# ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 517.958:531.111
MSC 83C05, 83C25

## Решение краевой задачи для уравнения Эйнштейна внутри шара с однородной плотностью

*О. И. Дривотин*

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

**Для цитирования:** *Дривотин О. И.* Решение краевой задачи для уравнения Эйнштейна внутри шара с однородной плотностью // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2024. Т. 20. Вып. 1. С. 4–9. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2024.101

Сформулирована краевая задача для уравнения Эйнштейна, описывающая гравитационное поле шара с однородной плотностью распределения массы. При формулировке краевых условий на поверхности шара используется известное решение Шварцшильда для пустого пространства-времени, характеризующее метрический тензор вне шара. Координаты, в которых записано решение Шварцшильда для внешней области, отличаются от вводящихся при записи уравнений для компонент метрического тензора внутри шара. Найдена связь между этими координатами, позволяющая использовать решение Шварцшильда при постановке краевых условий для решения внутри шара. Получено решение данной краевой задачи для случая слабого поля.

*Ключевые слова*: уравнение Эйнштейна, метрический тензор, шар с однородной плотностью.

**1. Введение.** Известны различные решения уравнения Эйнштейна [1], описывающие гравитационное поле в пустом пространстве времени, в пространстве-времени с электромагнитным полем и в шаре, заполненном жидкостью, которая находится под давлением. Настоящая работа посвящена гравитационному полю, создаваемому некоторым распределением массы. Рассмотрен один из простейших случаев, когда масса равномерно распределена внутри некоторого шара и не движется. Сформулирована соответствующая краевая задача для уравнения Эйнштейна. При формулировке краевых условий на поверхности шара учитывается, что вне шара метрический тензор представляет собой решение Шварцшильда для пустого пространства-времени. При этом одна из координат, которые вводятся внутри шара, отличается от соответствующей координаты, используемой при записи решения Шварцшильда. Исходя из условия непрерывности и непрерывной дифференцируемости компонент метрического тензора на поверхности шара, найдена связь между данными координатами, что позволяет задать краевые условия на поверхности шара для поля внутри шара. Получено решение краевой задачи для случая слабого поля.

**2. Постановка задачи.** Введем такое распределение массы, которое можно рассматривать как шар с однородной плотностью. Предположим, что в некоторой локально лоренцевой системе отсчета [2, 3] функция распределения массы в конфигурационном пространстве [4], ассоциированном с этой системой отсчета, равна

$$\varrho = \begin{cases} \varrho_0, & r \leqslant R, \\ 0, & r > R, \end{cases}$$

и масса находится в покое в каждой точке конфигурационного пространства. Здесь $\varrho_0 = \mathrm{const}$, $r$ — расстояние от центра шара. Координата $r$ и две угловые координаты $\theta$, $\varphi$ образуют систему координат в конфигурационном пространстве, которую можно рассматривать как сферическую систему координат с началом в центре шара.

Задача, которую нужно решить, состоит в том, чтобы найти метрический тензор $g$ при следующих условиях: он должен удовлетворять уравнению Эйнштейна [5, 6]

$$R - \frac{1}{2} g \overline{R} = \alpha T \tag{1}$$

внутри и снаружи шара, компоненты $g_{ik}$ должны быть непрерывно дифференцируемыми функциями координат на поверхности шара и $g$ должен быть метрическим тензором плоского пространства-времени при $r \to \infty$. В этом уравнении $R$ обозначает тензор Риччи, $T$ — тензор энергии-импульса, $\overline{R} = g^{ik} R_{ik}$ — скалярную кривизну пространства-времени, $\alpha$ — некоторую постоянную.

В разных исследованиях тензор $T$ вводится различным образом. Здесь будем следовать работам [7–9], где $T$ определяется так, что $T_{00}$ есть функция распределения энергии в конфигурационном пространстве [4], представляющем собой поверхность $x^0 = \mathrm{const}$. Таким образом, внутри шара $T_{00} = \varrho_0 c^2$. Здесь $c$ — фундаментальная константа [3], известная как скорость света в вакууме. Все остальные компоненты тензора $T$ равны нулю, поскольку масса покоится.

**3. Решение внутри шара.** Предположим, что $r_g \ll R$, где $r_g = 2GM/c^2$ — гравитационный радиус, $G$ — гравитационная постоянная, $M = 4\pi R^3 \varrho_0 / 3$ — масса шара.

Будем искать внутреннее решение с точностью до членов первого порядка малости по $r_g/r$ в виде

$$\|g_{ik}\| = \mathrm{diag}(1 + ar^2 + b, -1, -r^2(1 + dr^2), -r^2(1 + dr^2)\sin^2\theta)$$

в координатах $x^0$, $r$, $\theta$, $\varphi$. Здесь $a, b, d$ — некоторые постоянные, такие, что величины $ar^2, b, dr^2$ имеют первый порядок малости по $r_g/r$. Малость добавленных членов к компонентам метрического тензора плоского пространства-времени означает, что рассматривается случай слабого поля.

Вычисляя символы Кристоффеля второго рода $\Gamma^k_{ij}$ с точностью до членов первого порядка малости, получаем, что

$$
\begin{gathered}
\Gamma^r_{00} = ar, \quad \Gamma^0_{r0} = ar, \\
\Gamma^r_{\theta\theta} = -r(1+2dr^2), \quad \Gamma^\theta_{r\theta} = \tfrac{1}{r}(1+dr^2), \\
\Gamma^r_{\varphi\varphi} = -r(1+2dr^2)\sin^2\theta, \quad \Gamma^\varphi_{r\varphi} = \tfrac{1}{r}(1+dr^2), \\
\Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta, \quad \Gamma^\varphi_{\theta\varphi} = \cot\theta.
\end{gathered} \tag{2}
$$

Все остальные символы Кристоффеля, отличающиеся от символов (2) не только перестановкой нижних индексов, равны нулю.

Компоненты тензора Риччи могут быть записаны в виде [5]

$$
R_{ij} = \frac{\partial\Gamma^k_{ij}}{\partial x^k} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \ln|\overline{g}|}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{1}{2}\Gamma^m_{ij}\frac{\partial \ln|\overline{g}|}{\partial x^m} - \Gamma^k_{mj}\Gamma^m_{ik},
$$

где $\overline{g} = \det\|g_{ik}\|$. В рассматриваемом случае

$$
\overline{g} = -r^4[1+(a+2d)r^2+b]\sin^2\theta.
$$

Тогда имеем, что

$$
\begin{gathered}
R_{00} = \tfrac{\partial\Gamma^r_{00}}{\partial r} + \tfrac{1}{2}\Gamma^r_{00}\frac{\partial \ln|g|}{\partial r} - 2\Gamma^r_{00}\Gamma^0_{0r} = 3a, \\
R_{rr} = -\tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2 \ln|g|}{\partial r^2} - 2\Gamma^0_{rr}\Gamma^r_{0r} - 2\Gamma^\theta_{r\theta}\Gamma^\theta_{r\theta} - 2\Gamma^\varphi_{r\varphi}\Gamma^\varphi_{r\varphi} = -a-6d, \\
R_{\theta\theta} = \tfrac{\partial\Gamma^r_{\theta\theta}}{\partial r} - \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2 \ln|g|}{\partial \theta^2} + \tfrac{1}{2}\Gamma^r_{\theta\theta}\frac{\partial \ln|g|}{\partial r} - 2\Gamma^r_{\theta\theta}\Gamma^\theta_{r\theta} - (\Gamma^\varphi_{\theta\varphi})^2 = (-a-6d)r^2, \\
R_{\varphi\varphi} = \tfrac{\partial\Gamma^r_{\varphi\varphi}}{\partial r} + \tfrac{\partial\Gamma^\theta_{\varphi\varphi}}{\partial \theta} + \tfrac{1}{2}\Gamma^r_{\varphi\varphi}\tfrac{\partial \ln|g|}{\partial r} + \tfrac{1}{2}\Gamma^\theta_{\varphi\varphi}\tfrac{\partial \ln|g|}{\partial \theta} - 2\Gamma^r_{\varphi\varphi}\Gamma^\varphi_{r\varphi} - 2\Gamma^\theta_{\varphi\varphi}\Gamma^\varphi_{\theta\varphi} = \\
= (-a-6d)r^2\sin^2\theta, \\
\overline{R} = 6a + 18d.
\end{gathered} \tag{3}
$$

Внедиагональные компоненты тензора Риччи равны нулю.

Подставляя величины (3) в уравнение Эйнштейна (1), получим следующие равенства:

$$
-9d = \alpha\varrho_0 c^2, \tag{4}
$$

$$
-a - 6d + \frac{1}{2}(6a+18d) = 2a + 3d = 0 \tag{5}
$$

для компонент с индексами 00 и для остальных компонент соответственно. Следовательно, если $6a = \alpha\varrho_0 c^2$, уравнение Эйнштейна удовлетворяется.

**4. Внешнее решение.** Решение снаружи шара есть решение Шварцшильда

$$
\|\tilde{g}^{\text{out}}_{ik}\| = \operatorname{diag}(1 - \frac{r_g}{\tilde{r}}, -1 - \frac{r_g}{\tilde{r}}, -\tilde{r}^2, -\tilde{r}^2\sin^2\theta), \tag{6}
$$

которое удовлетворяет уравнению Эйнштейна и условию на бесконечности. Символ «тильда» означает, что компонента берется в координатах $x^0 = ct$, $\tilde{r}$, $\theta$, $\varphi$. Координаты $x^0$ $\theta$, $\varphi$ те же, что и ранее, а координата $\tilde{r}$ — та, которая используется в выражении для решения Шварцшильда. Поскольку $r_g \ll r$, а на поверхности шара $r$ и $\tilde{r}$ отличаются на малую величину, то, как увидим далее, $r_g/\tilde{r}$ также мало. В выражении (6) и далее мы удерживаем только члены не выше первого порядка малости по $r_g/\tilde{r}$.

При формулировке краевой задачи для внутренней области можно использовать решение Шварцшильда для внешней области, но следует иметь в виду, что координата $\tilde{r}$ отличается от координаты $r$ и ее значение на поверхности шара заранее неизвестно. Тем не менее можно определить краевые условия для внутренней задачи, используя производную одной координаты по другой.

Примем во внимание, что координата $r$ есть расстояние от центра шара. Тогда легко увидеть, что $g_{rr}^{\mathrm{out}} = -1$ и $\partial\tilde{r}/\partial r = 1 - r_g/(2r)$. Для других компонент получим следующие выражения: $g_{00}^{\mathrm{out}} = \tilde{g}_{00}^{\mathrm{out}}$, $g_{\theta\theta}^{\mathrm{out}} = \tilde{g}_{\theta\theta}^{\mathrm{out}}$, $g_{\varphi\varphi}^{\mathrm{out}} = \tilde{g}_{\varphi\varphi}^{\mathrm{out}}$.

Нетривиальные производные этих компонент по $r$ равны

$$\frac{\partial g_{00}^{\mathrm{out}}}{\partial r} = \frac{\partial g_{00}^{\mathrm{out}}}{\partial \tilde{r}} \frac{\partial \tilde{r}}{\partial r} = \frac{r_g}{\tilde{r}^2}\left(1 - \frac{r_g}{2\tilde{r}}\right),$$

$$\frac{\partial g_{\theta\theta}^{\mathrm{out}}}{\partial r} = \frac{\partial g_{\theta\theta}^{\mathrm{out}}}{\partial \tilde{r}} \frac{\partial \tilde{r}}{\partial r} = -2\tilde{r}\left(1 - \frac{r_g}{2\tilde{r}}\right)$$

с точностью до величин первого порядка малости по $r_g/\tilde{r}$.

Компоненты с индексами $\varphi\varphi$ отличаются от компонент с индексами $\theta\theta$ только множителем $\sin^2\theta$, и учет их дает тот же результат, как для компонент с индексами $\theta\theta$. По этой причине эти компоненты далее не рассматриваем.

**5. Краевые условия на поверхности шара.** Непрерывная дифференцируемость решения означает, что компоненты решения снаружи и внутри шара и их производные по $r$ должны быть равны на поверхности шара $r = R$, которую обозначим через $S$:

$$g_{00}|_S = g_{00}^{\mathrm{out}}|_S, \quad \frac{\partial g_{00}}{\partial r}|_S = \frac{\partial g_{00}^{\mathrm{out}}}{\partial r}|_S, \quad g_{\theta\theta}|_S = g_{\theta\theta}^{\mathrm{out}}|_S, \quad \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r}|_S = \frac{\partial g_{\theta\theta}^{\mathrm{out}}}{\partial r}|_S.$$

Эти равенства дают, что

$$1 + aR^2 + b = 1 - \frac{r_g}{\tilde{R}}, \tag{7}$$

$$2aR = \frac{r_g}{\tilde{R}^2}\left(1 - \frac{r_g}{2\tilde{R}}\right), \tag{8}$$

$$R^2(1 + dR^2) = \tilde{R}^2, \tag{9}$$

$$R + 2dR^3 = \tilde{R}\left(1 - \frac{r_g}{2\tilde{R}}\right). \tag{10}$$

Здесь $\tilde{R}$ обозначает величину координаты $\tilde{r}$ на поверхности шара. Из уравнения (9) находим, что

$$\tilde{R} = R\left(1 + \frac{1}{2}dR^2\right).$$

Подставляя $\tilde{R}$ в уравнение (10), получим, что

$$d = -\frac{r_g}{3R^3} = -\frac{8\pi}{9}\frac{G\varrho_0}{c^2}. \tag{11}$$

Уравнение (8) дает, что

$$a = \frac{r_g}{2R^3}.$$

Эти значения $a$ и $d$ удовлетворяют условию (5). Используя равенства (4) и (11), можно видеть, что

$$\alpha = \frac{8\pi G}{c^4}.$$

Величина $\alpha$ найдена А. Эйнштейном [5] и используется обычно в его уравнении. Из (7) можно получить, что

$$b = -\frac{3r_g}{2R}.$$

**6. Заключение.** Найденное решение согласуется с классическим выражением для гравитационного потенциала $\Phi$ шара с однородной плотностью массы

$$\Phi(r) = \begin{cases} 2\pi G\varrho_0(r^2 - R^2)/3 - GM/R, & r \leqslant R, \\ -GM/r, & r > R, \end{cases}$$

при условии $\Phi(\infty) = 0$, если принять во внимание, что для слабого гравитационного поля [5]

$$g_{00} = 1 + 2\frac{\Phi}{c^2}.$$

Полученное решение можно использовать в качестве примера при анализе законов сохранения для гравитационного поля, в которых взаимодействие массы с создаваемым ею полем дает вклад в энергию и импульс гравитационного поля [10].

### Литература


1. *Stephani H., Kramer D., MacCallum M. A. H., Hoenselaers C., Herlt E.* Exact solutions of Einstein's field equations. Ed. 2. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. 701 p.
2. *Drivotin O. I.* Rigorous definition of the reference frame // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2014. Т. 10. Вып. 4. С. 25–36.
3. *Дривотин О. И.* Об определении геометрии пространства-времени // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2022. Т. 18. Вып. 3. С. 316–327. https://www.doi.org/10.21638/11701/spbu10.2022.302
4. *Дривотин О. И.* Covariant description of phase space distributions // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2016. Т. 12. Вып. 3. С. 39–52. https://www.doi.org/10.21638/11701/spbu10.2016.304
5. *Einstein A.* Die grundlage der allgemeinen relativitatsteorie // Ann. d. Phys. 1916. Vol. 49. P. 769–822.
6. *Дривотин О. И.* Математические основы теории поля. СПб.: Изд-во Санкт-Петербургского университета, 2010. 168 с.
7. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. М.: Наука, 1973. 504 с.
8. *Wang C.-C.* Mathematical principles of mechanics and electromagnetism. Pt B. Electromagnetism and gravitation. New York: Plenum, 1979. 386 p.
9. *Gron O., Hervik S.* Einstein's general theory of relativity. New York: Springer Verlag, 2007. 558 p.
10. *Дривотин О. И.* О плотности потока импульса гравитационного поля // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2021. Т. 17. Вып. 2. С. 137–147. https://www.doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.204



Статья поступила в редакцию 24 октября 2023 г.
Статья принята к печати 26 декабря 2023 г.



Контактная информация:

*Дривотин Олег Игоревич* — д-р физ.-мат. наук; o.drivotin@spbu.ru


## The Einstein equation solution inside a ball with uniform density


*O. I. Drivotin*

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg,
199034, Russian Federation

**For citation:** Drivotin O. I. The Einstein equation solution inside a ball with uniform density. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2024, vol. 20, iss. 1, pp. 4–9. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2024.101 (In Russian)

A great number of solutions of the Einstein field equation are known. They describe the gravitational field in the empty spacetime, in the spacetime with electromagnetic field and for a ball filled with a liquid under pressure. The present work is devoted to gravitational field generated by some mass distribution. One of the simplest cases is considered, when mass is uniformely distributed inside a ball and is not moving. The boundary problem for the Einstein equation is formulated. Solution outside the ball is the Schwartzschild solution in vacuum. The coordinates at which the Schwartzschild solution is written are different from the coordinates used in equations for components of the metric tensor inside the ball. Relations between internal and external coordinates are found on the ball surface. They allow to use the Schwartzschild solution for formulation of boundary conditions for internal solution. The solution of the boundary problem is found for the case of weak field. This solution can be used as an example in the analysis of laws of conservation for the gravitational field, in which interaction of mass with field generated by the mass gives a contribution to momentum and energy of the gravitational field.

*Keywords*: the Einstein equation, metric tensor, ball with uniform mass density.

## References

1. Stephani H., Kramer D., MacCallum M. A. H., Hoenselaers C., Herlt E. *Exact solutions of Einstein's field equations.* Ed. 2. Cambridge, Cambridge University Press, 2003, 701 p.

2. Drivotin O. I. Rigorous definition of the reference frame. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2014, vol. 10, iss. 4, pp. 25–36.

3. Drivotin O. I. Ob opredelenii geometrii prostranstva-vremeni [On the determination of spacetime geometry]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2022, vol. 18, iss. 3, pp. 316–327. https://www.doi.org/10.21638/11701/spbu10.2022.302 (In Russian)

4. Drivotin O. I. Covariant description of phase space distributions. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2016, vol. 12, iss. 3, pp. 39–52. https://www.doi.org/10.21638/11701/spbu10.2016.304

5. Einstein A. Die grundlage der allgemeinen relativitatsteorie. *Ann. d. Phys.*, 1916, vol. 49, pp. 769–822.

6. Drivotin O. I. *Matematicheskiye osnovy teorii polya* [*Mathematical foundations of the field theory*]. St. Petersburg, St. Petersburg University Press, 2010, 168 p. (In Russian)

7. Landau L. D., Lifshitz E. M. *Teoriya polya* [*Field theory* ]. Moscow, Nauka Publ., 1973, 504 p. (In Russian)

8. Wang C.-C. *Mathematical principles of mechanics and electromagnetism. Pt B. Electromagnetism and gravitation.* New York, Plenum Publ., 1979, 386 p.

9. Gron O., Hervik S. *Einstein's general theory of relativity.* New York, Springer Verlag Publ., 2007, 558 p.

10. Drivotin O. I. O plotnosti potoka impulsa gravitatsionnogo polya [On momentum flow density of the gravitational field]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes,* 2021, vol. 17, iss. 2, pp. 137–147. https://www.doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.204 (In Russian)

Received: October 24, 2023.
Accepted: December 26, 2023.

A u t h o r's i n f o r m a t i o n:

*Oleg I. Drivotin* — Dr. Sci. in Physics and Mathematics; o.drivotin@spbu.ru