i-1}, \tau_i]} X_t, \sup_{[\tau_{i-1}, \tau_i]} X_t \leq X_{\tau_{i-1}}^{\tau, \delta} + \sigma h$ , причем одно из неравенств становится равенством, а другое — строгим неравенством в зависимости от значения  $\delta_i$ .

Из данных неравенств вытекает утверждение 1.

**Утверждение 1.** Если  $a \in \{i\sigma h, i = 0, \pm 1, \dots\}$ ,  $b \in \{i\sigma h, i = 0, \pm 1, \dots\}$ ,  $X_0 \in \{i\sigma h, i = 0, \pm 1, \dots\}$ ,  $a < X_0 < b$ , то справедливо равенство индикаторов:

$$I_{\{(\bar{X}_{\tau_n} \geq b) \vee (\underline{X}_{\tau_n} \leq a)\}} = I_{\{(\bar{X}_{\tau_n}^{\tau, \delta} \geq b) \vee (\underline{X}_{\tau_n}^{\tau, \delta} \leq a)\}}.$$

Рассмотрим класс функций следующего вида:

$$\Psi(x, y) = \sum_{k=1}^m \psi_k I_{\{(x \geq b_k) \vee (y \leq a_k)\}}.$$

Набор чисел упорядочен таким образом:  $a_n < a_{n-1} < \dots < a_1 < b_1 < b_2 < \dots < b_n$ , коэффициенты  $\psi_i \geq 0$ . Очевидно, что утверждение 1 распространяется на данный класс функций.

**Утверждение 2.** Если  $a_k \in \{i\sigma h, i = 0, \pm 1, \dots\}$ ,  $b_k \in \{i\sigma h, i = 0, \pm 1, \dots\}$ ,  $X_0 \in \{i\sigma h, i = 0, \pm 1, \dots\}$ ,  $a_1 < X_0 < b_1$ , то справедливо равенство

$$\Psi(\bar{X}_{\tau_n}, \underline{X}_{\tau_n}) = \Psi(\bar{X}_{\tau_n}^{\tau, \delta}, \underline{X}_{\tau_n}^{\tau, \delta}).$$

Если  $\Psi(x, y) = I_{\{(x \geq b) \vee (y \leq a)\}}$ , то  $E\Psi(\bar{X}_T, \underline{X}_T)$  — вероятность выхода случайного процесса из полосы.

**Замечание 1.** В задаче о гомеостазе коэффициенты  $\psi_k$  — приращение штрафа, а  $E\Psi(\bar{X}_T, \underline{X}_T)$  — средний штраф за выход из полосы.

Если остановимся на таком классе функций, то единственным источником ошибки при вычислении математического ожидания является преобразование Гирсанова. Для процесса плотности преобразования Гирсанова справедливо второе уравнение из (1), которое с учетом постоянства волатильности приобретает вид

$$dZ_t = \frac{1}{\sigma} Z_t f(\sigma B_t) dB_t,$$

для приближенного преобразования Гирсанова следует рассматривать последовательность дифференциальных уравнений  $d\bar{Z}_t = \frac{1}{\sigma} \bar{Z}_t f(\sigma B_{\tau_{i-1}}) dB_t$ ,  $\tau_{i-1} \leq t < \tau_i$  с начальными значениями  $\bar{Z}_{\tau_{i-1}}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Оценим разность между  $Z_{\tau_n} \Psi(\bar{X}_{\tau_n}, \underline{X}_{\tau_n})$  и  $\bar{Z}_{\tau_n} \Psi(\bar{X}_{\tau_n}^{\delta, \tau}, \underline{X}_{\tau_n}^{\delta, \tau})$ :

$$\begin{aligned} Z_{\tau_n} \Psi(\bar{X}_{\tau_n}, \underline{X}_{\tau_n}) - \bar{Z}_{\tau_n} \Psi(\bar{X}_{\tau_n}^{\delta, \tau}, \underline{X}_{\tau_n}^{\delta, \tau}) &= \left( \frac{Z_{\tau_n}}{\bar{Z}_{\tau_n}} - 1 \right) \bar{Z}_{\tau_n} \Psi(\bar{X}_{\tau_n}^{\delta, \tau}, \underline{X}_{\tau_n}^{\delta, \tau}) = \\ &= (\exp(\Delta(\tau_0 = 0, \tau_1, \dots, \tau_n)) - 1) \bar{Z}_{\tau_n} \Psi(\bar{X}_{\tau_n}^{\delta, \tau}, \underline{X}_{\tau_n}^{\delta, \tau}). \end{aligned}$$

Для случайной величины

$$\begin{aligned} \Delta(\tau_0 = 0, \tau_1, \dots, \tau_n) &= -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} (f^2(\sigma B_s) - f^2(\sigma B_{\tau_{i-1}})) ds + \\ &+ \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} (f(\sigma B_s) - f(\sigma B_{\tau_{i-1}})) dB_s \end{aligned}$$

справедлива оценка

$$|\Delta(\tau_0 = 0, \tau_1, \dots, \tau_n)| \leq \frac{1}{\sigma} M L h \tau_n + \frac{1}{\sigma} \left| \sum_{i=1}^n \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} (f(\sigma B_s) - f(\sigma B_{\tau_{i-1}})) dB_s \right|.$$

Здесь  $M = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$ ,  $L$  — константа Липшица. Рассмотрим случайную величину

$\sum_{i=1}^n \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} (f(\sigma B_s) - f(\sigma B_{\tau_{i-1}})) dB_s$ , которая является суммой независимых случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями и ограниченными дисперсиями:

$$D \left[ \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} (f(\sigma B_s) - f(\sigma B_{\tau_{i-1}})) dB_s \right] \leq L\sigma h^3.$$

Использование центральной предельной теоремы для суммы независимых случайных величин с равномерно ограниченными дисперсиями приводит к неравенству

$$|\Delta(\tau_0 = 0, \tau_1, \dots, \tau_n)| \leq \frac{1}{\sigma} MLh (T + (1 + k_\alpha)h^2) + k_\beta \sqrt{\frac{LhT}{\sigma}}, \quad (4)$$

коэффициент  $k_\beta$  соответствует доверительной вероятности  $\beta$  и вычисляется так же, как коэффициент  $k_\alpha$ . Неравенство (4) выполняется с доверительной вероятностью  $\alpha\beta$ .

Таким образом, абсолютную величину ошибки, возникающей при вычислении математического ожидания, запишем в виде

$$\begin{aligned} & \left| E \left[ Z_{\tau_n} \Psi(\bar{X}_{\tau_n}, \underline{X}_{\tau_n}) - \bar{Z}_{\tau_n} \Psi(\bar{X}_{\tau_n}^{\tau, \delta}, \underline{X}_{\tau_n}^{\tau, \delta}) \right] \right| \leq \\ & \leq E \left| Z_{\tau_n} \Psi(\bar{X}_{\tau_n}, \underline{X}_{\tau_n}) - \bar{Z}_{\tau_n} \Psi(\bar{X}_{\tau_n}^{\tau, \delta}, \underline{X}_{\tau_n}^{\tau, \delta}) \right| \leq \\ & \leq E \left[ \exp(\Delta(\tau_0 = 0, \tau_1, \dots, \tau_n)) - 1 \mid \bar{Z}_{\tau_n} \Psi(\bar{X}_{\tau_n}^{\tau, \delta}, \underline{X}_{\tau_n}^{\tau, \delta}) \right] \leq \\ & \leq \frac{2|\Delta(\cdot)|}{2 - |\Delta(\cdot)|} E \bar{Z}_{\tau_n} \Psi(\bar{X}_{\tau_n}^{\tau, \delta}, \underline{X}_{\tau_n}^{\tau, \delta}) \leq \frac{2 \sum_{i=1}^m \psi_i}{2 - \varepsilon} \varepsilon \end{aligned}$$

при следующем условии:  $h$  выбрано таким образом, что  $|\Delta(\cdot)| \leq \varepsilon < \frac{1}{2}$  с доверительной вероятностью  $\alpha\beta$ .

Таким образом, доказано

**Утверждение 3 (Гарантированная ошибка).** Если функция  $f(x)$  удовлетворяет условию Липшица и ограничена, то с заданной доверительной вероятностью абсолютная величина ошибки при вычислении вероятности невыхода случайного процесса из полосы может быть меньше любого наперед заданного положительного числа за счет выбора основного параметра алгоритма —  $h$ .

**3. Генератор моментов остановки.** Важным элементом алгоритма является генератор моментов остановки с использованием плотности из  $p_\nu(t)$  из (2). В виде ряда можно получить и функцию распределения

$$F_\nu(t) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left( 1 - \Phi \left( \frac{h(1 + 2k)}{\sqrt{t}} \right) \right),$$

в которой  $\Phi(x)$  — функция Лапласа. Универсальный метод генерации случайной величины с известной функцией распределения, как в рассматриваемом случае, связан с обращением функции распределения  $\nu = F_\nu^{-1}(U)$ , где  $U$  — равномерная на интервале  $[0, 1]$  случайная величина. Поскольку данный способ генерации потребует больших

вычислительных затрат, то будем использовать более вычислительно эффективный метод — **acceptance-rejection sampling algorithm** (см., например, [14]). Метод заключается в следующем. Исходная плотность  $f(x)$  приближается сверху более простой плотностью  $g(x)$ :  $f(x) < Mg(x)$  с константой  $M > 1$ . Генерируются случайная величина  $X$  с плотностью  $g(x)$  и равномерная на интервале  $[0, 1]$  случайная величина  $U$ . Если  $U < \frac{f(X)}{Mg(X)}$ , то возвращаем  $X$ , иначе повторяем заново.

Для плотности из (2) справедливо неравенство  $p_\nu(t) \leq 2\frac{h}{t}\varphi_t(h)$ . Функция распределения для плотности  $\frac{h}{t}\varphi_t(h)$  имеет вид  $F_\nu(t) = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{h}{\sqrt{t}}\right)\right)$ . Вероятность выполнения неравенства  $P\left(U < \frac{f(X)}{Mg(X)}\right) = \frac{1}{M}$ . Для данного случая  $P\left(U < \frac{f(X)}{2g(X)}\right) = \frac{1}{2}$ . Следовательно, чтобы получить момент остановки, необходимо сгенерировать два равномерно распределенных на интервале  $[0, 1]$  случайных числа —  $U_1$  и  $U_2$ , вычислить случайную величину  $X = \left(\frac{h}{\Phi^{-1}\left(1 - \frac{U_2}{2}\right)}\right)^2$  и проверить неравенство  $U_1 < \frac{Xp_\nu(X)}{2h\psi_X(h)}$ , при выполнении которого случайная величина  $\nu = X$ . Причем среднее число повторений равно двум.

Эффективность этого метода иллюстрирует рис. 1. На нем представлены эмпирическая и реальная плотности распределения случайной величины  $\nu - p_\nu(t)$  из (2). Объем выборки равен 10 000.

Таким образом,

$$EZ_{\tau_n}^{\tau, \delta} \Psi\left(\bar{X}_{\tau_n}^{\tau, \delta}, \underline{X}_{\tau_n}^{\tau, \delta}\right) \approx \frac{1}{MN} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M Z_{\tau_j^i}^{\tau^i, \delta^j} \Psi\left(\bar{X}_{\tau_n^i}^{\tau^i, \delta^j}, \underline{X}_{\tau_n^i}^{\tau^i, \delta^j}\right). \quad (5)$$

**4. Процесс Орнштейна — Уленбека и задача сохранения гомеостаза.** Опишем управляемый марковский процесс

$$dX_t = U(X_t) dt + \sigma dW_t$$

с начальным значением  $X_0 = m$ ,  $t \in [0, T]$ , управление  $U$  — обратная связь по фазовой переменной.

Опишем линейный регулятор [15] следующего вида:  $U(x) = -\alpha(x - m)$ . Задача заключается в выборе наименьшего значения для  $\alpha$ , при котором средний штраф за выход из полосы  $|x - m| < \eta$ ,  $t \leq T$ :  $E\Psi(\bar{X}_T, \underline{X}_T) \leq \gamma$ . Очевидно, что данная задача эквивалентна задаче

$$\begin{aligned} \min \alpha dX_t &= -\alpha X_t dt + \sigma dW_t, \quad X_0 = 0, \\ E\Psi(\bar{X}_T, \underline{X}_T) &\leq \gamma. \end{aligned} \quad (6)$$

Решением стохастического дифференциального уравнения из (6) служит процесс Орнштейна — Уленбека — нестационарный гауссовский процесс с нулевым средним, ковариационной функцией  $C(s, t, \alpha) = \frac{\sigma^2 \exp(-\alpha(t+s))}{2\alpha} [\exp(2\alpha \min(t, s)) - 1]$  и дисперсией  $DX_t = \frac{\sigma^2}{2\alpha} [1 - \exp(-2\alpha t)]$ . Аналитического решения задачи не существует

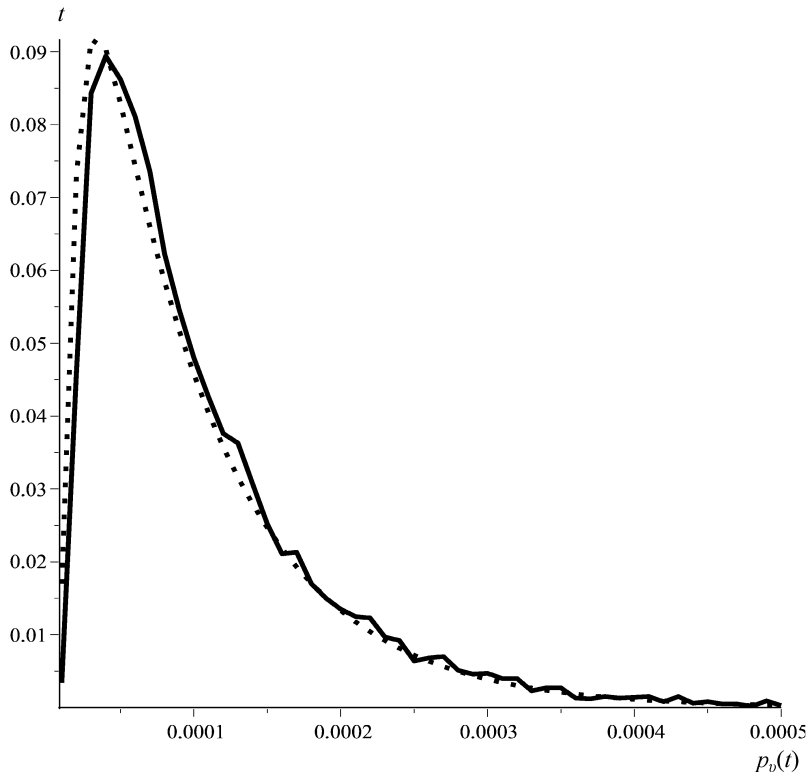


Рис. 1. Эмпирическая (сплошная линия) и реальная (точечная линия) плотности закона распределения случайной величины  $\nu$

В методе МК математическое ожидание заменяется выборочным средним. Выборка в данном случае состоит из независимых элементов  $\{(\nu^i, \delta^j)\}$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $j = 1, \dots, M$ .

из-за сложного ограничения. Остается выбор подходящего значения  $\alpha$  из конечного множества значений. Для вычисления среднего можно использовать метод МК, альтернативой которому служит один из численных методов решения дифференциального уравнения в частных производных. Для рассматриваемой задачи необходимо решить  $m$  дифференциальных уравнений, каждое из которых имеет следующий вид:

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \alpha x \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} V(t, b_k) = V(t, a_k) = \psi_k, \quad 0 \leq t < T, \\ V(T, x) = 0, \quad -a_k \leq x \leq b_k. \end{aligned} \quad (7)$$

Если  $V_k^*(t, x)$  — решение уравнения, то искомое математическое ожидание  $E\Psi(\bar{X}_T, \underline{X}_T) = \sum_{k=1}^m V_k^*(0, 0)$ . Рисунок 2 иллюстрирует результаты вычислений для различных  $\alpha$ . Точечная кривая получена методом МК, сплошная — результат решения дифференциального уравнения. В этом примере  $m = 1$ ,  $a = -b$ ,  $\psi_1 = 1$ . Здесь оба численных метода демонстрируют хорошее совпадение для широкого диапазона значений управляющего параметра  $\alpha$ , который изменяется от 0.1 до 7 с шагом



0.1. Среднее различие приблизительно равнялось 0.006. Объем вычислений в обоих методах сопоставим.

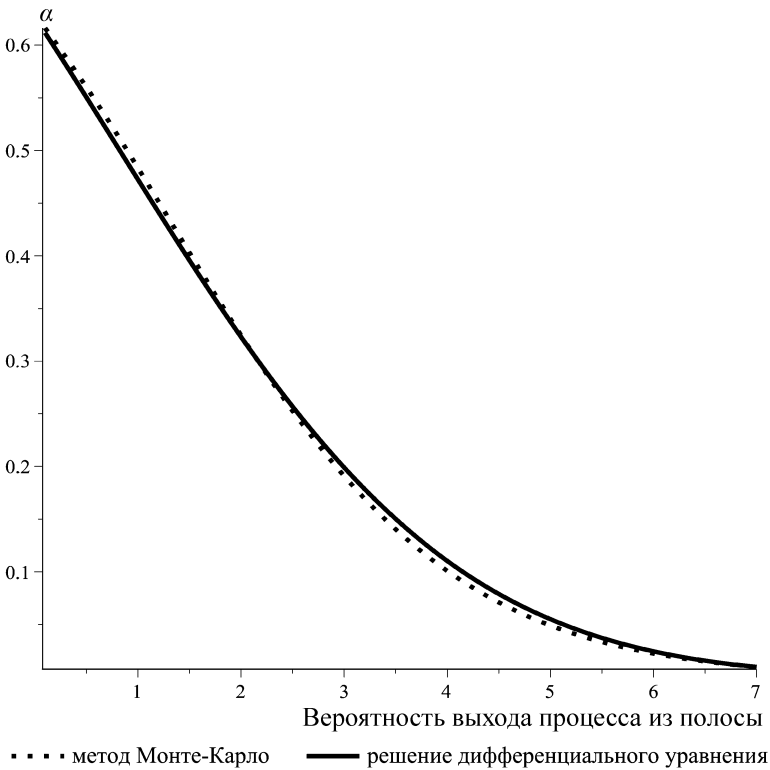


Рис. 2. Вероятность выхода процесса из полосы (исходные данные:  $b = 0.1, h = 0.1, n = 100, \sigma = 0.1, N = 100, M = 25$ )

В следующем примере вычислялся средний штраф. Число слагаемых в этом примере равно двум,  $a_2 = -2b, a_1 = -b, b_1 = b, b_2 = 2b, \psi_1 = \psi_2 = 1$ . Результат представлен на рис. 3. Кривая получена методом МК.

Среднее различие между альтернативными вычислениями приблизительно равно 0.008. Погрешность при вычислении методом МК не изменяется, при численном решении двух дифференциальных уравнений с последующим сложением двух результатов незначительно, но увеличивается, так как возрос штраф за счет добавления слагаемого. С ростом  $\alpha$  разница уменьшается, поскольку вероятность выхода из полосы стремится к нулю, а это, в свою очередь, инициирует стремление к нулю штрафа. Объем вычислений в методе МК при решении данной задачи не изменяется по сравнению с объемом вычислений предыдущей задачи (добавляются несколько условных операторов). В альтернативном методе объем вычислений увеличивается кратно.

Несколько слов об исходной задаче. На обоих графиках наблюдается монотонное стремление к нулю штрафа с ростом  $\alpha$ . Авторам не известно строгое доказательство этого факта для процесса Орнштейна—Уленбека. В свою очередь, монотонное стремление к нулю штрафа позволяет однозначно выбрать оптимальное значение для параметра.

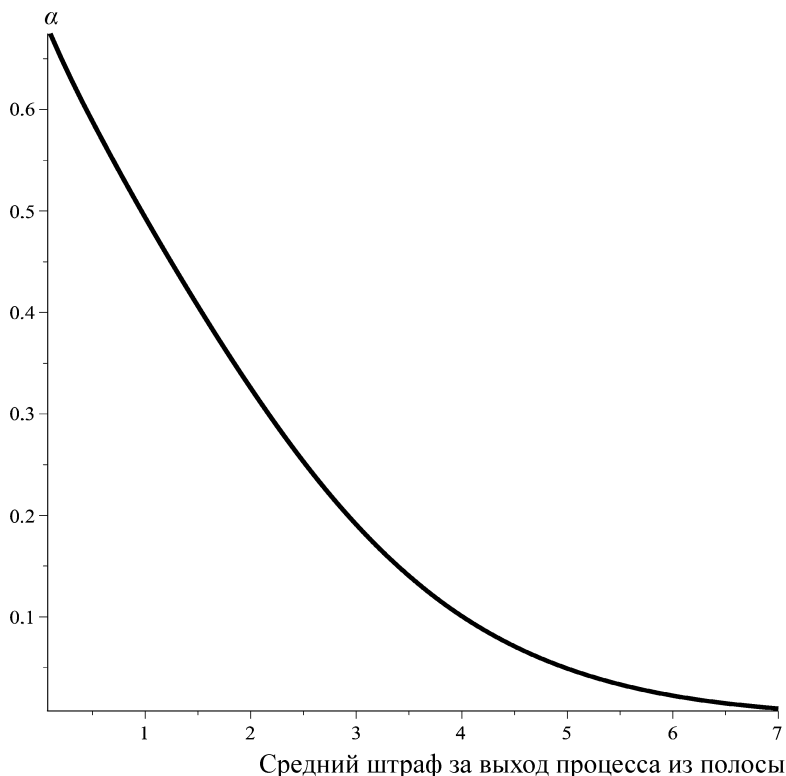


Рис. 3. Изменение среднего штрафа в зависимости от  $\alpha$  (исходные данные:  $b = 0.1, h = 0.1, n = 100, \sigma = 0.1, N = 100, M = 25$ )

**Замечание 2.** В связи с неограниченностью коэффициента  $\alpha x$  в уравнении (7) требуется дополнительное разъяснение. Отметим, что функция  $\alpha x$  ограничена на любом компакте. Рассмотрим интервал  $[-A, A]$ , момент остановки  $\tau = \inf\{t: X_t \notin [-A, A]\}$  и остановленный процесс  $X_t^\tau = X_{t \wedge \tau}$ . Выбором  $A$  можно добиться того, что вероятность  $P(\tau > 1)$  будет близка к единице.

**Замечание 3.** Эксперименты проводились с различными значениями параметров модели и шагом разбиения. Поскольку результаты оказались сопоставимыми, то ограничимся одним из них, чтобы не увеличивать объем статьи.

**5. Сравнение с другими методами.** Сравнение произведено с классическим методом МК (в приведенной таблице обозначается КМК), с методом МК из работы [10], в котором также используются случайное разбиение и преобразование Винера — Хопфа (обозначается ВМК), и встроенным в MAPLE численным методом решения дифференциального уравнения (ДУ). Сравнение производится по показателям, обозначающим строки таблицы.

Прокомментируем знак «+» в последней строке и последнем столбце. Основная вычислительная сложность метода связана с определением выборки. В случаях, когда расчеты производятся для нескольких значений параметров модели, выборка генерируется один раз. Сама же формула (5) не требует больших вычислительных затрат. Для реализации одной итерации требуются выполнение  $2n$  сложений ( $n$  — число случайных точек разбиения),  $m$  логических операций ( $m$  — число слагаемых штрафа),

Таблица. Сравнение разных методов МК

Показатель	КМК	ВМК	ДУ
Универсальность	–	–	–
Оценка погрешности	+	+	±
Вычислительная сложность	–	±	+

Примечание. Знак «+» означает преимущество представленного метода над альтернативным, знак «–» — альтернативного метода над представленным, знак «±» — сопоставимость этих методов. Знак «–» во всех столбцах первой строки таблицы означает, что предлагаемый метод предполагается использовать в моделях с постоянной локальной волатильностью. Для остальных методов этот факт не является принципиальным.

вычисление одной экспоненты. Число дифференциальных уравнений, которые необходимо решить, равно произведению числа слагаемых штрафа на число значений параметров модели. Еще раз подчеркнем, что для описываемого класса задач в КМК отсутствует какая-либо оценка погрешности, связанной с аппроксимацией процессов максимума и минимума.

**6. Заключение.** Предложен новый метод аппроксимации инфимумного и супремумного процессов для диффузионного процесса. Аппроксимация пригодна для решения описываемого класса задач, относящихся к гомеостазу. Получена оценка погрешности при вычислении среднего штрафа за выход процесса из полосы. Решена задача удержания процесса Орнштейна — Уленбека в заданной полосе. Проведен ряд экспериментов, иллюстрирующих работу алгоритма. Удержание случайного процесса в полосе трактуется как стохастическое требование гомеостаза динамической системы, представляющего собой необходимое условие ее устойчивого развития.

## Литература

1. *Fishman G.* Monte-Carlo: concepts, algorithms and applications. New York: Springer, 1995. 722 p.
2. *Kudryavtsev O.* Approximate Wiener — Hopf factorization and Monte-Carlo methods for Levy processes // Probability Theory and its Applications. 2019. Vol. 64(2). P. 186–208.
3. *Girsanov I.* On the transformation of a class of random processes using a completely continuous measure replacement // Probability Theory and its Applications. 1960. Vol. 5. P. 314–330.
4. *Новиков А.* Об одном тождестве для стохастических интегралов // Теория вероятностей и ее применения. 1972. № 4. С. 761–765.
5. *Kloeden P., Platen E.* Numerical solution of stochastic differential equations. New York: Springer, 1995. 632 p.
6. *Carr P.* Randomization and American put // Rev. Financ. Stud. 1996. N 11. P. 597–626.
7. *Kuznetsov A., Kyprianou A. E., Pardo J. C., van Schaik K.* A Wiener — Hopf Monte-Carlo simulation technique for Lévy processes // Ann. Appl. Prob. 2011. N 21. P. 2171–2190.
8. *Ferreiro-Castilla A., Kyprianou A. E., Scheichl R., Suryanarayana G.* Multilevel Monte-Carlo simulation for Lévy processes based on the Wiener — Hopf factorization // Stoch. Process. Appl. 2014. N 124. P. 985–1010.
9. *Beliaevsky G., Danilova N., Ougolnitsky G.* Calculation of probability of the exit of a stochastic process from a band by Monte-Carlo method: A Wiener — Hopf factorization // Mathematics. 2019. N 7. P. 581–597.
10. *Beliaevsky G. I., Danilova N. V.* The combined Monte-Carlo method to calculate the capital of the optimal portfolio in nonlinear models of financial indexes // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2014. N 11. P. 1021–1034.
11. *Aubin J.-P.* Viability theory. New York, USA: Springer-Verlag, 1991. 342 p.
12. *Ougolnitsky G.* Sustainable management. New York, USA: Nova Science Publ. Hauppauge, 2011. 287 p.
13. *Ширяев А. Н.* О мартингалных методах в задачах о пересечении границ броуновским движением // Современные проблемы математики. 2007. Вып. 8. С. 3–78.
14. *Casella G., Robert C. P., Wells M. T.* Generalized accept-reject sampling schemes // Institute of Mathematical Statistics. 2004. P. 342–347.

15. Камачкин А. М., Степенко Н. А., Хитров Г. М. К теории конструктивного построения линейного регулятора // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2020. Т. 16. Вып. 3. С. 326–344. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2020.309>

Статья поступила в редакцию 3 июня 2021 г.

Статья принята к печати 1 февраля 2022 г.

Контактная информация:

Белявский Григорий Исаакович — д-р техн. наук, проф.; [gbelyavski@sfedu.ru](mailto:gbelyavski@sfedu.ru)

Данилова Наталья Викторовна — канд. физ.-мат. наук, доц.; [nvdanilova@sfedu.ru](mailto:nvdanilova@sfedu.ru)

Угольниковский Геннадий Анатольевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; [gaugolnickiy@sfedu.ru](mailto:gaugolnickiy@sfedu.ru)

## Approximation of supremum and infimum processes as a stochastic approach to the providing of homeostasis\*

G. I. Beliaevsky, N. V. Danilova, G. A. Ougolnitsky

Southern Federal University, 105/42, Bolshaya Sadovaya ul., Rostov-on-Don, 344006, Russian Federation

**For citation:** Beliaevsky G. I., Danilova N. V., Ougolnitsky G. A. Approximation of supremum and infimum processes as a stochastic approach to the providing of homeostasis. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2022, vol. 18, iss. 1, pp. 5–17. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2022.101> (In Russian)

We consider the calculation of bounded functional of the trajectories of a stationary diffusion process. Since an analytical solution to this problem does not exist, it is necessary to use numerical methods. One possible direction for obtaining the numerical method is applying the Monte Carlo (MC) method. This involves reproducing the trajectory of a random process with subsequent averaging over the trajectories. To simplify the reproduction of the trajectory, the Girsanov transform is used in this paper. The main goal is to approximate the supremum and infimum processes, which allows us to more accurately compute the mathematical expectation of a function depending on the values of the supremum and infimum processes at the end of the time interval compared to the classical method. The method is based on randomly dividing the interval of the time axis by stopping times passages of the Wiener process, approximating the density to replace the measure, and using the MC method to calculate the expectation. One of the applications of the method is the task of keeping a random process in a given area — the problem of homeostasis.

*Keywords:* diffusion, Monte-Carlo method, Girsanov transform, homeostasis.

## References

1. Fishman G. *Monte-Carlo: concepts, algorithms and applications*. New York, Springer Publ., 1995, 722 p.
2. Kudryavtsev O. Approximate Wiener—Hopf factorization and Monte-Carlo methods for Levy processes. *Probability Theory and its Applications*, 2019, vol. 64(2), pp. 186–208.
3. Girsanov I. On the transformation of a class of random processes using a completely continuous measure replacement. *Probability Theory and its Applications*, 1960, vol. 5, pp. 314–330.
4. Novikov A. Ob odnom tozhdestve dlia stokhasticheskikh integralov [On one identity for stochastic integrals]. *Teoriia veroiatnoستي i ee primeneniia [Probability Theory and its Applications]*, 1972, no. 4, pp. 761–765. (In Russian)

\* This work was supported by Russian Science Foundation (project N 17-19-01038).

5. Kloeden P., Platen E. *Numerical solution of stochastic differential equations*. New York, Springer Publ., 1995, 632 p.
6. Carr P. Randomization and American put. *Rev. Financ. Stud.*, 1996, no. 11, pp. 597–626.
7. Kuznetsov A., Kyprianou A. E., Pardo J. C., van Schaik K. A Wiener–Hopf Monte-Carlo simulation technique for Lévy processes. *Ann. Appl. Prob.*, 2011, no. 21, pp. 2171–2190.
8. Ferreiro-Castilla A., Kyprianou A. E., Scheichl R., Suryanarayana G. Multilevel Monte-Carlo simulation for Lévy processes based on the Wiener–Hopf factorization. *Stoch. Process. Appl.*, 2014, no. 124, pp. 985–1010.
9. Beliaevsky G., Danilova N., Ougolnitsky G. Calculation of probability of the exit of a stochastic process from a band by Monte-Carlo method: A Wiener–Hopf factorization. *Mathematics*, 2019, no. 7, pp. 581–597.
10. Beliaevsky G. I., Danilova N. V. The combined Monte-Carlo method to calculate the capital of the optimal portfolio in nonlinear models of financial indexes. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2014, no. 11, pp. 1021–1034.
11. Aubin J.-P. *Viability theory*. New York, USA, Springer-Verlag Publ., 1991, 342 p.
12. Ougolnitsky G. *Sustainable management*. New York, USA, Nova Science Publ., Hauppauge, 2011, 287 p.
13. Shiryayev A. N. O martingal'nykh metodakh v zadachakh o peresechenii granits brounovskim dvizheniem [On martingale methods in problems of boundary crossing by Brownian motion]. *Sovremennye problemy matematiki [Modern mathematics problems]*, 2007, iss. 8, pp. 3–78. (In Russian)
14. Casella G., Robert C. P., Wells M. T. Generalized accept-reject sampling schemes. *Institute of Mathematical Statistics*, 2004, pp. 342–347.
15. Kamchatkin A. M., Stepenko N. A., Chitrov G. M. K teorii konstruktivnogo postroeniia lineinogo regulatora [On the theory of constructive construction of a linear regulator]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Sciences. Control Processes*, 2020, vol. 16, iss. 3, pp. 326–344. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2020.309> (In Russian)

Received: June 03, 2021.

Accepted: February 01, 2022.

#### A u t h o r s ' i n f o r m a t i o n :

*Grigory I. Beliaevsky* — Dr. Sci. in Technics, Professor; gbelyavski@sfnu.ru

*Natalia V. Danilova* — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor; nvdanilova@sfnu.ru

*Gennady A. Ougolnitsky* — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; gaugolnickiy@sfnu.ru