

## ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 534.1

MSC 37G15, 37G35

**О бифуркациях хаотических аттракторов в широтно-импульсной системе управления\****Ж. Т. Жусубалиев*<sup>1</sup>, *У. А. Сопуев*<sup>2</sup>, *Д. А. Бушуев*<sup>3</sup>, *А. С. Кучеров*<sup>1</sup>,  
*А. З. Абдирасулов*<sup>2</sup><sup>1</sup> Юго-Западный государственный университет,

Российская Федерация, 305040, Курск, ул. 50 лет Октября, 94

<sup>2</sup> Ошский государственный университет,

Кыргызстан, 723500, Ош, ул. Ленина, 331

<sup>3</sup> Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова,

Российская Федерация, 308012, Белгород, ул. Костюкова, 46

**Для цитирования:** *Жусубалиев Ж. Т., Сопуев У. А., Бушуев Д. А., Кучеров А. С., Абдирасулов А. З.* О бифуркациях хаотических аттракторов в широтно-импульсной системе управления // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2024. Т. 20. Вып. 1. С. 62–78.

<https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2024.106>

Численно и аналитически исследуются нелинейные явления, индуцированные локальными и глобальными бифуркациями в системе управления с широтно-импульсной модуляцией первого рода. Показано, что переход от регулярных колебаний к хаотическим при вариации параметров происходит через последовательность классической суперкритической бифуркации удвоения периода и бифуркаций «граничного столкновения» (“border collision”). В области хаотической динамики наблюдается бифуркация слияния (“merging bifurcation”) циклов хаотических интервалов (cycles of chaotic intervals), которая связана с гомоклинической бифуркацией неустойчивых периодических орбит. Такая бифуркация относится к кризисам хаотических аттракторов. В момент бифуркации неустойчивая периодическая орбита сталкивается с некоторыми из границ хаотического аттрактора, становясь гомоклинической. Найдены уравнения бифуркационных границ в форме явной зависимости от параметров. На плоскости управляющих параметров построены области устойчивости периодических режимов и области существования четырех-, двух- и однополосных хаотических аттракторов.

\* Работа Ж. Т. Жусубалиева выполнена в рамках реализации Федеральной программы «Приоритет-2030» поддержки развития Юго-Западного государственного университета (1.73.23 П; 1.7.21/S-2; 1.7.21/4-24-7), У. А. Сопуева и А. З. Абдирасулова — при финансовой поддержке Ошского государственного университета (гранты № 14-22, №19-24), Д. А. Бушуева — в рамках реализации Федеральной программы поддержки университетов «Приоритет-2030» с использованием оборудования на базе Центра высоких технологий Белгородского государственного технологического университета им. В. Г. Шухова.

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2024

*Ключевые слова:* кусочно-гладкое бимодальное отображение, бифуркация граничного столкновения, гомоклинические бифуркации неустойчивых периодических орбит, бифуркации хаотических аттракторов.

**1. Введение.** Рассмотрим дискретную модель системы управления с широтно-импульсной модуляцией первого рода, заданную кусочно-гладким бимодальным отображением  $F : I \rightarrow R$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$ , вида [1–5]

$$F : x \mapsto F(x), \tag{1}$$

$$F(x) = \begin{cases} F_{\mathcal{L}}(x) = e^{\lambda}(x-1) + 1, & x \leq q \frac{2\alpha-1}{2\alpha}, \\ F_{\mathcal{M}}(x) = e^{\lambda}(x-1) + e^{\lambda(1-z(x))}, & q \frac{2\alpha-1}{2\alpha} < x < q, \\ F_{\mathcal{R}}(x) = e^{\lambda}x, & x \geq q, \end{cases}$$

$$z(x) = \frac{2\alpha}{q}(q-x).$$

Описание (1) можно найти в [1, 4]. Пример физической системы, математическая модель которой представляется отображением вида (1), приведен в Приложении.

Переменная  $x$  в (1) — выход системы;  $\lambda$  ( $\lambda < 0$ ) — величина, по модулю обратно пропорциональная постоянной времени непрерывной части системы управления [1, 2, 4]; разность  $q-x$  есть входной сигнал модулятора, где  $q$  — задающий сигнал;  $\alpha$  — коэффициент усиления (см. [1, 4, 5], а также Приложение). Все переменные и параметры в (1) нормированы.

Отображение (1) в зависимости от параметров может быть обратимым или необратимым. В статье рассматривается случай, когда (1) необратимо (см. [1, 4]).

Кусочно-гладкие отображения вида (1) возникают во многих приложениях современной теории динамических систем, например в силовой электронике и теории управления, механике, а также в биологии, медицине, экономике и социальных науках [5–7]. Такие отображения демонстрируют широкий круг нелинейных явлений [5–19], индуцированных как классическими, так и специальными типами бифуркаций, получившими название бифуркаций «граничного столкновения» (“border collision”) [20] (для отображений) или « $C$ -бифуркаций» (для векторных полей) [21–23], не имеющих аналогов в гладких системах [24].

Кусочно-гладкие отображения «сшиваются» из отдельных гладких функций, области определения которых разделены так называемыми многообразиями переключения. При вариации параметров инвариантное множество, например неподвижная или периодическая точка, сталкивается с одним из многообразий переключения. Это вызывает необычные нелинейные явления, такие как непрерывный переход от одного типа периодического движения к другому (“persistence border collision”). Возможны и более сложные переходы, в частности «умножение» периода колебаний, рождение из неподвижной точки квазипериодических или хаотических колебаний [5–19, 22].

Другой тип нелинейных явлений — кризисы хаотических аттракторов, связанные с гомоклиническими бифуркациями неустойчивых периодических орбит. К ним относятся так называемые бифуркации «слияния» (“merging”), «расширения» (“expansion”) и «окончательная» (“final”) [8–17]. Это нелокальные бифуркации, известные, как “merging crisis”, “interior crisis” и “boundary crisis” [25]. Кризисы проявляются также во внезапном (“interior crisis”) или плавном (“merging crisis”) изменении размеров хаотических аттракторов при непрерывном изменении параметров [8–17].

Этот класс *нелокальных бифуркаций* в импульсных системах остается мало изученным. В представленной работе численно и аналитически исследуются бифуркации хаотических аттракторов в бимодальном кусочно-гладком непрерывном отображении, описывающем поведение системы управления с широтно-импульсной модуляцией первого рода.

Показано, что переход от регулярных колебаний к хаотическим при вариации параметров происходит через последовательность классической суперкритической бифуркации удвоения периода и бифуркаций «граничного столкновения». В области нерегулярной динамики наблюдаются бифуркации слияния циклов хаотических интервалов (“cycles of chaotic intervals”) [8, 26]. Установлено, что границы хаотических аттракторов (циклов хаотических интервалов) определяются одной из критических точек и ее образами [8].

Если отображение кусочно-гладкое, то роль прообраза критической точки играет многообразие переключения, где отображение недифференцируемо [27]. Результаты, относящиеся к определению границ хаотических аттракторов, базируются на понятии критической кривой, впервые введенном К. Мира для двумерных эндоморфизмов (см., например, [27]), которое является обобщением понятия критической точки одномерных гладких необратимых отображений. Определение критической точки дается в п. 2.

В момент бифуркации неустойчивая периодическая орбита сталкивается с некоторыми из границ, становясь гомоклинической. Найдены уравнения бифуркационных границ в форме явной зависимости от параметров. На плоскости управляющих параметров построены области устойчивости периодических режимов и области существования четырех-, двух- и однополосных хаотических аттракторов.

**2. Некоторые свойства отображения и предварительные понятия.** Каждая из функций  $F_{\mathcal{L}}(x)$ ,  $F_{\mathcal{M}}(x)$ ,  $F_{\mathcal{R}}(x)$  в (1) монотонна в своей области определения:  $F_{\mathcal{L}}(x)$ ,  $F_{\mathcal{R}}(x)$  — линейно возрастающие, а  $F_{\mathcal{M}}(x)$  — монотонно убывающая. Точки  $x = c_{\mathcal{L}}$  и  $x = c_{\mathcal{R}}$  являются границами областей определения функций  $F_{\mathcal{L}}(x)$ ,  $F_{\mathcal{M}}(x)$  и  $F_{\mathcal{R}}(x)$  [8], которые называются многообразиями переключения (“switching manifold”), где  $F(x)$  недифференцируема [7, 8] (рис. 1).

Введем некоторые предварительные понятия и определения теории негладких непрерывных одномерных отображений (подробности можно найти в [8], см. также цитируемую там литературу). Перепишем (1) в виде  $x_{k+1} = F(x_k)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

Точка  $x_1$ , в которую отображается  $x_0$  за одну итерацию  $x_1 = F(x_0)$ , называется образом ранга один точки  $x_0 \in I$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$ .

Любая точка  $x_0$ , такая, что  $F(x_0) = x_1$ , называется прообразом ранга один точки  $x_1$  или  $x_1 = F^{-1}(x_0)$ , где  $F^{-1}(x)$  — обратная функция. Образы и прообразы ранга  $k$  точки  $x_0$ :  $F^k(x_0) = F \circ F \circ \dots \circ F(x_0)$  и  $F^{-k}(x_0) = F^{-1} \circ F^{-1} \circ \dots \circ F^{-1}(x_0)$ ,  $k = 1, 2, \dots$  (см. [27]).

Если

$$F^m(x_0) - x_0 = 0$$

при некотором  $m > 0$ , то  $x_0$  — периодическая точка. Заметим, что если  $x_0$  есть  $m$ -периодическая точка, то она является  $km$ -периодической для любого положительного целого  $k$ . Поэтому под  $m$  понимается наименьший период [24]. Таким образом, если  $m$  — наименьшее положительное целое число, обладающее таким свойством, то  $m$  называют периодом цикла.

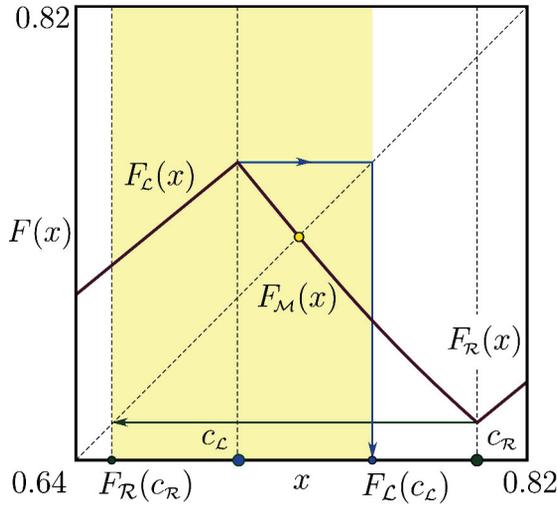


Рис. 1. График функции  $F(x)$   
 $c_L, c_R$  — многообразия переключения.

Пусть  $x_0$  — периодическая точка. Тогда

$$\mathcal{O}_m(x_0) = \{x_0, F^k(x_0), k = 1, 2, \dots, m-1\},$$

$$F^m(x_0) = x_0, F^k(x_0) \neq x_0$$

называется периодической орбитой периода  $m$  или  $m$ -циклом. Если  $m = 1$ , т. е.

$$F(x_0) - x_0 = 0,$$

то  $x_0$  есть неподвижная точка или 1-цикл [24, 28].

Локальная устойчивость гиперболического  $m$ -цикла определяется мультипликативным  $\rho(\mathcal{O}_m)$  [24, 28]. Цикл периода  $m$  локально (линейно) устойчив, если [24, 28]

$$\rho(\mathcal{O}_m) = \left| \prod_{k=0}^{m-1} F'(x_k) \right| < 1, \quad x_k = F^k(x_0),$$

где  $x_k$  — периодические точки.

Функция  $F(x)$  имеет два локальных экстремума в точках  $x = c_L = q \frac{2\alpha - 1}{2\alpha}$  и  $x = c_R = q$  (рис. 1), которые называются многообразия переключения. Образы ранга один  $c_0 = F_L(c_L)$ ,  $c_1 = F_R(c_R)$  точек  $c_L$  и  $c_R$  называются критическими точками [27].

Существуют несколько определений критической точки. Согласно наиболее распространенному определению, критическая точка непрерывной функции есть внутренняя точка области ее определения, в которой первая производная либо равна нулю, либо не определена. Это определение включает в себя точки локальных экстремумов, точки перегиба и точки недифференцируемости функции.

Другое определение критической точки в смысле Жюлиа и Фату дается следующим образом: «Критическая точка  $c_0$  непрерывной функции  $F(x)$  есть точка, для которой  $c_0 = F(c_B)$  и  $F^{-1}(c_0) \supseteq c_B$ . Здесь  $c_B$  — точка локального экстремума  $F(x)$ ».

Таким образом, критическая точка есть *значение функции* в точке локального экстремума. Кроме того, точки перегиба, а также точки «излома», которые не связаны с экстремумом, исключаются из рассмотрения. Авторы статьи придерживаются второго определения.

Интервал  $J$  называется поглощающим [8], если:

- а)  $F(J) \subseteq J$ . Это означает, что  $J$  либо инвариантен  $F(J) = J$ , или  $F(J) \subseteq J$ ;
- б) существует окрестность  $U \subset J$  такая, что для любого  $x \in U$  существует конечное целое число  $k > 0$ , так что  $F^k(x) \in J$ ;
- в) интервал  $J$  ограничен двумя разными критическими точками или критической точкой и ее образом (см. рис. 4).

Одно из наиболее распространенных определений хаоса дано, например, автором [28] (см. также [8]).

Непрерывное отображение  $F : I \rightarrow I$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$ , называется хаотическим на замкнутом инвариантном множестве  $D \subseteq I$ , если:

- 1)  $F$  топологически транзитивно;
- 2) периодические точки  $F$  плотны в  $D$ ;
- 3)  $F$  чувствительно к начальным условиям.

*Хаотический аттрактор* — это притягивающее множество  $D$ , на котором  $F$  хаотично [8]. Пояснение определения дано в [8] (см. также цитируемую там литературу).

Пусть хаотический аттрактор  $\mathcal{A}$  состоит из  $m > 1$  непересекающихся полос (интервалов)  $\mathcal{B}_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, m - 1$ , тогда  $\mathcal{A}$  является циклическим [29, 30], если

$$\mathcal{B}_{i+1} = F(\mathcal{B}_i), \quad i = 0, 1, \dots, m - 1, \quad \mathcal{B}_0 = F(\mathcal{B}_{m-1})$$

(см. рис. 5).

Пусть  $\mathcal{A}$  — многополосный хаотический аттрактор (“multi-band chaotic attractor” [29, 30]) непрерывного отображения. Тогда  $\mathcal{A}$  циклический [30].

Для описания  $m$ -цикла, следуя [8], будем использовать три символа:  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{M}$  и  $\mathcal{R}$  (“left”, “middle”, “right”). Тогда периодическая орбита описывается последовательностью

$$\sigma_0 \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{m-1}. \tag{2}$$

В (2) для каждого  $0 \leq i \leq m - 1$  находится [8] символ  $\sigma_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, m - 1$ :

$$\sigma_i = \begin{cases} \mathcal{L}, & x_i < c_{\mathcal{L}}, \\ \mathcal{M}, & c_{\mathcal{L}} < x_i < c_{\mathcal{R}}, \\ \mathcal{R}, & x_i > c_{\mathcal{R}}. \end{cases}$$

В кусочно-гладких системах возможны разные типы периодических орбит с одинаковым периодом. Для описания  $m$ -цикла конкретного типа далее будем применять обозначение  $O_{\sigma_0 \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{m-1}}$ .

В исследованиях были выбраны следующие значения параметров:  $\lambda = -0.2$ ,  $0.7 < q < 1.0$ ,  $3.0 < \alpha < 8.7$ .

**3. Бифуркационный анализ.** На рис. 2 приведена двухпараметрическая бифуркационная диаграмма, рассчитанная на плоскости параметров  $(\alpha, q)$ , а на рис. 3 дана однопараметрическая бифуркационная диаграмма для сечения  $q = 0.8$ , обозначенного буквой  $A$  на рис. 2.

Область  $\Pi_1$  слева ограничена линией классической бифуркации удвоения периода. При переходе через границу области  $\Pi_1$  возникает устойчивый 2-цикл, а неподвижная точка (1-цикл) продолжает существовать, но становится неустойчивой

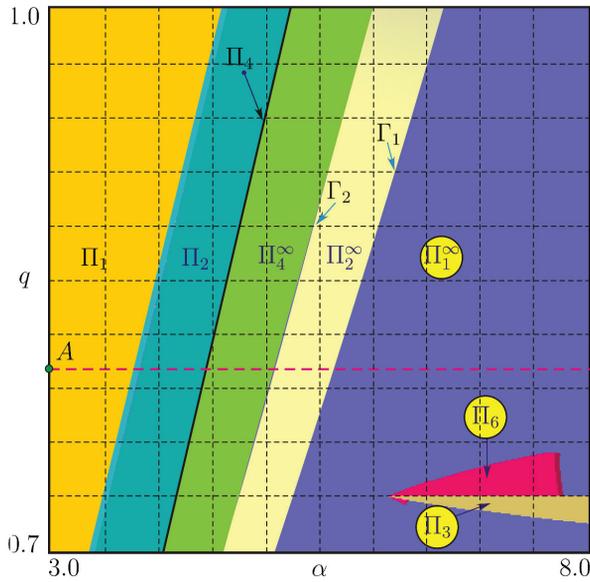


Рис. 2. Двупараметрическая бифуркационная диаграмма  
 $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4, \Pi_6$  — области устойчивости 1-, 2-, 3-, 4-, 6-циклов;  $\Pi_1^\infty, \Pi_2^\infty, \Pi_4^\infty$  — области существования одно-, двух-, четырехполосных хаотических аттракторов.

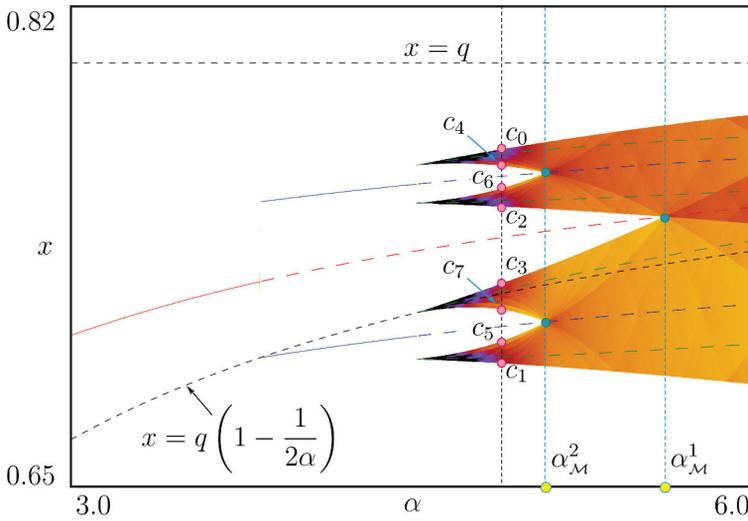


Рис. 3. Бифуркационная диаграмма для  $q = 0.8$  (сечение A на рис. 2),  
 $\alpha_M^2$  и  $\alpha_M^1$  — точки «бифуркации слияния» (“merging”)

с отрицательным мультипликатором. Как показано в [4], устойчивый 2-цикл, возникающий из неподвижной точки через классическую суперкритическую бифуркацию удвоения периода, претерпевает бифуркацию граничного столкновения, когда одна из периодических точек сталкивается с границей  $c_c = q \left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right)$  (рис. 4, а). В результате этой бифуркации 2-цикл меняет тип: устойчивый 2-цикл с символической ха-

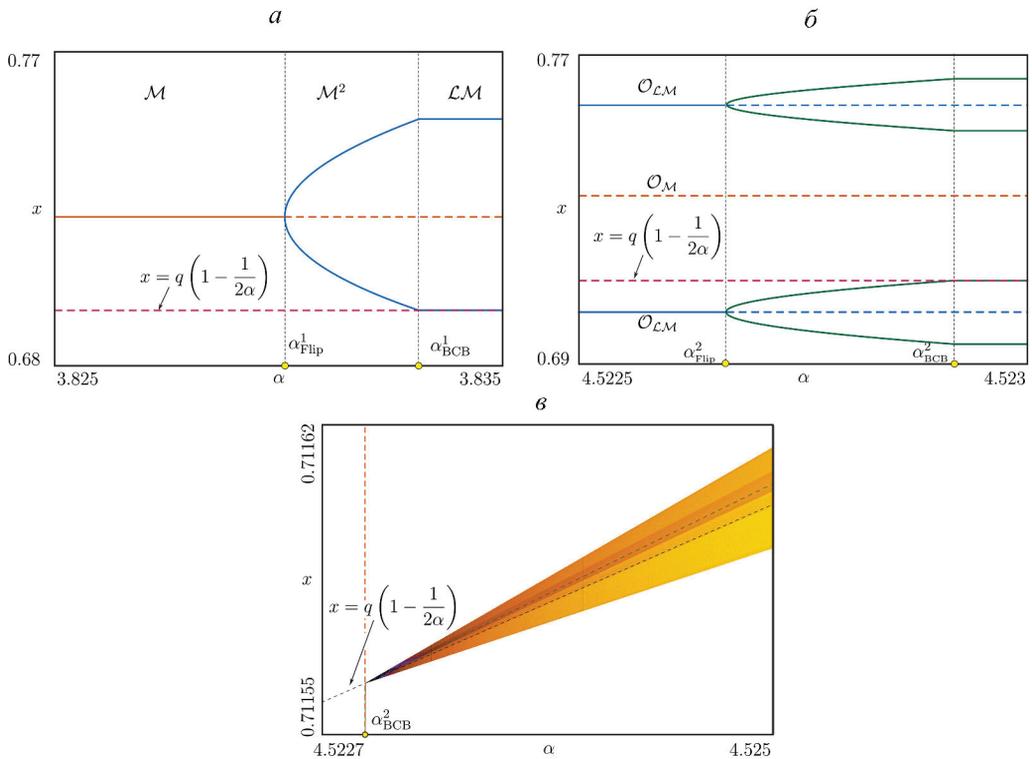


Рис. 4. Увеличенный фрагмент бифуркационной диаграммы (а, б) и возникновение четырехлобового хаотического аттрактора в точке  $\alpha_{BCB}^2$  (в)

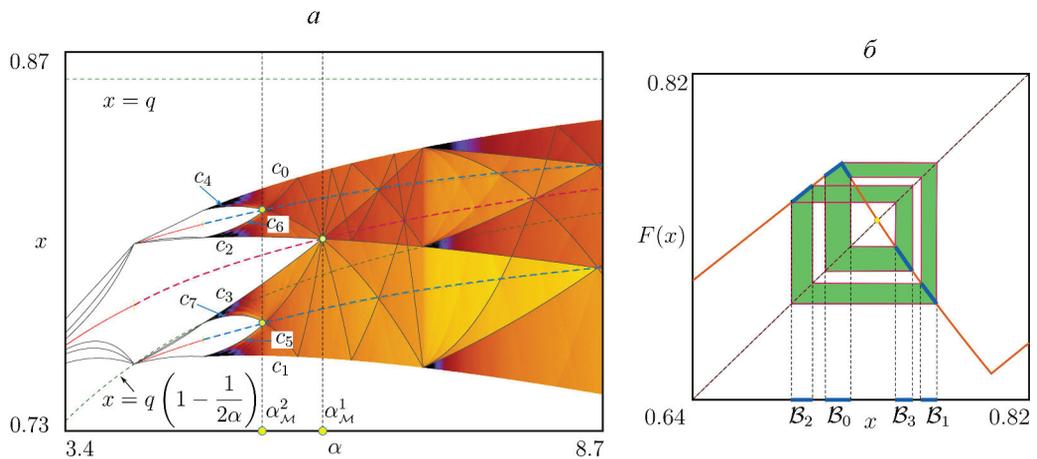


Рис. 5. Границы многолобового хаотического аттрактора ( $q = 0.8602151$ ) (а) и определение циклов хаотических интервалов:  $B_1 = F(B_0)$ ,  $B_2 = F(B_1)$ ,  $B_3 = F(B_2)$ ,  $B_0 = F(B_3)$  (б)

рактической  $M^2$  переходит в устойчивый 2-цикл с символической характеристикой  $LM$ . Такой переход называется бифуркацией простого изменения типа периодическо-

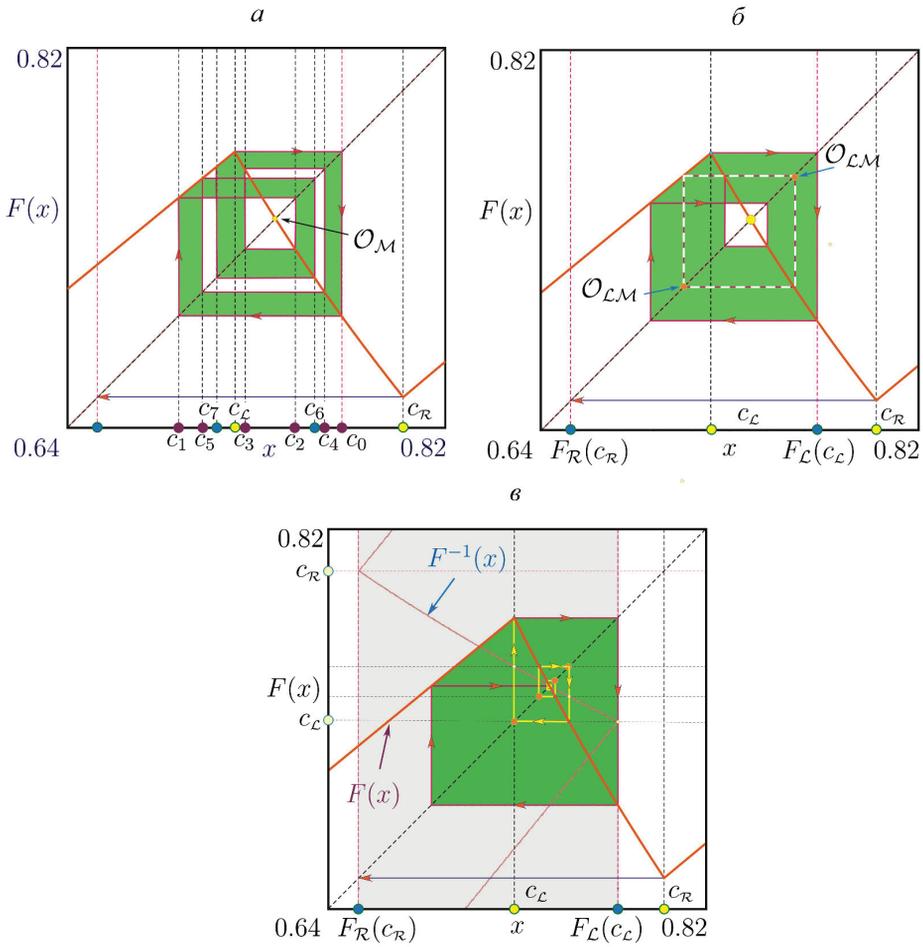


Рис. 6. Хаотические аттракторы

*a* — четырехполосный хаотический аттрактор; *б* — переход от четырехполосного хаотического аттрактора в двухполосный в точке  $\alpha_M^2$ ; *в* — переход от двухполосного хаотического аттрактора в однополосный в точке  $\alpha_M^1$

го решения [23] или “border collision persistence” [7] (рис. 4, *a*). Такую периодическую орбиту в соответствии с символической характеристикой, введенной ранее, обозначим через  $\mathcal{O}_{LM}$ .

При дальнейшем изменении  $\alpha$  устойчивый 2-цикл  $\mathcal{O}_{LM}$  претерпевает классическую бифуркацию удвоения периода. На рис. 4, *б* показан увеличенный фрагмент бифуркационной диаграммы, иллюстрирующий этот переход. При переходе через бифуркационное значение параметра цикл периода 2 становится неустойчивым с отрицательным мультипликатором и мягко рождается устойчивый 4-цикл.

Далее в точке  $\alpha_{BCV}^2$  устойчивый 4-цикл претерпевает бифуркацию «граничного столкновения», при которой возникает четырехполосный хаотический аттрактор (рис. 4, *в*), а 4-цикл становится неустойчивым [5–7, 22, 23]. Таким образом, область устойчивости 4-цикла на плоскости параметров  $(\alpha, q)$  слева ограничена линией классической бифуркации удвоения периода, а справа — линией бифуркации «граничного

столкновения», приводящей к рождению четырехполосного хаотического аттрактора. Как можно видеть из рис. 2 и 4, б, область устойчивости 4-цикла на плоскости параметров  $(\alpha, q)$  очень узкая.

В точке (см. рис. 3)  $\alpha = \alpha_{\mathcal{M}}^2$  четырехполосный хаотический аттрактор переходит в двухполосный через так называемую бифуркацию «слияния» (“merging”), связанную с гомоклинической бифуркацией неустойчивого 2-цикла  $\mathcal{O}_{\mathcal{LM}}$  с отрицательным мультипликатором.

Границы четырехполосного хаотического аттрактора образованы  $c_0 = F_{\mathcal{L}}(c_{\mathcal{L}}) = e^{\lambda}(q - 0.5q/\alpha - 1) + 1$  и ее образами  $c_1 = F_{\mathcal{R}}(c_0)$ ,  $c_2 = F_{\mathcal{L}}(c_1)$ ,  $c_3 = F_{\mathcal{M}}(c_2)$ ,  $c_4 = F_{\mathcal{L}}(c_3)$ ,  $c_5 = F_{\mathcal{M}}(c_4)$ ,  $c_6 = F_{\mathcal{L}}(c_5)$ ,  $c_7 = F_{\mathcal{M}}(c_6)$  (см. рис. 3 и 5, а).

На рис. 5, а серым цветом обозначены границы хаотического аттрактора, образованные критической точкой  $c_0 = F_{\mathcal{L}}(c_{\mathcal{L}})$  и ее образами  $c_{i+1} = F(c_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, 6$ . Рисунок 5, б иллюстрирует четырехполосный хаотический аттрактор:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 &= F(\mathcal{B}_0), \quad \mathcal{B}_2 = F(\mathcal{B}_1), \\ \mathcal{B}_3 &= F(\mathcal{B}_2), \quad \mathcal{B}_0 = F(\mathcal{B}_3) \end{aligned}$$

(см. определение).

Здесь (см. рис. 5, б и 6, а)

$$\mathcal{B}_0 = [c_7, c_3], \quad \mathcal{B}_1 = [c_4, c_0], \quad \mathcal{B}_2 = [c_1, c_5], \quad \mathcal{B}_3 = [c_2, c_6].$$

В точке  $\alpha_{\mathcal{M}}^2$  неустойчивый 2-цикл с отрицательным мультипликатором  $\mathcal{O}_{\mathcal{LM}}$  (см. рис. 3) сталкивается с  $c_4$ ,  $c_6$  и  $c_5$ ,  $c_7$ , что приводит к рождению гомоклинической орбиты, которая является критической в момент бифуркации. Это означает, что неустойчивый 2-цикл  $\mathcal{O}_{\mathcal{LM}}$  претерпевает гомоклиническую бифуркацию (см. рис. 6, б).

Бифуркационное значение параметра можно найти из условия, когда образы критической точки  $c_0 = F_{\mathcal{L}}(c_{\mathcal{L}})$  сливаются в точке бифуркации. На рис. 3 хорошо видно, что, действуя таким образом, мы решаем любое из двух уравнений:

$$c_4 = c_6, \quad c_5 = c_7, \tag{3}$$

где

$$\begin{aligned} c_4 &= F_{\mathcal{L}} \circ F_{\mathcal{M}} \circ F_{\mathcal{L}} \circ F_{\mathcal{M}} \circ F_{\mathcal{L}}(c_{\mathcal{L}}), \\ c_5 &= F_{\mathcal{M}} \circ F_{\mathcal{L}} \circ F_{\mathcal{M}} \circ F_{\mathcal{L}} \circ F_{\mathcal{M}} \circ F_{\mathcal{L}}(c_{\mathcal{L}}), \\ c_6 &= F_{\mathcal{L}} \circ F_{\mathcal{M}} \circ F_{\mathcal{L}} \circ F_{\mathcal{M}} \circ F_{\mathcal{L}} \circ F_{\mathcal{M}} \circ F_{\mathcal{L}}(c_{\mathcal{L}}), \\ c_7 &= F_{\mathcal{M}} \circ F_{\mathcal{L}} \circ F_{\mathcal{M}} \circ F_{\mathcal{L}} \circ F_{\mathcal{M}} \circ F_{\mathcal{L}} \circ F_{\mathcal{M}} \circ F_{\mathcal{L}}(c_{\mathcal{L}}). \end{aligned}$$

Очевидно, что уравнения (3) приводят к одному и тому же результату, причем первое уравнение из них самое простое, поскольку оно включает образы критической точки  $c_0$  самого низкого ранга. Из первого уравнения (3) получаем, что

$$\Gamma_2 = \{(\alpha, q) : \theta(\alpha, q) = 0\}. \tag{4}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \theta(\alpha, q) &= e^{2\lambda} \cdot (\eta(\alpha, q) - 1) + \\ &+ e^{\lambda} \mu(\alpha, q) + (e^{4\lambda} - e^{3\lambda}) \cdot (q - 0.5q/\alpha - 1) + e^{\lambda} \cdot (1 - \eta(\alpha, q)) + 1, \end{aligned}$$

где

$$\eta(\alpha, q) = e^{\lambda(1-e^\lambda) \cdot (1-\alpha 2+2\alpha/q)},$$

$$\mu(\alpha, q) = 1 - 2 \frac{q-1}{q} \cdot \alpha + e^{3\lambda} \left( \frac{2\alpha}{q} \cdot q - 1 - \frac{2\alpha}{q} \right) + \frac{2\alpha}{q} \cdot e^\lambda \cdot (\eta(\alpha, q) - 1).$$

При дальнейшем увеличении параметра двухполосный хаотический аттрактор переходит в однополосный (см. рис. 3 и 6, б, в), когда в точке  $\alpha_{\mathcal{M}}^2$  полосы хаотического аттрактора, определяемые  $c_2$  и  $c_3$ , сливаются, сталкиваясь с неподвижной точкой  $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$ .

В бифуркационном значении параметра  $\alpha = \alpha_{\mathcal{M}}^1$  неустойчивая неподвижная точка с отрицательным мультипликатором сталкивается с  $c_2$  и  $c_3$ , что приводит к рождению гомоклинической орбиты, которая является критической при  $\alpha = \alpha_{\mathcal{M}}^1$ . Гомоклиническая орбита, показанная на рис. 6, б, включает все образы и прообразы неподвижной точки.

Бифуркационное значение параметра можно найти, решив уравнение

$$c_2 = c_3, \quad c_2 = F_{\mathcal{L}} \circ F_{\mathcal{M}} \circ F_{\mathcal{L}}(c_{\mathcal{L}}), \quad c_3 = F_{\mathcal{M}} \circ F_{\mathcal{L}} \circ F_{\mathcal{M}} \circ F_{\mathcal{L}}(c_{\mathcal{L}}),$$

что дает границу  $\Gamma_1$ :

$$\Gamma_1 = \{(\alpha, q) : \xi(\alpha, q) = 0\}, \tag{5}$$

$$\xi(\alpha, q) = e^{\frac{2\lambda \cdot \alpha}{q} \cdot (1-q-e^\lambda + \vartheta(\alpha, q)) + \lambda} - (1 - e^\lambda) \cdot (1 + \vartheta(\alpha, q)) - e^{2\lambda},$$

$$\vartheta(\alpha, q) = \frac{2\alpha(q-1) - q}{2\alpha} \cdot e^{3\lambda} + e^{\lambda(1-e^\lambda) \cdot (1-2\alpha+2\alpha/q) + \lambda}.$$

Границы  $\Gamma_1, \Gamma_2$  (см. (4) и (5)) рассчитывались численно. Результаты этих расчетов представлены на рис. 2. Как отмечалось ранее, область  $\Pi_4^\infty$  слева ограничена линией бифуркации «граничного столкновения» для устойчивого 4-цикла.

**4. Заключение.** В данной статье представлены результаты бифуркационного анализа системы управления с широтно-импульсной модуляцией первого рода. Показано, что переход от регулярных колебаний к хаотическим происходит через последовательность классической бифуркации удвоения периода и бифуркаций «граничного столкновения».

В области нерегулярной динамики наблюдаются бифуркации слияния циклов хаотических интервалов. Как известно, такие бифуркации связаны с гомоклинической бифуркацией неустойчивых периодических орбит. Показано, что границы хаотических аттракторов определяются одной из критических точек и ее образами. В момент бифуркации неустойчивый цикл с отрицательным мультипликатором сталкивается с некоторыми границами хаотического аттрактора. Найдены уравнения бифуркационных границ в форме явной зависимости от параметров.

На плоскости параметров построены области устойчивости периодических режимов и области существования четырех-, двух- и однополосных хаотических аттракторов.

**Приложение. Описание математической модели.** Рассмотрим импульсную систему, структурная схема которой изображена на рис. 7. Состояние такой

системы описывается дифференциальным уравнением [1-3]

$$\dot{x} = \lambda(x - S), \quad \lambda = -\frac{1}{T_0}, \quad S = \begin{cases} 1, & \varphi_k > \theta(t), \\ 0, & \varphi_k \leq \theta(t), \end{cases} \quad (6)$$

$$\varphi_k = \varphi(t)|_{t=\lfloor t \rfloor} - \theta(t), \quad \varphi(t) = q - x(t), \quad \lfloor t \rfloor = k, \quad \theta(t) = \frac{2q}{\alpha}(t - \lfloor t \rfloor), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $t$  — время;  $x \in \mathbb{R}$  — выход системы;  $\dot{x}$  — производная  $x$  по  $t$ ;  $\varphi$ ,  $S$  — сигналы на входе и выходе модулятора ( $PWM$ );  $T_0$  — постоянная времени объекта;  $\theta(t)$  — вынуждающее воздействие, представляющее периодическую последовательность импульсов пилообразной формы с периодом 1:  $\theta(t+1) \equiv \theta(t)$ ;  $\lfloor t \rfloor = k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  — дискретное время ( $\lfloor \cdot \rfloor$  — функция, выделяющая целую часть аргумента);  $q$  — задающий сигнал;  $\alpha$  — коэффициент усиления. Модулятор осуществляет широтно-импульсную модуляцию первого рода (ШИМ-1). Несложно доказать, что при ШИМ-1 не может быть скользящих режимов. Конкретным примером системы, описываемой уравне-

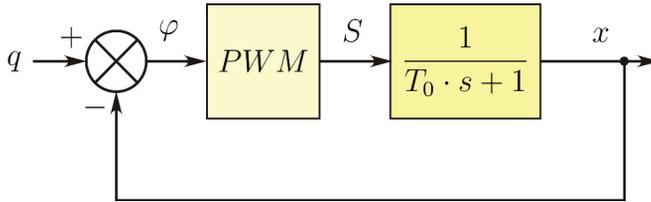


Рис. 7. Структурная схема системы управления

нием (6), является преобразователь постоянного напряжения. Функциональная схема преобразователя приведена на рис. 8. Здесь  $VT$  — силовой транзистор, работающий в ключевом режиме,  $VD$  — обратный диод,  $CS$  — датчик тока нагрузки (“Load”),  $DA_1$  — компаратор,  $S/H$  — устройства выборки-хранения,  $DA_2$  — усилитель сигнала ошибки.

Такие преобразователи широко применяются в различных областях промышленности, например в автономных фотоэлектрических установках преобразования солнечной энергии, промышленных электроприводах и электроприводах электрического транспорта, мобильных робототехнических системах, системах бесперебойного питания и энергообеспечения вычислительной техники, медицинского оборудования и охранных систем [31, 32].

Уравнение движения преобразователя (рис. 8) имеет вид

$$L \frac{di}{dt} = -R \cdot i + E_0 \cdot S, \quad S = \begin{cases} 1, & \zeta_k > V_{\text{ramp}}(\bar{t}), \\ 0, & \zeta_k \leq V_{\text{ramp}}(\bar{t}), \end{cases} \quad \zeta_k = \zeta(\bar{t})|_{\bar{t}=a[\bar{t}/a]} - V_{\text{ramp}}(\bar{t}),$$

где  $\zeta(\bar{t}) = V_{\text{ref}} - V_{\text{cs}}$ ;  $V_{\text{cs}} = \beta i$ ;  $V_{\text{ramp}}(\bar{t}) = \frac{V_0}{\alpha}(\bar{t}/a - \lfloor \bar{t}/a \rfloor)$ ;  $\lfloor \bar{t}/a \rfloor = k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ .

После приведения к безразмерному виду получим уравнение (6), в котором

$$x = \frac{Ri}{E_0}, \quad t = \bar{t}/a, \quad q = \frac{V_{\text{ref}}}{V_0} P, \quad P = \frac{RV_0}{\beta E_0}, \quad \left(\frac{q}{P} = 2\right), \quad \lambda = -\frac{R \cdot a}{L}.$$

Здесь  $E_0$  — напряжение питания;  $V_{\text{ref}}$  — задающий сигнал;  $V_{\text{ramp}}(\bar{t})$  — пилообразное напряжение, где  $V_0$  — опорный сигнал,  $a$  — период модуляции;  $V_{\text{cs}} = \beta i$  — выход-

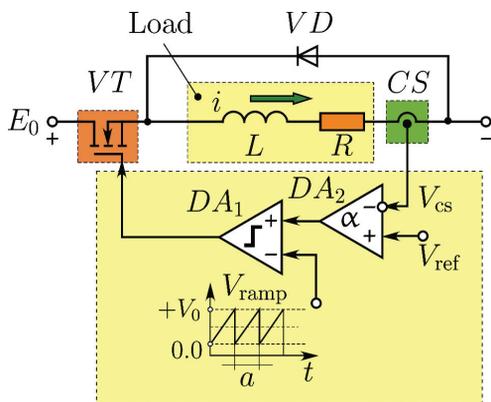


Рис. 8. Преобразователь постоянного напряжения

ной сигнал датчика тока  $SC$  с  $\beta$  — чувствительностью  $CS$ ;  $L, R$  — индуктивность и сопротивление нагрузки (“Load”);  $\bar{t}$  — время.

На рис. 9 изображены зависимости колебательных режимов от коэффициента усиления  $\alpha$ .

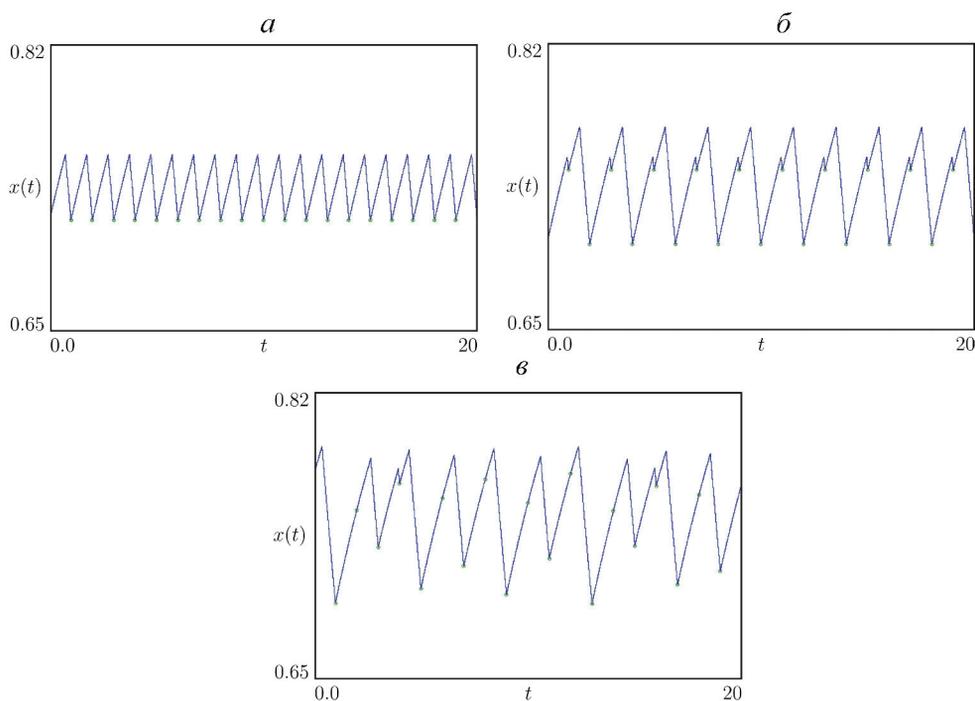


Рис. 9. Периодические режимы с периодами 1 (а), 2 (б) и хаотические колебания (в)

Динамическая система (б) сводится к негладкому непрерывному отображению.

В пределах интервала  $k < t < k + 1$  имеем, что

$$K_F = \begin{cases} 1, & k < t < t_k, \\ 0, & t_k < t < k + 1, \end{cases}$$

где  $t_k$  — момент переключения модулятора, равный

$$t_k = \begin{cases} k, & q - x_k \leq 0, \\ k + 1, & q - x_k \geq \frac{q}{2\alpha}, \\ \frac{2\alpha(q - x_k)}{q} + k, & 0 < q - x_k < \frac{q}{2\alpha}. \end{cases}$$

В  $k < t < t_k$  сигнал на выходе модулятора  $S = 1$ , и уравнение (6) принимает вид

$$\dot{x} = \lambda(x - 1).$$

Запишем его решение с условием  $x(k) = x_k$ :

$$x(t) = 1 + e^{\lambda(t-k)}(x_k - 1).$$

Отсюда для  $t = t_k$  получаем, что

$$x(t_k) = 1 + e^{\lambda(t_k-k)}(x_k - 1).$$

В интервале  $t_k < t < k + 1$  сигнал  $S = 0$ , и уравнение (6) представим следующим образом:

$$\dot{x} = \lambda x, \quad x(t_k) = 1 + e^{\lambda(t_k-k)}(x_k - 1),$$

решение которого

$$x(t) = e^{\lambda(t-k)}(x_k - 1) + e^{\lambda(t-t_k)}.$$

Для момента времени  $t = k + 1$  находим, что

$$x_{k+1} = e^{\lambda}(x_k - 1) + e^{\lambda(k+1-t_k)}.$$

Введем обозначение  $z_k = t_k - k$ , где  $z_k$  — длительность импульса (коэффициент заполнения).

Окончательно отображение принимает вид

$$x_{k+1} = e^{\lambda}(x_k - 1) + e^{\lambda(1-z_k)} \equiv F(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (7)$$

где

$$z_k = \begin{cases} 0, & x_k \geq q, \\ 1, & x_k \leq q - \frac{q}{2\alpha}, \\ \frac{2\alpha(q - x_k)}{q}, & q - \frac{q}{2\alpha} < x_k < q. \end{cases}$$

Отображение (7) можно переписать в виде (1).

## Литература

1. *Kupnis M. M.* Хаотические явления в детерминированной одномерной широтно-импульсной системе управления // *Техническая кибернетика*. 1992. № 1. С. 108–112.
2. *Gelig A. Kh., Churilov A. N.* Stability and oscillations of nonlinear pulse-modulated systems. Boston: Birkhäuser, 1998. XVI + 362 p.
3. *Yakubovich V. A., Leonov G. A., Gelig A. Kh.* Stability of stationary sets in control systems with discontinuous nonlinearities. Singapore: World Scientific, 2004. 334 p.
4. *Yanochkina O. O., Titov D. V.* Bifurcation analysis of a pulse-width control system // *Autom. Remote Control*. 2022. Vol. 83. N 2. P. 204–213.
5. *Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E.* Bifurcations and chaos in piecewise-smooth dynamical systems. Singapore: World Scientific, 2003. 363 p.
6. *Banerjee S., Verghese C. C.* (eds.) Nonlinear phenomena in power electronics. New York: IEEE Press, 2001. 441 p.
7. *Di Bernardo M., Budd C. J., Champneys A. R., Kowalczyk P.* Piecewise-smooth dynamical systems: Theory and applications. London: Springer-Verlag, 2008. 483 p.
8. *Avrutin V., Gardini L., Sushko I., Tramontana F.* Continuous and discontinuous piecewise-smooth one-dimensional maps: Invariant sets and bifurcation structures. Singapore: World Scientific, 2019. 637 p.
9. *Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E., Maity S. M., Mohanan S., Banerjee S.* Border collision route to quasiperiodicity: Numerical investigation and experimental confirmation // *Chaos*. 2006. Vol. 16. Art. N 023122.
10. *Zhusubaliyev Zh. T., Avrutin V., Sushko I., Gardini L.* Border collision bifurcation of a resonant closed invariant curve // *Chaos*. 2022. Vol. 32. Art. N 043101.
11. *Radi D., Gardini L.* A piecewise smooth model of evolutionary game for residential mobility and segregation // *Chaos*. 2018. Vol. 28. Art. N 055912.
12. *Avrutin V., Zhusubaliyev Zh. T.* Nested closed invariant curves in piecewise smooth maps // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2019. Vol. 29. Art. N 1930017.
13. *Patra M., Banerjee S.* Hyperchaos in 3D piecewise smooth maps // *Chaos, Solitons and Fractals*. 2020. Vol. 133. Art. N 109681.
14. *Sushko I., Commendatore P., Kubin I.* Codimension-two border collision bifurcation in a two-class growth model with optimal saving and switch in behavior // *Nonlinear Dynamics*. 2020. Vol. 102. N 2. P. 1071–1095.
15. *Gallegati M., Gardini L., Sushko I.* Dynamics of a business cycle model with two types of governmental expenditures: The role of border collision bifurcations // *Decisions in Economics and Finance*. 2021. Vol. 44. N 2. P. 613–639.
16. *Anufriev M., Gardini L., Radi D.* Chaos, border-collisions and stylized empirical facts in an asset pricing model with heterogeneous agents // *Nonlinear Dynamics*. 2020. Vol. 102. P. 993–1017.
17. *Zhusubaliyev Zh. T., Avrutin V., Bastian F.* Transformations of closed invariant curves and closed-invariant-curve-like chaotic attractors in piecewise smooth systems // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2021. Vol. 31. N 3. Art. N 2130009.
18. *Simpson D. J. W., Avrutin V., Banerjee S.* Nordmark map and the problem of large-amplitude chaos in impact oscillators // *Physical Review E*. 2021. Vol. 102. N 2. Art. N 022211.
19. *Jeffrey M. R., Glendinning P.* Hidden dynamics for piecewise smooth maps // *Nonlinearity*. 2021. Vol. 34. N 5. P. 3184–3198.
20. *Nusse H. E., Yorke J. A.* Border-collision bifurcations including “Period two to period three” for piecewise smooth systems // *Physica D*. 1992. Vol. 57. N 1–2. P. 39–57.
21. *Feigin M. I.* Doubling of the oscillation period with  $C$ -bifurcations in piecewise continuous systems // *Journal of Appl. Math.* 1970. Vol. 34. N 5–6. P. 822–830.
22. *Feigin M. I.* On the structure of  $C$ -bifurcation boundaries of piecewise continuous systems // *Journal of Appl. Math. Mech.* 1978. Vol. 42. N 5. P. 820–829.
23. *Di Bernardo M., Feigin M. I., Hogan S. J., Homer M. E.* Local analysis of  $C$ -bifurcations in  $n$ -dimensional piecewise-smooth dynamical systems // *Chaos, Solitons and Fractals*. 1999. Vol. 19. N 11. P. 1881–1908.
24. *Kuznetsov Yu. A.* Elements of applied bifurcation theory. New York: Springer-Verlag, 2004. 633 p.
25. *Grebogi C., Ott E., Yorke J. A.* Chaotic attractors in crisis // *Phys. Rev. Lett.* 1982. Vol. 48. P. 1507–1510.
26. *Maistrenko Yu. L., Maistrenko V. L., Chua L. O.* Cycles of chaotic intervals in a time-delayed Chua's circuit // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 1993. Vol. 3. P. 1557–1572.
27. *Mira C., Gardini L., Barugola A., Cathala J. C.* Chaotic dynamics in two-dimensional noninvertible maps. Singapore: World Scientific, 1996. 632 p.

28. *Devaney R. L.* An introduction to chaotic dynamical systems. New York: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2022. 419 p.
29. *Aurutin V., Sushko I., Gardini L.* Cyclicity of chaotic attractors in one-dimensional discontinuous maps // *Math. Comp. Sim.* 2013. Vol. 95. P. 126–136.
30. *Aurutin V., Eckstein E., Schanz M.* On detection of multi-band chaotic attractors // *Proceedings of Royal Society A.* 2007. Vol. 463. P. 1339–1358.
31. *Power electronics handbook.* 4<sup>th</sup> ed. / ed. by M. H. Rashid. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2018. XI + 1496 p.
32. *Control of power electronic converters and systems* / ed. by F. Blaabjerg. London: Academic Press, 2021. Vol. 3. XVIII + 700 p.

Статья поступила в редакцию 3 апреля 2023 г.

Статья принята к печати 26 декабря 2023 г.

**Контактная информация:**

*Жусубалиев Жаныбай Турсунбаевич* — д-р техн. наук, проф.; zhanybai@gmail.com

*Сопуев Уланбек Адагимжанович* — канд. физ.-мат. наук, доц.; ulansopuev@mail.ru

*Бушуев Дмитрий Александрович* — канд. техн. наук, доц.; untame@list.ru

*Кучеров Андрей Сергеевич* — аспирант; r3waz73@gmail.com

*Абдирасулов Айтибек Закирович* — aitibek.osh@gmail.com

## On bifurcations of chaotic attractors in a pulse width modulated control system\*

*Zh. T. Zhusubaliyev<sup>1</sup>, U. A. Sopuev<sup>2</sup>, D. A. Bushuev<sup>3</sup>, A. S. Kucherov<sup>1</sup>, A. Z. Abdirasulov<sup>2</sup>*

<sup>1</sup> Southwest State University, 94, ul. 50 let Oktyabrya, Kursk, 304040, Russian Federation

<sup>2</sup> Osh State University, 331, ul. Lenina, Osh, 723500, Kyrgyzstan

<sup>3</sup> Belgorod State Technological University named after V. G. Shukhov, 46, ul. Kostyukova, Belgorod, 308012, Russian Federation

**For citation:** Zhusubaliyev Zh. T., Sopuev U. A., Bushuev D. A., Kucherov A. S., Abdirasulov A. Z. On bifurcations of chaotic attractors in a pulse width modulated control system. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2024, vol. 20, iss. 1, pp. 62–78. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2024.106> (In Russian)

This paper discusses bifurcational phenomena in a control system with pulse-width modulation of the first kind. We show that the transition from a regular dynamics to chaos occurs in a sequence of classical supercritical period doubling and border collision bifurcations. As a parameter is varied, one can observe a cascade of doubling of the cyclic chaotic intervals, which are associated with homoclinic bifurcations of unstable periodic orbits. Such transition are also refereed as merging bifurcation (known also as merging crisis). At the bifurcation point, the unstable periodic orbit collides with some of the boundaries of a chaotic attractor and as a result, the periodic orbit becomes a homoclinic. This condition we use for obtain equations for bifurcation boundaries in the form of an explicit dependence on the parameters. This allow us to determine the regions of stability for periodic orbits and domains of the existence of four-, two- and one-band chaotic attractors in the parameter plane.

\* The work of Zh. T. Zhusubaliyev was supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation within the scope of the “Implementation of the Strategic Academic Leadership program Priority-2030” (1.73.23 П; 1.7.21/S-2; 1.7.21/4-24-7); U. A. Sopuev and A. Z. Abdirasulov were supported by the Osh State University (grants N 14-22; №19-24). The work of D. A. Bushuev was supported within the framework of the Program “Priority-2030” using equipment of High Technology Center of the Belgorod State Technological University named after V. G. Shukhov.

*Keywords:* piecewise smooth bimodal map, border collision bifurcations, homoclinic bifurcations of periodic orbits, merging bifurcation of a chaotic attractor.

## References

1. Kipnis M. M. Kchaoticeskie yavleniya v determinirovannoy odnomernoy shirotno-impul'snoy sisteme upravleniya [Chaotic phenomena in a determination a single width modulated control system]. *Technical kibernetics*, 1992, no. 1, pp. 108–112. (In Russian)
2. Gelig A. Kh., Churilov A. N. *Stability and oscillations of nonlinear pulse-modulated systems*. Boston, Birkhäuser, 1998, XVI + 362 p.
3. Yakubovich V. A., Leonov G. A., Gelig A. Kh. *Stability of stationary sets in control systems with discontinuous nonlinearities*. Singapore, World Scientific, 2004, 334 p.
4. Yanochkina O. O., Titov D. V. Bifurcation analysis of a pulse-width control system. *Autom. Remote Control*, 2022, vol. 83, no. 2, pp. 204–213.
5. Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E. *Bifurcations and chaos in piecewise-smooth dynamical systems*. Singapore, World Scientific, 2003, 363 p.
6. Banerjee S., Verghese C. C. (eds) *Nonlinear phenomena in power electronics*. New York, IEEE Press, 2001, 441 p.
7. Di Bernardo M., Budd C. J., Champneys A. R., Kowalczyk P. *Piecewise-smooth dynamical systems: Theory and applications*. London, Springer-Verlag, 2008, 483 p.
8. Avrutin V., Gardini L., Sushko I., Tramontana F. *Continuous and discontinuous piecewise-smooth one-dimensional maps: Invariant sets and bifurcation structures*. Singapore, World Scientific, 2019, 637 p.
9. Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E., Maity S. M., Mohanan S., Banerjee S. Border collision route to quasiperiodicity: Numerical investigation and experimental confirmation. *Chaos*, 2006, vol. 16, art. no. 023122.
10. Zhusubaliyev Zh. T., Avrutin V., Sushko I., Gardini L. Border collision bifurcation of a resonant closed invariant curve. *Chaos*, 2022, vol. 32, art. no. 043101.
11. Radi D., Gardini L. A piecewise smooth model of evolutionary game for residential mobility and segregation. *Chaos*, 2018, vol. 28, art. no. 055912.
12. Avrutin V., Zhusubaliyev Zh. T. Nested closed invariant curves in piecewise smooth maps. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2019, vol. 29, art. no. 1930017.
13. Patra M., Banerjee S. Hyperchaos in 3D piecewise smooth maps. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2020, vol. 133, art. no. 109681.
14. Sushko I., Commendatore P., Kubin I. Codimension-two border collision bifurcation in a two-class growth model with optimal saving and switch in behavior. *Nonlinear Dynamics*, 2020, vol. 102, no. 2, pp. 1071–1095.
15. Gallegati M., Gardini L., Sushko I. Dynamics of a business cycle model with two types of governmental expenditures: The role of border collision bifurcations. *Decisions in Economics and Finance*, 2021, vol. 44, no. 2, pp. 613–639.
16. Anufriev M., Gardini L., Radi D. Chaos, border-collisions and stylized empirical facts in an asset pricing model with heterogeneous agents. *Nonlinear Dynamics*, 2020, vol. 102, pp. 993–1017.
17. Zhusubaliyev Zh. T., Avrutin V., Bastian F. Transformations of closed invariant curves and closed-invariant-curve-like chaotic attractors in piecewise smooth systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2021, vol. 31, no. 3, art. no. 2130009.
18. Simpson D. J. W., Avrutin V., Banerjee S. Nordmark map and the problem of large-amplitude chaos in impact oscillators. *Physical Review E*, 2021, vol. 102, no. 2, art. no. 022211.
19. Jeffrey M. R., Glendinning P. Hidden dynamics for piecewise smooth maps. *Nonlinearity*, 2021, vol. 34, no. 5, pp. 3184–3198.
20. Nusse H. E., Yorke J. A. Border-collision bifurcations including “Period two to period three” for piecewise smooth systems. *Physica D*, 1992, vol. 57, no. 1–2, pp. 39–57.
21. Feigin M. I. Doubling of the oscillation period with  $C$ -bifurcations in piecewise continuous systems. *Journal of Appl. Math.*, 1970, vol. 34, no. 5–6, pp. 822–830.
22. Feigin M. I. On the structure of  $C$ -bifurcation boundaries of piecewise continuous systems. *Journal of Appl. Math. Mech.*, 1978, vol. 42, no. 5, pp. 820–829.
23. Di Bernardo M., Feigin M. I., Hogan S. J., Homer M. E. Local analysis of  $C$ -bifurcations in  $n$ -dimensional piecewise-smooth dynamical systems. *Chaos, Solitons and Fractals*, 1999, vol. 19, no. 11, pp. 1881–1908.
24. Kuznetsov Yu. A. *Elements of applied bifurcation theory*. New York, Springer-Verlag, 2004, 633 p.
25. Grebogi C., Ott E., Yorke J. A. Chaotic attractors in crisis. *Phys. Rev. Lett.*, 1982, vol. 48, pp. 1507–1510.

26. Maistrenko Yu. L., Maistrenko V. L., Chua L. O. Cycles of chaotic intervals in a time-delayed Chua's circuit. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 1993, vol. 3, pp. 1557–1572.
27. Mira C., Gardini L., Barugola A., Cathala J. C. *Chaotic dynamics in two-dimensional noninvertible maps*. Singapore, World Scientific, 1996, 632 p.
28. Devaney R. L. *An introduction to chaotic dynamical systems*. New York, CRC Press, Taylor & Francis Group, 2022, 419 p.
29. Avrutin V., Sushko I., Gardini L. Cyclicity of chaotic attractors in one-dimensional discontinuous maps. *Math. Comp. Sim.*, 2013, vol. 95, pp. 126–136.
30. Avrutin V., Eckstein E., Schanz M. On detection of multi-band chaotic attractors. *Proceedings of Royal Society A.*, 2007, vol. 463, pp. 1339–1358.
31. *Power electronics handbook*. 4<sup>th</sup> ed. Ed. by M. H. Rashid. Oxford, Butterworth-Heinemann, 2018, XI + 1496 p.
32. *Control of power electronic converters and systems*. Ed. by F. Blaabjerg. London, Academic Press, 2021, vol. 3, XVIII + 700 p.

Received: April 3, 2023.

Accepted: December 26, 2023.

#### A u t h o r s ' i n f o r m a t i o n :

*Zhanybai T. Zhusubaliyev* — Dr. Sci. in Engineering, Professor; zhanybai@gmail.com

*Ulanbek A. Sopuev* — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor; ulansopuev@mail.ru

*Dmitry A. Bushuev* — PhD in Engineering, Associate Professor; untame@list.ru

*Andrey S. Kucherov* — Postgraduate Student; r3waz73@gmail.com

*Aitibek Z. Abdirasulov* — aitibek.osh@gmail.com