УДК 517.977.1 Вестник СПбГУ. Прикладная математика. Информатика... 2024. Т. 20. Вып. 1
MSC 37N35

Математическое и компьютерное моделирование автоматического управления при наличии возмущений*

М. Н. Смирнов, М. А. Смирнова

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Смирнов М. Н., Смирнова М. А.* Математическое и компьютерное моделирование автоматического управления при наличии возмущений // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2024. Т. 20. Вып. 1. С. 109–116. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2024.109

К важнейшим задачам системы автоматического управления движением в реальных условиях функционирования относится компенсация влияния действующих на объект возмущений с учетом особенностей его динамики. В статье представлен метод вычисления коэффициентов автоматического управления, обеспечивающий минимум размера множества реакций на недетерминированные внешние воздействия, ограниченные по норме, и необходимое расположение корней характеристического полинома системы, замкнутой таким управлением. Указанный алгоритм реализован в MATLAB и протестирован на примере конкретного морского судна.

Ключевые слова: управление, компьютерное моделирование, возмущение.

1. Введение. Автоматические системы управления все чаще используются в современном мире. Их применяют не только на беспилотных аппаратах, но и на подвижных объектах, пилотируемых человеком. Это необходимо для обеспечения более эффективного и безопасного движения. К важнейшим задачам системы автоматического управления движением в реальных условиях функционирования относится компенсация влияния действующих на объект возмущений с учетом особенностей его динамики. В связи с этим возникают различные задачи [1–7], касающиеся проектирования систем автоматического управления движением, а именно: задачи минимизации времени совершения маневра и расхода топлива, задачи построения оптимальных траекторий движения, проблемы нивелирования внешних воздействий, порождаемых порывами ветра, волнением моря и другими внешними факторами. В литературе представлены различные варианты постановок таких задач [8–15]. Особой проработки требует случай, когда воздействия не являются детерминированными, и система управления должна не только нивелировать их, но и обеспечить выполнение дополнительных требований к качеству динамических процессов. Такая постановка задачи значительно затрудняет формирование системы управления, подавляющей влияние внешних возмущений на исследуемый объект управления. В настоящей статье основное внимание будет уделено формированию такой системы автоматического управления, которая должна нивелировать возмущения и гарантировать выполнение дополнительных требований к динамическим процессам, а именно, реализовать размещение собственных чисел с желаемой области.

---

* Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-71-01001, https://rscf.ru/project/23-71-01001/

2. Постановка задачи и методы ее решения. Введем в рассмотрение математическую модель, описывающую движение морского корабля:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B\delta + Dd(t), \\ y &= Cx. \end{aligned} \tag{1}$$

В системе дифференциальных уравнений (1) x — n-мерный вектор основных динамических переменных, δ — m-мерный вектор отклонения управляющих рулей, d — h-мерный вектор воздействий окружающей среды, y — k-мерный вектор переменных, доступных для измерения, A, B, C, D — постоянные матрицы коэффициентов, зависящие от конкретного корабля. Для формирования управляющих воздействий требуется также добавить уравнения привода $\dot{\delta} = u$, где u — m-мерный вектор управлений.

Будем формировать искомые управления следующим образом:

$$u = K_1 x + K_2 \delta = K \begin{pmatrix} x \\ \delta \end{pmatrix}.$$

Тогда система, замкнутая указанным управлением, примет вид

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u + \bar{D}\bar{d}, \\ y &= \bar{C}\bar{x}, \end{aligned}$$

где $\bar{A} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\bar{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_m \end{pmatrix}$; $\bar{D} = \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix}$; $\bar{C} = \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix}$; $\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ \delta \end{pmatrix}$; $\bar{d} = \begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix}$. Поиску подлежат постоянные матрицы K_1 и K_2. При этом будем искать управления, для которых характеристический многочлен матрицы замкнутой системы будет гурвицев, т. е. будет иметь все собственные числа в левой полуплоскости левее некоторого заданного значения η_0. Рассмотрим ситуацию, когда внешние возмущения $d(t)$ по норме не выше единицы: $\left\|d\right\|_\infty \leqslant 1$. Поставим задачу о поиске такого управления, которое доставляет минимум размеру множества реакций $S(K)$ на указанные внешние воздействия:

$$S(K) \to \min_K.$$

В соответствии с [16] будем аппроксимировать множества реакций инвариантными эллипсоидами, а в качестве функционала $S(K)$ возьмем след матрицы инвариантного эллипсоида, который содержит реакции рассматриваемой системы на внешние возмущения:

$$S(K) = \mathrm{tr}(\bar{C}H(\alpha_0, \gamma_0)\bar{C}^T),$$

здесь $\alpha_0 > 0$ доставляет минимум функционалу $S(K)$, а $H(\alpha_0, \gamma_0)$ является положительно определенным решением уравнения

$$\hat{A}H + H\hat{A}^T - \gamma\bar{B}\bar{B}^T + \alpha H + \alpha^{-1}\bar{D}\bar{D}^T = 0, \tag{2}$$

в котором $\hat{A} = \bar{A} + \bar{B}K$.

Б. Т. Поляк и П. С. Щербаков [16] показывают, что, решив задачу минимизации функционала $S(K)$, получим минимальный в смысле следа эллипсоид, который будет содержать множество достижимых реакций системы. И если не принимать во внимание требования к значениям собственных чисел, то решение задачи имеет вид

$\tilde{K} = -\gamma_0 \bar{B}^T H^{-1}(\alpha_0, \gamma_0)$, где α_0, γ_0 — некоторые постоянные параметры, также подлежащие поиску. Однако в данном случае собственные числа должны располагаться левее заданного значения в левой полуплоскости, поэтому необходимо сформировать метод учета налагаемых требований и условий. Для удобства будем решать рассматриваемую задачу минимизации на конечной сетке управлений, сформированной по следующей схеме:

1) задаем положительные максимальные и минимальные величины для параметров α, γ;

2) делим полученные отрезки $[\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$ и $[\gamma_{\min}, \gamma_{\max}]$ на $N+1$ равных отрезков точками α_i, γ_j, i, $j = \overline{1, N}$;

3) находим решение $H(\alpha_i, \gamma_j)$ уравнения (2);

4) проверяем условие положительной определенности матрицы $H(\alpha_i, \gamma_j)$. Если оно выполняется, вычисляем $K_{ij} = -\gamma_j \bar{B}^T H^{-1}(\alpha_i, \gamma_j)$ и уточняем расположение собственных чисел матрицы замкнутой системы. Если собственные числа лежат в нужной области, то добавляем управление $u = K_{ij}\bar{x}$ в конечную сетку управляющих воздействий. Если матрица $H(\alpha_i, \gamma_j)$ не является положительно определенной или собственные числа расположены вне требуемой области, то переходим к следующим значениям α, γ;

5) вычисляем $S(K_{ij})$ для каждого K_{ij} из конечной сетки и ищем минимальное значение.

Приведенную схему можно модернизировать, если найденное на конкретном шаге значение $S(K_{ij})$ сравнивать с предшествующей величиной размера множества реакций: если текущее значение $S(K_{ij})$ меньше, то предыдущее исключается из сетки; если же текущее значение $S(K_{ij})$ больше предыдущего, то происходит переход к следующим значениям номеров пар.

Представленный алгоритм состоит в преобразовании задачи минимизации размера $S(K)$ с параметрами, в которой присутствуют нелинейные ограничения, к более легкой задаче на безусловный экстремум. Специфика данного подхода заключается в его эксплуатационной гибкости, так как он применим для любого вида определения размера множества реакций на внешнее воздействие и, значит, может быть использован для любых законов автоматического управления с заданной структурой.

3. Компьютерный алгоритм. Описанная схема нахождения закона управления была реализована в пакете MATLAB. Представим фрагмент кода программы, реализующей предложенный алгоритм:

```
A = [a11 a12 0 b1;     a21 a22 0 b2;      0   1  0  0;      0   0  0  0];
B = [0;     0;     0;     1];
C = eye(4);
D = [d1;     d2;     0;     0];
alpha = sym('alpha'); gamma = sym('gamma');  h11 = sym('h11');
h12 = sym('h12');  h13 = sym('h13');  h14 = sym('h14');  h22 = sym('h22');
h23 = sym('h23');  h24 = sym('h24');  h33 = sym('h33');  h34 = sym('h34');
h44 = sym('h44');
H = [h11 h12 h13 h14;      h12 h22 h23 h24;      h13 h23 h33 h34;
      h14 h24 h34 h44];
res =  A*H + H*A' - gamma*B*B' + alpha*H + (1/alpha)*H*H';

% решение матричного уравнения
hh44 = solve(simh(4,4),h44);
hh23 = solve(simh(3,3),h23);
```

```
hh24 = solve(simh(3,4),h24);
t1 = simhlify(subs(simh,h44,hh44));
t2 = simhlify(subs(t1,h23,hh23));
t3 = simhlify(subs(t2,h24,hh24));
hh13 = solve(t3(1,3),h13);
t4 = simhlify(subs(t3,h13,hh13));
hh14 = solve(t4(1,4),h14);
t5 = simhlify(subs(t4,h14,hh14));
hh34 = solve(t5(2,4),h34);
t6 = simhlify(subs(t5,h34,hh34));
hh33 = solve(t6(2,3),h33);
t7 = simhlify(subs(t6,h33,hh33));
hh22 = solve(t7(2,2),h22);
t8 = simhlify(subs(t7,h22,hh22));
hh12 = solve(t8(1,1),h12);
t9 = simhlify(subs(t8,h12,hh12));
hh11 = solve(t9(1,2),h11);
t10 = simhlify(subs(t9,h11,hh11));
hh12 = simhlify(subs(hh12,h11,hh11));
hh22 = simhlify(subs(hh22,h12,hh12));
hh33 = simhlify(subs(hh33,{h12,h22},{hh12,hh22}));
hh14 = simhlify(subs(hh14,h34,hh34));
hh13 = simhlify(subs(hh13,{h12,h33,h34},{hh12,hh33,hh34}));
hh24 = simhlify(subs(hh24,h34,hh34));
hh23 = simhlify(subs(hh23,h33,hh33));
H1 = [hh11 hh12 hh13 hh14;...
      hh12 hh22 hh23 hh24;...
      hh13 hh23 hh33 hh34;...
      hh14 hh24 hh34 hh44];
Fi = simhlify(trace(C*H1*C'));

% поиск минимума
res_trace = [];
res_i = [];
res_j=[];
for i=1:1:50
    for j=1:1:50
          HH = subs(H1,{alpha,gamma},{i,j});
          G1 = det(HH (1:1, 1:1));
          G2 = det(HH (1:2, 1:2));
          G3 = det(HH (1:3, 1:3));
          G4 = det(HH);
% проверка условия положительной определенности матрицы
         if G1>0 && G2>0 && G3>0 && G4>0
   Y = -j*B';
            K = Y*inv(subs(H1,{alpha,gamma},{i,j}))
            Acl= A+B*K;
            sch=eig(Acl);
            sch_pos=real(sch)<0;
if sch_pos ==1
                   res_trace(end+1) = subs(Fi,{alpha,gamma},{i,j});
                   res_i(end+1) = i;
                   res_j(end+1) = j;
```

```
end
          end
          end
end
```

4. Пример реализации алгоритма. В качестве примера для проведения моделирования было выбрано конкретное морское судно. Для него по предложенному алгоритму были найдены коэффициенты закона управления и проведено тестирование в различных ситуациях.

На рис. 1 приведено, как изменяется координата курса судна в процессе поворота его на 10° при воздействии недетерминированного внешнего возмущения, представленного на рис. 2. На рис. 3 сплошной линией изображен график изменения рулей, а пунктирными — технические ограничения на рули. Для данного судна отклонение рулей не может быть выше 30°. Из рис. 1–3 видно, что полученное управление прак-

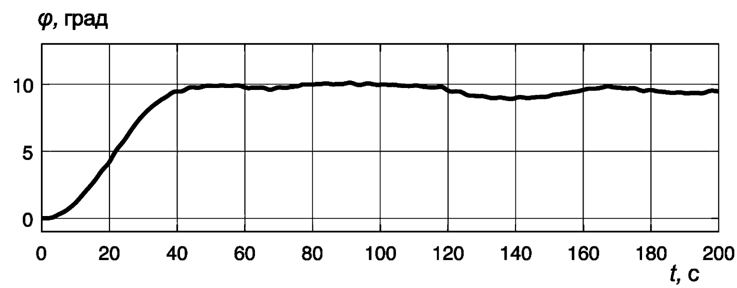

Рис. 1. Изменение курса

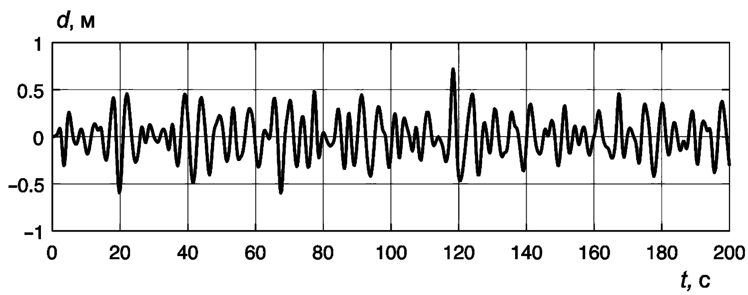

Рис. 2. Внешнее возмущение

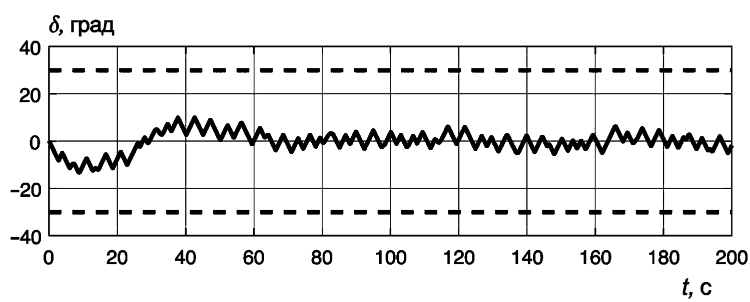

Рис. 3. Изменение рулей

тически полностью компенсирует внешнее воздействие, не доводя рули до упоров, а курс практически все время остается на требуемом значении $10°$. Время переходного процесса составляет 40 с, что является хорошим результатом для такого класса судов. Из рис. 4 и 5 видно, что при повороте на $20°$ время и качество переходного процесса остаются на том же уровне, что и при повороте на $10°$. При этом максимальное установившееся значение отклонения рулей после совершения маневра составляет $6°$, что также является хорошим показателем.

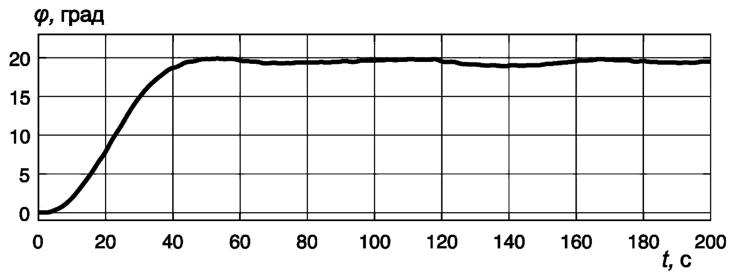

Рис. 4. Изменение курса

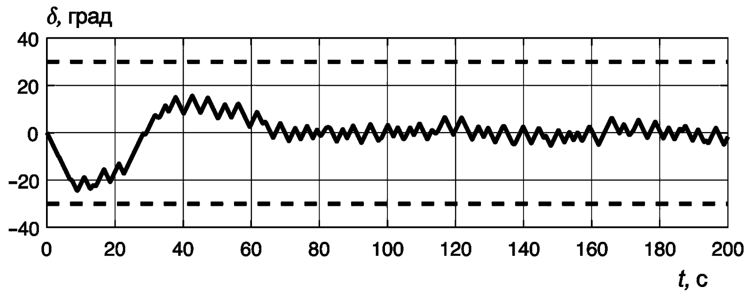

Рис. 5. Изменение рулей

5. Заключение. Таким образом, в статье сформирован алгоритм вычисления коэффициентов автоматического управления, обеспечивающий минимум размера множества реакций на недетерминированные внешние воздействия, ограниченные по норме, и необходимое расположение корней характеристического полинома системы, замкнутой таким управлением. Указанный алгоритм реализован в MATLAB и протестирован на примере конкретного морского судна. По результатам моделирования сделан вывод о приемлемом качестве работы описанного алгоритма.

Литература

1. *Зубов В. И.* Лекции по теории управления. СПб.: Лань, 2009. 496 с.

2. *Зубов В. И.* Математические методы исследования систем автоматического регулирования. Л.: Машиностроение, 1974. 336 с.

3. *Мирошник И. В.* Теория автоматического управления. Нелинейные и оптимальные системы. СПб.: Питер, 2005. 271 с.

4. *Олссон Г., Пиани Д.* Цифровые системы автоматизации и управления. СПб.: Невский Диалект, 2001. 557 с.

5. *Чернецкий В. И., Дидук Г. А., Потапенко А. А.* Математические методы и алгоритмы исследования автоматических систем. Л.: Энергия, 1970. 374 с.

6. *Янушевский Р. Т.* Теория линейных оптимальных многосвязных систем управления. М.: Наука, 1973. 464 с.
7. *Bosgra O. H., Kwakernaak H., Meinsma G.* Design methods for control systems. Notes for a course of the Dutch Institute of Systems and Control. Delft: Delft University of Technology, 2006. 325 p.
8. *Doyle J., Francis B., Tannenbaum A.* Feedback control theory. New York: Macmillan Publ. Co., 1992. 227 p.
9. *Жабко А. П., Жабко Н. А., Яковлев П. В.* Метод оптимального демпфирования В. И. Зубова в задаче управления одной гироскопической системой // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2022. Т. 18. Вып. 2. С. 278–284. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2022.208
10. *Veremei E. I., Korchanov V. M.* Multiobjective stabilization of a certain class of dynamic systems // Automation and Remote Control. 1989. N 49. P. 1210–1219.
11. *Веремей Е. И.* Линейные системы с обратной связью. СПб.: Лань, 2013. 448 с.
12. *Веремей Е. И., Корчанов В. М.* Многоцелевая стабилизация динамических систем одного класса // Автоматика и телемеханика. 1988. № 9. С. 126–137.
13. *Smirnov M. N., Smirnova M. A., Smirnova T. E., Smirnov N. V.* The problem of synthesis the control laws with uncertainties in external disturbances // Lecture Notes in Engineering and Computer Science. 2017. Vol. 2227. P. 276–279.
14. *Smirnov M. N., Smirnova M. A., Smirnova T. E., Smirnov N. V.* The issues of multipurpose control laws construction // Lecture Notes in Engineering and Computer Science. 2017. Vol. 2227. P. 194–196.
15. *Smirnova M. A., Smirnov M. N.* Multipurpose control laws in trajectory tracking problem // International Journal of Applied Engineering Research. 2016. Vol. 11 (22). P. 11104–11109.
16. *Поляк Б. Т., Щербаков П. С.* Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002. 303 с.

Статья поступила в редакцию 12 ноября 2023 г.
Статья принята к печати 26 декабря 2023 г.

Контактная информация:

Смирнов Михаил Николаевич — канд. физ.-мат. наук, доц.; mikhail.smirnov@spbu.ru

Смирнова Мария Александровна — канд. физ.-мат. наук, ст. преп.; mariya.smirnova@spbu.ru

Mathematical and computer modeling of automatic control in the presence of disturbances*

M. N. Smirnov, M. A. Smirnova

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Smirnov M. N., Smirnova M. A. Mathematical and computer modeling of automatic control in the presence of disturbances. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2024, vol. 20, iss. 1, pp. 109–116. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2024.109 (In Russian)

One of the most important tasks of the automatic motion control system in real operating conditions is to compensate for the influence of disturbances acting on the object, taking into account the peculiarities of its dynamics. This article presents a method for calculating the coefficients of automatic control, which provides a minimum of the size of the set of reactions to non-deterministic external influences, limited by the norm, and the necessary location of the roots of the characteristic polynomial of a system closed by such control. The specified algorithm is implemented in MATLAB and tested on the example of a specific marine vessel.

* This research was supported by the Russian Science Foundation (project N 23-71-01001, https://rscf.ru/project/23-71-01001/).

Based on the simulation results, a conclusion is made about the acceptable quality of the generated algorithm.

Keywords: control, computer simulation, perturbation.

References

1. Zubov V. I. *Lekcii po teorii upravlenija* [*Lections on control theory*]. St. Petersburg, Lan' Publ., 2009, 496 p. (In Russian)

2. Zubov V. I. *Matematicheskie metody issledovanija sistem avtomaticheskogo regulirovanija* [*Mathematical methods of research of automatic control systems*]. Leningrad, Mashinostroenie Publ., 1974, 336 p. (In Russian)

3. Miroshnik I. V. *Teorija avtomaticheskogo upravlenija. Nelinejnye i optimal'nye sistemy* [*Automatic control theory. Nonlinear and optimal systems*]. St. Petersburg, Piter Publ., 2005, 271 p. (In Russian)

4. Olsson G., Piani D. *Cifrovye sistemy avtomatizacii i upravlenija* [*Digital systems of automatization and control*]. St. Petersburg, Nevskij Dialekt Publ., 2001, 557 p. (In Russian)

5. Cherneckij V. I., Diduk G. A., Potapenko A. A. *Matematicheskie metody i algoritmy issledovanija avtomaticheskih sistem* [*Mathematical methods and algorithms of automatic systems research*]. Leningrad, Jenergija Publ., 1970, 374 p. (In Russian)

6. Janushevskij R. T. *Teorija linejnyh optimal'nyh mnogosvjaznyh sistem upravlenija* [*The theory of linear optimal multivariable control systems*]. Moscow, Nauka Publ., 1973, 464 p. (In Russian)

7. Bosgra O. H., Kwakernaak H., Meinsma G. *Design methods for control systems. Notes for a course of the Dutch Institute of Systems and Control.* Delft, Delft University of Technology Publ., 2006, 325 p.

8. Doyle J., Francis B., Tannenbaum A. *Feedback control theory.* New York, Macmillan Publ. Co., 1992, 227 p.

9. Zhabko A. P., Zhabko N. A., Jakovlev P. V. Metod optimal'nogo dempfirovanija V. I. Zubova v zadache upravlenija odnoj giroskopicheskoj sistemoj [Zubov's optimum damping method in the control problem of one gyroscope system]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Sciences. Control Processes*, 2022, vol. 18, iss. 2, pp. 278–284. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2022.208 (In Russian)

10. Veremei E. I., Korchanov V. M. Multiobjective stabilization of a certain class of dynamic systems. *Automation and Remote Control*, 1989, no. 49, pp. 1210–1219.

11. Veremej E. I. *Linejnye sistemy s obratnoj svjaz'ju* [*Linear systems with feedback*]. St. Petersburg, Lan' Publ., 2013, 448 p. (In Russian)

12. Veremej E. I., Korchanov V. M. Mnogocelevaja stabilizacija dinamicheskih sistem odnogo klassa [Multipurpose stabilisation of one class of dynamic systems]. *Automatics and Telemechanics*, 1988, no. 9, pp. 126–137. (In Russian)

13. Smirnov M. N., Smirnova M. A., Smirnova T. E., Smirnov N. V. The problem of synthesis the control laws with uncertainties in external disturbances. *Lecture Notes in Engineering and Computer Science*, 2017, vol. 2227, pp. 276–279.

14. Smirnov M. N., Smirnova M. A., Smirnova T. E., Smirnov N. V. The issues of multipurpose control laws construction. *Lecture Notes in Engineering and Computer Science*, 2017, vol. 2227, pp. 194–196.

15. Smirnova M. A., Smirnov M. N. Multipurpose control laws in trajectory tracking problem. *International Journal of Applied Engineering Research*, 2016, vol. 11 (22), pp. 11104–11109.

16. Polyak B. T., Shherbakov P. S. *Robastnaja ustojchivost' i upravlenie* [*Robust stability and control*]. Moscow, Nauka Publ., 2002, 303 p. (In Russian)

Received: November 12, 2023.
Accepted: December 26, 2023.

Authors' information:

Mikhail N. Smirnov — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor; mikhail.smirnov@spbu.ru

Maria A. Smirnova — PhD in Physics and Mathematics, Senior Lecturer; mariya.smirnova@spbu.ru