ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.929.4
MSC 74G55

Оптимальное управление тепловыми и волновыми процессами в слоистых композитных материалах

А. П. Жабко[1], *В. В. Карелин*[1], *В. В. Провоторов*[2], *С. М. Сергеев*[3]

[1] Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9
[2] Воронежский государственный университет,
Российская Федерация, 394006, Воронеж, Университетская пл., 1
[3] Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Российская Федерация, 195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, 29

Для цитирования: *Жабко А. П., Карелин В. В., Провоторов В. В., Сергеев С. М.* Оптимальное управление тепловыми и волновыми процессами в слоистых композитных материалах // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2023. Т. 19. Вып. 3. С. 403–418.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.308

В работе указаны подход и соответствующий ему метод штрафных функций для анализа задач оптимального управления тепловыми и волновыми процессами в элементах конструкций из композитных материалов (композитов). Рассматривается объект, достаточно часто встречающийся в промышленной сфере, структура которого представляет собой совокупность слоев (фаз) из однонаправленных композитов, — слоистые композиты. При решении задач, связанных с анализом и описанием состояний композитов, обычно используют количественные характеристики слоев, которые не являются функциями координат точек среды, с тем, чтобы не решать соответствующие задачи для неоднородной среды. К таким функциям относятся элементы соболевских пространств, прежде всего суммируемые с квадратом функции. Удобство состоит в том, что при отыскании условий разрешимости начально-краевых задач различного типа (в большинстве случаев такие задачи есть основа математических моделей многих физических процессов) возможна редукция к операторно-разностным системам, для которых несложно построить априорные оценки слабых решений. Следующий шаг после установления слабой разрешимости начально-краевой задачи теплового или волнового процесса в композитах — постановка и решение задачи оптимального управления этими процессами. Предлагаемый метод штрафных функций на примере решения данной задачи является *общим методом.* Он применим с небольшими видоизменениями также не только в случае эллиптических, параболических и других задач (в том числе нелинейных) для скалярных функций, но и для векторных функций. Пример последнего —

широко используемая в описании сетеподобных гидродинамических процессов система Навье — Стокса, рассматриваемая в пространствах Соболева, элементами которых служат функции с носителями на n-мерных сетеподобных областях, $n \geqslant 2$.

Ключевые слова: композитные материалы, слоистая область, начально-краевая задача, слабая разрешимость, оптимальное управление, метод штрафных функций.

1. Введение. В работе представлены методы анализа эволюционных моделей тепловых и волновых процессов в композитных материалах, пространственная переменная которых изменяется в слоистой области (развитие результатов анализа сетеподобных тепловых и волновых процессов [1, 2]). Изучаются процессы переноса теплоты и волновые процессы, происходящие в слоистых композитных материалах, которые представляют собой конечное число плотно прилегающих между собой фаз (слоев) с различными свойствами. Имеются несколько подходов, основанных на тех или иных математических и физических соображениях для математического описания тепловых и волновых явлений на границах прилегания слоев композитного материала в терминах балансовых соотношений. Приводится подробное описание двух из этих подходов, устанавливается слабая разрешимость определенных на слоистой области дифференциальных систем (их аналоги использованы в работах [3, 4]), проведен анализ задач оптимального управления указанными системами с применением метода штрафных функций [2].

В приложениях такие балансовые соотношения устанавливают закономерности перемещения потоков различного типа сплошных сред.

2. Слоистые области. Математическое описание слоистой области аналогично описанию сетеподобной области в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, приведенному в работах [1, 2]. Связная ограниченная область $\Im \subset \mathbb{R}^3$ ($\partial\Im$ — граница $\Im$) состоит из двух множеств: множество не пересекающихся между собой подобластей (слои области) $\Im_j$ ($\partial\Im_j$ — граница $\Im_j$), $j = 0, 1, 2, ..., N$, и множество поверхностей S_j, $j = 1, 2, ..., N$, посредством которых эти подобласти (слои) связаны между собой, примыкая друг к другу. При этом поверхности S_j являются общими частями границ примыкающих подобластей $\Im_{j-1}$, $\Im_j$ ($j = 1, 2, ..., N$) и называются поверхностями примыкания подобластей. Таким образом, слоистая область $\Im$ с границей $\partial\Im$ определяется соотношениями

$$\Im = \left(\bigcup_{j=0}^{N} \Im_j\right) \bigcup \left(\bigcup_{j=1}^{N} S_j\right), \quad \partial\Im = \left(\bigcup_{j=0}^{N} \partial\Im_j\right) \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{N} S_j\right).$$

Везде будем предполагать, что области $\Im_j$, $j = 0, 1, 2, ..., N$, липшицевы, S_j — гладкие, каждая подобласть $\Im_j$ звездная относительно шара из $\Im_j$. Количественные характеристики и свойства изучаемых тепловых или волновых процессов на этих подобластях могут существенно различаться, описание физических явлений изучаемого процесса на поверхностях S_j характеризуется определенными балансными соотношениями (далее — условиями примыкания подобластей $\Im_j$) и будет представлено ниже.

3. Основные понятия и определения. В дальнейших рассуждениях используем классические пространства действительных измеримых по Лебегу функций $u(x)$, где $x = (x_1, x_2, x_3)$ принадлежит классической области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ [5, с. 29]:

• $L_2(\Omega)$ — пространство, элементами которого являются функции $u(x)$, суммируемые с квадратом в области Ω, скалярное произведение $(u, v)_\Omega$ определено соотношением

$$(u, v)_\Omega = \int_\Omega u(x)v(x)dx, \quad \|u\|_\Omega = \sqrt{(u, u)_\Omega}, \tag{1}$$

где $(u,v)_\Omega = \int\limits_\Omega u(x)v(x)dx, \quad \|u\|_\Omega = \sqrt{(u,u)_\Omega};$

• $W_2^1(\Omega)$ — пространство, элементами которого являются функции $u(x) \in L_2(\Omega)$, имеющие обобщенные производные $\frac{\partial u(x)}{\partial x_\iota} \in L_2(\Omega)$ ($\iota = 1,2,3$), скалярное произведение и норма определены соотношениями

$$(u,v)_\Omega^1 = \int\limits_\Omega \left(u(x)v(x) + \sum_{\iota=1}^n \frac{\partial u(x)}{\partial x_\iota}\frac{\partial v(x)}{\partial x_\iota} \right) dx, \quad \|u\|_\Omega^1 = \sqrt{(u,u)_\Omega^1}; \tag{2}$$

• $W_{2,0}^1(\Omega) \subset W_2^1(\Omega)$ — ядро пространства $W_2^1(\Omega)$, т. е.

$$W_{2,0}^1(\Omega) = \{u: \ u \in W_2^1(\Omega), \ \ u|_{x\in\partial\Omega} = 0\}.$$

Для сетеподобной области $\Im$ интеграл $\int\limits_\Im u(x)dx$ находится по формуле $\int\limits_\Im u(x)dx = \sum\limits_{j=0}^N \int\limits_{\Im_j} u(x)dx$. Пространства $L_2(\Im)$, $W_2^1(\Im)$ и $W_{2,0}^1(\Im)$ вводятся аналогично указанным выше, скалярные произведения и нормы определяются выражениями

$$(u,v)_\Im = \sum_{j=0}^N \int\limits_{\Im_l} u(x)v(x)dx, \quad \|u\|_\Im = \sqrt{(u,u)_\Im}, \tag{3}$$

$$(u,v)_\Im^1 = \sum_{j=0}^N \int\limits_{\Im_l} \left(u(x)v(x) + \sum_{\iota=1}^3 \frac{\partial u(x)}{\partial x_\iota}\frac{\partial v(x)}{\partial x_\iota} \right) dx, \tag{4}$$

$$\|u\|_\Im^1 = \left(\sum_{j=0}^N \int\limits_{\Im_l} (u^2(x) + \sum_{\iota=1}^3 (\frac{\partial u(x)}{\partial x_\iota})^2) dx \right)^{1/2} = \sqrt{(u,u)_\Im^1}, \tag{5}$$

вытекающими из соотношений (1), (2): формулы (3) и (4) — для $L_2(\Im)$, (5) — для $W_2^1(\Im)$, $W_{2,0}^1(\Im)$ соответственно.

В дальнейшем будут рассмотрены операторно-разностные системы, используемые для обоснования разрешимости исходных эволюционных дифференциальных систем математических моделей тепловых и волновых процессов в композитных материалах. Вводятся пространства допустимых решений со свойствами, описывающими на поверхностях S_j, $j = 1, 2, ..., N$, условия примыкания, которые моделируют закономерности физических явлений на этих поверхностях. Рассматриваются два подхода моделирования таких явлений, в основе которых лежат описание явлений, вытекающее из физической сути изучаемых процессов (применяется в классических постановках краевых задач), и математические формализмы описания, когда возникает необходимость замены классических постановок краевых задач обобщенными (слабыми постановками [6, 7]).

Приведем первый подход, основанный на физических соображениях для математического описания тепловых и волновых явлений на границах компонентов (фаз) композитного материала. Для этого необходимо получить условия продолжения функций $u(x)$ с сетеподобной области $\Im$ на $\overline{\Im} = \bigcup\limits_{j=0}^N \overline{\Im}_j$. Для классической области Ω рассмотрим множество $C(\overline{\Omega})$ непрерывных в $\overline{\Omega}$ функций. Считаем, что для функции $u(x) \in C(\overline{\Omega})$ существует производная, непрерывная в замыкании $\overline{\Omega}$ области Ω, если эта производная продолжается по непрерывности с Ω на $\overline{\Omega}$ (топология на замыкании $\overline{\Omega}$ определяется топологией Ω). Исходя из сказанного, можно считать, что введено множество $C^1(\overline{\Omega})$ с элементами $u(x)$, для которых определены непрерывные производные $\frac{\partial u(x)}{\partial x_\iota}$ ($\iota = 1, 2, 3$) в $\overline{\Omega}$, при этом по соотношению (1) в $C^1(\overline{\Omega})$ находится скалярное произведение, а по формуле (2) — норма. Таким образом, учитывая $\Omega = \Im_j$ при каждом j ($j = \overline{0, N}$), для функций на замыкании $\overline{\Im}$ области $\Im$ сформированы следующие множества: $C(\overline{\Im})$ — множество непрерывных в $\overline{\Im}$ функций $u(x)$, скалярное произведение и норма определяются соотношениями (3), $C^1(\overline{\Im}_j)$ ($j = \overline{0, N}$) — совокупность N множеств функций $u(x) \in C(\overline{\Im})$, имеющих непрерывные производные $\frac{\partial u(x)}{\partial x_\iota}$ ($\iota = 1, 2, 3$) в $\overline{\Im}_j$ для любого j ($j = \overline{0, N}$), $C^1(\overline{\Im})$ — множество функций $u(x) \in C^1(\overline{\Im}_j)$ ($j = \overline{0, N}$), для которых скалярное произведение и норма определены соотношениями (4) и (5) соответственно.

В дальнейших рассуждениях будем использовать дифференциальное выражение

$$\mathcal{A}u := -\sum_{\kappa, \iota = 1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_\kappa} \left(a_{\kappa\,\iota}(x) \frac{\partial u}{\partial x_\iota} \right) + b(x)u,$$

которое определяет линейный положительный эллиптический оператор краевых задач математических моделей тепловых и волновых процессов; здесь $a_{\kappa\,\iota}(x)$, $b(x)$ — ограниченные функции из пространства $L_2(\Im)$ (необходимые пояснения приведены ниже).

Обозначим через $\tilde{C}^1(\overline{\Im})$ множество функций $u(x) \in C^1(\overline{\Im})$, которые на поверхностях примыкания S_j ($j = \overline{1, N}$) связаны условиями примыкания

$$u(x)|_{S_j^+} = u(x)|_{S_j^-}, \quad \int\limits_{S_j^+} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu_\Lambda} dS + \int\limits_{S_j^-} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu_\Lambda} dS = 0, \tag{6}$$

где $j = \overline{1, N}$; $\frac{\partial u(x)}{\partial \nu_\Lambda} = \sum\limits_{\kappa,\, \iota = 1}^{3} a_{\kappa\,\iota}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_\iota} \cos(\bar{n},\, x_\kappa)$ на S_j (S_j — двухсторонняя поверхность: S_j^+, S_j^-); $\cos(\bar{n},\, x_\kappa)$ — κ-й направляющий косинус внешней нормали $\bar{n} := \bar{n}(x)$ к границе (используются обозначения, принятые в монографии [8, с. 32]). Соотношения (6) есть прямое следствие описания свойств физических явлений в местах примыкания фаз (компонентов) композиционного материала. А именно, если (6) рассматривать применительно к тепловому процессу, то первое соотношение означает равенство температур фаз по обе стороны S_j^+ и S_j^- поверхностей примыкания S_j, второе — баланс тепловых потоков на S_j.

Замечание 1. Условия (6), основанные на физической сути закономерностей тепловых или волновых явлений на границах S_j фаз композиционного материала, могут меняться в результате изменений этих закономерностей, принимая, к примеру, следующий вид:

$$u(x)|_{S_j^+} = u(x)|_{S_j^-}, \quad \int\limits_{S_j^+} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu_\Lambda} dS + \int\limits_{S_j^-} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu_\Lambda} dS + \int\limits_{S_j^-} g(x) dS = 0, \quad j = \overline{1, N}.$$

Присутствие слагаемого $\int\limits_{S_j^-} g(x) dS$ во втором соотношении означает наличие сил внешнего влияния на процесс со стороны S_j^-, $g(x)$ — количественная характеристика (плотность распределения) этих сил. Очевидно изменение данного соотношения, если воздействие сил внешнего влияния на процесс осуществляется со стороны S_j^+.

Определение 1. Пространство $\tilde{W}^1(\Im)$ — замыкание $\tilde{C}^1(\overline{\Im})$ в $W_2^1(\Im)$, т. е. по норме (5).

Из определения вытекает основное свойство элементов $u(x) \in \tilde{W}^1(\Im)$: сужение $u(x)_{\Im_j}$ функции $u(x)$ на подобласть $\Im_j$ является элементом $W_2^1(\Im_j)$, $j = 0, 1, 2, ..., N$. Кроме того, учитывая $\Im_j \subset \Im$ $(j = 0, 1, ..., N)$, из существования обобщенных производных $\frac{\partial u(x)}{\partial x_\iota}$, $\iota = 1, 2, 3$, в $\Im$ вытекает существование их в $\Im_j$. Таким образом, элементы $u(x) \in \tilde{W}^1(\Im)$ удовлетворяют условиям примыкания (6) и $\tilde{W}^1(\Im)$ является пространством состояний операторно-разностной системы, введенной в п. 4.

Обозначим через $\tilde{C}^1(\overline{\Im})$ множество $\tilde{C}^1(\overline{\Im})$, элементы $u(x)$ которого удовлетворяют условию $u(x)|_{\partial\Im} = 0$.

Определение 2. Пространство $\tilde{W}_0^1(\Im)$ — замыкание $\tilde{C}_0^1(\Im)$ в $W_2^1(\Im)$.

Замечание 2. Введенные выше пространства $\tilde{W}_0^1(\Im) \subset \tilde{W}^1(\Im)$, $\tilde{W}^1(\Im)$ применяются как пространства допустимых состояний краевой задачи с дифференциальным оператором $\mathcal{A}$, определенным в этих пространствах. При этом для задачи с краевыми условиями типа Дирихле используется $\tilde{W}_0^1(\Im)$, для задачи с более общими краевыми условиями — $\tilde{W}^1(\Im)$.

Приведем другой подход для описания пространств, аналогичных пространствам $\tilde{W}^1(\Im)$ и $\tilde{W}_0^1(\Im)$, который основан на применении класса суммируемых в области $\Im$ функций для математического описания тепловых и волновых явлений на границах фаз композиционного материала; соответствующие краевые задачи рассматриваются в слабой постановке [2].

Для введенного выше дифференциального выражения $\mathcal{A}u$ соотношением

$$\varrho(u, \eta) = \int\limits_{\Im} \left(\sum_{\kappa,\iota=1}^{3} a_{\kappa\,\iota}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_\iota} \frac{\partial \eta(x)}{\partial x_\kappa} + b(x) u(x) \eta(x) \right) dx \tag{7}$$

зададим билинейную непрерывную симметричную форму относительно $u(x), \eta(x)$, определенную на $W_2^1(\Im) \times W_2^1(\Im)$. Будем считать выполненными для (7) следующие условия:

$$a_{\kappa\,\iota}(x) = a_{\iota\,\kappa}(x), \quad a_* \xi^2 \leqslant \sum_{\kappa,\iota=1}^{3} a_{\kappa\,\iota}(x) \xi_\kappa \xi_\iota \leqslant a^* \xi^2, \quad 0 < \beta_* \leqslant b(x) \leqslant \beta^*, \ \ x \in \Im. \tag{8}$$

Здесь $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3$, $\xi^2 = \sum\limits_{\kappa=1}^{3} \xi_\kappa^2$, положительные постоянные a_*, a^*, β фиксированы, кроме того $a_{\kappa\,\iota}(x), b(x) \in L_2(\Im)$; соотношения выполняются почти всюду на $\Im$. В силу соотношений (8), имеет место неравенство $\varrho(u, u) \geqslant a_* \|u\|^2_{W_2^1(\Im)}$ для любого $u \in W_2^1(\Im)$. Откуда вытекает существование единственного элемента $u \in W_2^1(\Im)$, для которого (лемма Лакса—Мильграма, см. работу [5]) справедливо соотношение

$$\varrho(u, \eta) = L(\eta) \quad \forall \eta \in W_2^1(\Im). \tag{9}$$

Используя дифференциальное выражение $\mathcal{A}u$, получим формальное описание дифференциальной системы в слабой постановке вместе с необходимыми соотношениями на поверхностях примыкания S_j, $j = \overline{1, N}$, подобластей $\Im_j$.

Пусть задана функция $f(x) \in L_2(\Im)$. Обозначим через L линейный непрерывный функционал в $W_2^1(\Omega)$, определяемый линейной формой

$$L(\eta) = \int\limits_{\Im} f(x) \eta(x) dx, \ \ \eta(x) \in W_2^1(\Im). \tag{10}$$

Дальнейшие рассуждения формальны, используют формулу Грина, полное обоснование которой для слоистой области $\Im$ аналогично приведенному в монографии [8].

Тогда соотношение (9) можно описать формализмами дифференциальных уравнений в слабой постановке следующим образом.

Введем функции $\eta_j(x) \in W^1_{2,0}(\Im)$, $j = 0, 1, 2, ..., N$:

$$\eta_j(x) = \eta(x), \;\; x \in \Im_j, \;\;\; \eta_j(x) = 0, \;\; x \in \Im \backslash \Im_j, \;\; j = \overline{0, N}.$$

Заменяя в (9), (10) $\eta(x)$ на $\eta_j(x)$ и применяя формулу Грина для каждой подобласти $\Im_j$ $(j = 0, 1, 2, ..., N)$, приходим к соотношениям

$$\int\limits_{\Im_j} (\mathcal{A}u)(x)\eta_j(x)dx = -\int\limits_{\partial\Im_j} \tfrac{\partial u}{\partial \nu_{\mathcal{A}}}\eta(x)dx + \varrho(u, \eta_j) = \int\limits_{\Im_j} f(x)\eta_j(x)dx, \tag{11}$$

где

$$\tfrac{\partial u}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} = \sum_{\kappa,\iota=1}^{3} a_{\kappa\,\iota}(x)\tfrac{\partial u}{\partial x_\iota}\cos(\mathbf{n}_j,\, x_\kappa). \tag{12}$$

В (12) $\cos(\mathbf{n}_j,\, x_\kappa)$ — κ-й направляющий косинус внешней нормали $\mathbf{n}_j$ к поверхности S_j для каждого фиксированного j $(j = 1, 2, ..., N)$. Отсюда следует, что $u(x)$ удовлетворяет уравнению (13)

$$\mathcal{A}u = f(x), \;\; x \in \Im_j, \tag{13}$$

в слабой постановке при каждом фиксированном j $(j = 0, 1, 2, ..., N)$. Последнее означает, что $u(x)$ удовлетворяет интегральным тождествам

$$\varrho(u, \eta_j) = \int\limits_{\Im_j} f(x)\eta_j(x)dx \quad \forall \eta_j(x) \in W^1_{2,0}(\Im_j)$$

для всех $j = 0, 1, 2, ..., N$.

Пусть далее функция $\eta(x)$ является элементом пространства $W^1_2(\Im)$, отлична от нуля на всех поверхностях S_j, $j = 1, 2, ..., m$, $1 \leqslant m \leqslant N$, и равна нулю на всех оставшихся поверхностях S_j. Из уравнения (13) следует, что

$$\sum_{j=0}^{m} \int\limits_{\Im_j} \mathcal{A}u(x)\eta(x)dx = \sum_{j=0}^{m} \int\limits_{\Im_j} f(x)\eta(x)dx.$$

Применяя формулу Грина ко всем слагаемым левой части полученного равенства, приходим к следующему соотношению (см. аналогичное равенство (11) и представление (10) линейной формы $L(\eta)$):

$$-\sum_{j=1}^{m} \int\limits_{S_j^+} \tfrac{\partial u}{\partial \nu_{\mathcal{A}}}\eta(x)dx - \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{S_j^-} \tfrac{\partial u}{\partial \nu_{\mathcal{A}}}\eta(x)dx + \varrho(u, \eta_j) = \int\limits_{\Im} f(x)\eta(x)dx,$$

или

$$-\sum_{\text{æ}=1}^{m} \left(\int\limits_{S_j^+} \tfrac{\partial u}{\partial \nu_{\mathcal{A}}}\eta(x)dx + \int\limits_{S_j^-} \tfrac{\partial u}{\partial \nu_{\mathcal{A}}}\eta(x)dx \right) + \varrho(u, \eta) = \int\limits_{\Im} f(x)\eta(x)dx, \tag{14}$$

где S_j^+, S_j^- — односторонние поверхности для S_j, а $\frac{\partial u}{\partial \nu_{\mathcal{A}}}$ определяется аналогично формуле (12), причем нормали для S_j^+, S_j^- выбираются внешними по отношению к примыкающим (смежным) областям $\Im_j$, $\Im_{j+1}$ соответственно $(j = 0, 1, 2, ..., m-1$, $1 \leqslant m \leqslant N)$.

Таким образом, если в (14) поочередно фиксировать $m = 1$, $m = 2$,..., $m = N$, тогда, учитывая равенство (9), приходим к соотношениям

$$\int\limits_{S_j^+} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \eta(x) dx + \int\limits_{S_j^-} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \eta(x) dx = 0, \ \ j = \overline{1, m}, \ \ 1 \leqslant m \leqslant N. \tag{15}$$

Если при этом добавить естественные условия на функцию $u(x)$

$$u(x)|_{S_j^+} = u(x)|_{S_j^-}, \ \ j = \overline{1, N}, \tag{16}$$

характерные для граничных слоев композитных материалов тепловых и волновых процессов, наблюдаемых в этих материалах, тогда получаем представленные выше условия (6), вытекающие из физических закономерностей процессов.

Замечание 3. Следует отметить, как сделано в замечании 1, что наличие сил $g(x)$ внешнего воздействия на процесс в местах примыкания слоев композитного материала вызывает изменение представления линейной формы (10):

$$L(\eta) = \int\limits_{\Im} f(x)\eta(x)dx + \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{S_j} g(x)\eta(x)dx, \quad \eta(x) \in W_2^1(\Im).$$

Последующие действия, подобные указанным выше, приводят к условиям, упомянутым в замечании 1.

Построение необходимых пространств, аналогичных пространствам $\tilde{W}^1(\Im)$ и $\tilde{W}_0^1(\Im)$, в этом случае несколько отличается от рассмотренного выше.

Пусть $\mathcal{X}(\Im) := \Big\{u: \ u(x) \in \tilde{C}^1(\overline{\Im})\Big\}$ (напомним, $\tilde{C}^1(\overline{\Im})$ — множество функций $u(x) \in C^1(\overline{\Im})$, которые на поверхностях S_j $(j = \overline{1, N})$ удовлетворяют соотношениям (15), (16) или (6)), и пусть $\mathcal{X}_0(\Im) := \Big\{u: \ u(x) \in \tilde{C}^1(\overline{\Im}), \ u(x)|_{\partial\Im} = 0\Big\}$, $\mathcal{X}_0(\Im) \subset \mathcal{X}(\Im)$.

Определение 3. Пространство $\tilde{W}^1(\Im)$ — замыкание $\mathcal{X}(\Im)$ в норме $W_2^1(\Im)$.

Определение 4. Пространство $\tilde{W}_0^1(\Im)$ — замыкание $\mathcal{X}_0(\Im)$ в норме $W_2^1(\Im)$.

Замечание 4. Для упрощения изложения полученных ниже результатов оставляем для введенных пространств те же обозначения, что и использованные выше в аналогичных определениях 1 и 2. Ясно, что пространства $\tilde{W}^1(\Im)$, $\tilde{W}_0^1(\Im)$, снабженные скалярным произведением и нормой $W_2^1(\Im)$, являются гильбертовыми.

4. Дифференциальные и операторно-разностные системы. Математическое описание тепловых и волновых процессов в композиционных материалах осуществляется с помощью дифференциальных систем

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_\kappa}\left(a_{\kappa\,\iota}(x)\frac{\partial y}{\partial x_\iota}\right) + b(x)y = f(x,t), \tag{17}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_\kappa}\left(a_{\kappa\,\iota}(x)\frac{\partial y}{\partial x_\iota}\right) + b(x)y = f(x,t) \tag{18}$$

соответственно, здесь $\frac{\partial}{\partial x_\kappa}\left(a_{\kappa\,\iota}(x)\frac{\partial y}{\partial x_\iota}\right) := \sum\limits_{\kappa,\iota=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_\kappa}\left(a_{\kappa\,\iota}(x)\frac{\partial u}{\partial x_\iota}\right)$, пространственная переменной $x = (x_1, x_2, x_3)$ изменяется в слоистой области $\Im$.

Для дифференциальных систем (17), (18) введем пространства состояний $\tilde{W}_0^{1,0}(\Im_T)$ и $\tilde{W}_0^1(\Im_T)$, $\Im_T = \Im \times (0,T)$, $T < \infty$.

Определение 5. Пространство $\tilde{W}_0^{1,0}(\Im_T)$ — замыкание в норме

$$\|y\|_{\Im_T}^{1,0} = \left(\sum_{j=0}^{N} \int\limits_{\Im_j \times (0,T)} \left(y^2 + \sum_{\iota=1}^{n} y_{x_l}^2\right) dxdt\right)^{1/2}$$

всех функций $y(x,t) \in L_2(\Im)$, следы которых $y(x,t_0) \in \widetilde{W}_0^1(\Im)$, $t_0 \in (0,T)$, непрерывно зависят от t_0 в $W_2^1(\Im)$.

Определение 6. Если в определении 5 норму $\|y\|_{\Im_T}^{1,0}$ заменить на

$$\|y\|_{\Im_T}^{1} = \left(\sum_{j=0}^{N} \int\limits_{\Im_j \times (0,T)} \left(y^2 + y_t^2 + \sum_{\iota=1}^{n} y_{x_l}^2 \right) dxdt \right)^{1/2},$$

то получим пространство $\tilde{W}_0^1(\Im_T)$; $\tilde{W}_0^1(\Im_T) \subset \tilde{W}_0^{1,0}(\Im_T)$.

Математическое описание тепловых процессов в композитном материале, моделирующимся слоистой областью $\Im$, определяется уравнением (17), начальным условием

$$y|_{t=0} = \vartheta(x), \ \ x \in \Im, \tag{19}$$

и краевыми условиями

$$y|_{x \in \partial\Im_T} = 0. \tag{20}$$

Таким образом, математическая модель тепловых процессов в композитном материале определена начально-краевой задачей (17), (19), (20) в пространстве $\tilde{W}_0^{1,0}(\Im_T)$, функция $\vartheta(x)$ задана.

Математическое описание волновых процессов в композитном материале определяется уравнением (18), начальными условиями

$$y|_{t=0} = \vartheta(x), \ \ \frac{\partial y}{\partial t}|_{t=0} = \vartheta_1(x) \tag{21}$$

и краевыми условиями

$$y|_{x \in \partial\Im_T} = 0, \tag{22}$$

совпадающими с (20), и математическая модель волновых процессов в композитном материале определена начально-краевой задачей (18), (21), (22) в пространстве $\tilde{W}_0^1(\Im_T)$, функции $\vartheta(x)$, $\vartheta_1(x)$ заданы.

В уравнениях (17), (18) предполагается $f(x,t) \in L_{2,1}(\Im_T)$ (элементы $u(x,t) \in L_{2,1}(\Im_T)$ принадлежат $L_1(\Im_T)$, $\|u\|_{L_{2,1}(\Im_T)} = \int\limits_0^T (\int\limits_{\Im} u^2(x,t)dx)^{1/2}dt)$, в соотношениях (19), (21) функции $\vartheta(x)$, $\vartheta_1(x)$ из $L_2(\Im)$. Задачи (17), (19), (20) и (18), (21), (22) рассматриваются в слабой постановке.

Определение 7. Функция $y(x,t) \in \tilde{W}_0^{1,0}(\Im_T)$ называется слабым решением дифференциальной системы (17), (19), (20), если справедливо тождество

$$\begin{gathered} -\int\limits_{\Im_T} y(x,t)\frac{\partial \eta(x,t)}{\partial t} dxdt + \ell(y,\eta) = \int\limits_{\Im} \vartheta(x)\eta(x,0)dx + \\ + \int\limits_{\Im_T} f(x,t)\eta(x,t)dxdt \quad \forall \eta(x,t) \in \tilde{W}_0^1(\Im_T), \ \ \eta(x,T) = 0. \end{gathered}$$

Определение 8. Функция $y(x,t) \in \tilde{W}_0^1(\Im_T)$ называется слабым решением дифференциальной системы (18), (21), (22), если справедливы соотношение $y|_{t=0} = \vartheta(x)$ и интегральное тождество

$$\begin{gathered} -\int\limits_{\Im_T} \frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\frac{\partial \eta(x,t)}{\partial t} dxdt + \ell(y,\eta) = \int\limits_{\Im} \vartheta_1(x)\eta(x,0)dx + \\ + \int\limits_{\Im_T} f(x,t)\eta(x,t)dxdt \quad \forall \eta(x,t) \in \tilde{W}_0^1(\Im_T), \ \ \eta(x,T) = 0. \end{gathered}$$

Справедливы следующие утверждения, доказательства которых используют метод Галеркина с базисом, каким является система обобщенных собственных функций линейного положительного эллиптического оператора $\mathcal{A}u := -\sum\limits_{\kappa,\iota=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_\kappa}\left(a_{\kappa\,\iota}(x)\frac{\partial u}{\partial x_\iota}\right) + b(x)u$, и почти дословно повторяют рассуждения работ [9].

Теорема 1. *Если* $f(x,t) \in L_{2,1}(\Im_T)$ *и* $\vartheta(x) \in L_2(\Im)$*, то дифференциальная система* (17), (19), (20) *разрешима в* $\tilde{W}_0^{1,0}(\Im_T)$.

Теорема 2. *Если* $f(x,t) \in L_{2,1}(\Im_T)$ *и* $\vartheta(x), \vartheta_1(x) \in L_2(\Im)$*, то дифференциальная система* (18), (21), (22) *разрешима в* $\tilde{W}_0^{1}(\Im_T)$.

Для дифференциальных систем (17), (19), (20) и (18), (21), (22) вводятся операторно-разностные системы, основанные на формальной замене в соотношениях (17) и (18) выражений $\frac{\partial y}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ соответствующими разностными отношениями $y_t(k) = \frac{1}{2\tau}[y(k) - y(k-1)]$, $y_{t\,\bar{t}}(k) = \frac{1}{2\tau}[y(k+1) - 2y(k) + y(k-1)]$ относительно $y(k) := y(x;\, k)$, $k = 1, 2, ...$ (используются обозначения, принятые в монографии [10]). На отрезке $[0, T]$ вводится равномерная сетка $\{t_k = k\tau,\ k = 0, 1, ..., K\}$ с шагом $\tau = \frac{T}{K}$ ($K \geqslant 1$ фиксировано), операторно-разностные системы принимают следующий вид (полудискретизация по переменной t [4]):

$$y_t(k) - \frac{\partial}{\partial x_\kappa}\left(a_{\kappa\,\iota}(x)\frac{\partial y^\sigma}{\partial x_\iota}\right) + b(x)y^\sigma = f_\tau(x),\ \ k = \overline{1, K},\ \ y(0) = \vartheta(x), \tag{23}$$

для дифференциальной системы (17), (19), (20) $y^\sigma = \sigma y(k) + (1-\sigma)y(k-1)$,

$$y_{t\,\bar{t}}(k) - \frac{\partial}{\partial x_\kappa}\left(a_{\kappa\,\iota}(x)\frac{\partial y^\sigma}{\partial x_\iota}\right) + b(x)y^\sigma = f_\tau(x),\ \ k = \overline{1, K-1},\ \ y(0) = \vartheta(x),\ \ y(1) = \vartheta_1(x), \tag{24}$$

для дифференциальной системы (18), (21), (22) $y^\sigma = \sigma y(k+1) + (1-2\sigma)y(k) + \sigma y(k-1)$. При этом $\sigma =$const, $f_\tau(x) := \frac{1}{\tau}\int\limits_{(k-1)\tau}^{k\tau} f(x,t)dt \in L_2(\Im)$, $\ k = 1, 2, ..., K$.

Определение 9. Функции $y(k) \in \tilde{W}_0^1(\Im)$ $(k = 1, 2, ..., K)$ являются слабым решением операторно-разностной системы (23), если для каждого $y(k)$ выполнено соотношение (интегральное тождество)

$$\int\limits_{\Im} y(k)_t\, \eta(x)dx + \ell(y(k), \eta) = \int\limits_{\Im} f_\tau(k)\eta(x)dx \quad \forall \eta(x) \in \tilde{W}_0^1(\Im),\ \ y(0) = \vartheta(x).$$

Аналогичное определение слабого решения вводится и для операторно-разностной системы (24) (в условие добавляется соотношение $y(1) = \varphi(x)$).

В силу положительности линейного оператора $\mathcal{A}$ нетрудно убедиться в том, что при достаточно малых значениях τ обе операторно-разностные системы однозначно слабо разрешимы при каждом фиксированном $k = 1, 2, ..., K$, причем функции $y(k)$ $(k = 1, 2, ..., K)$, полученные для (23) и (24), определяют кусочно-постоянные приближения по переменной t слабых решений дифференциальных систем (17), (19), (20) и (18), (21), (22), которые в нормах $\tilde{W}_0^{1,0}(\Im_T)$ и $\tilde{W}_0^1(\Im_T)$ сходятся к соответствующим слабым решениям дифференциальных систем (определения 7 и 8) [11]. Последнее оправдывает редукцию дифференциальных систем к операторно-разностным и является обоснованием использования операторно-разностных систем при рассмотрении задач оптимального управления дифференциальными системами тепловых и волновых процессов в композитных материалах. Такой подход указывает пути алгоритмизации задач оптимального управления дифференциально-разностными схемами, устойчивыми при $\sigma > \frac{1}{2}$ по исходным данным.

5. Оптимальное управление тепловыми и волновыми процессами. Вначале обратимся к задаче оптимального управления тепловыми процессами и рассмотрим дифференциальную систему (17), (19), (20). Воздействие на систему осуществляется управлением $\upsilon(x)$ ($\vartheta(x) = \upsilon(x)$) в начальный момент времени (стартовое управление, достаточно часто встречающийся тип управления в анализе задач технической теплофизики). Пусть задано пространство управлений U (определяется характером прикладной задачи, далее $U = L_2(\Im)$) и линейный оператор $B : U \to L_2(\Im)$. Через $y(\upsilon) := y(x,t;\upsilon)$, $\upsilon(x) \in U$, обозначим решение начально-краевой задачи

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_\kappa}\left(a_{\kappa\,\iota}(x)\frac{\partial y}{\partial x_\iota}\right) + b(x)y = f(x,t), \tag{25}$$

$$y|_{t=0} = \upsilon(x), \;\; x \in \Im, \quad y|_{x\in\partial\Im_T} = 0, \tag{26}$$

в пространстве $\tilde{W}_0^{1,0}(\Im_T)$ как состояние системы (25). Наблюдение за состоянием $y(\upsilon)$ осуществляется заданием линейного оператора $C : \tilde{W}_0^{1,0}(\Im_T) \to L_2(\Gamma)$, а именно $Cy(\upsilon) := y(x,T;\upsilon)$ (финальное наблюдение). Следует отметить при этом, что линейное отображение $\upsilon(x) \to y(\upsilon)$ пространства U в $\tilde{W}_0^{1,0}(\Im_T)$ непрерывно.

Определение 10. Функция $y(x,t;\upsilon) \in \tilde{W}_0^{1,0}(\Im_T)$ является слабым решением задачи (25), (26), если справедливо тождество

$$\begin{gathered} -\int\limits_{\Im_T} y(x,t;\upsilon)\frac{\partial\eta(x,t)}{\partial t}dxdt + \ell(y(\upsilon),\eta)\int\limits_{\Im}\vartheta(x)\eta(x,0)dx + \\ +\int\limits_{\Im_T} f(x,t)\eta(x,t)dxdt \quad \forall\eta(x,t) \in \tilde{W}_0^1(\Im_T), \;\; \eta(x,T) = 0. \end{gathered}$$

Введем функционал $\Psi(\upsilon)$ (в приложениях — штрафная функция [12–16]) вида

$$\begin{gathered} \Psi(\upsilon) := \|y(x,T;\upsilon) - w(x)\|^2_{L_2(\Im)} + (N\upsilon,\upsilon)_U, \\ (N\upsilon,\upsilon)_U \geqslant \varsigma\|\upsilon\|^2_U, \;\; \varsigma > 0, \end{gathered} \tag{27}$$

где $w(x) \in L_2(\Im)$ — заданная функция (планируемая количественная оценка теплового состояния композита) и $N : U \to U$ — линейный положительный оператор, через $(\cdot,\cdot)$ обозначено скалярное произведение в $U = L_2(\Im)$.

Ставится ***задача оптимального управления системой*** (25), (26) — отыскания

$$\inf_{\upsilon\in U_\partial}\Psi(\upsilon) = \psi \tag{28}$$

на выпуклом и замкнутом множестве $U_\partial \subset U$.

Далее считаем выполненными условия теоремы 1.

Теорема 3. *Задача оптимального управления системой* (25), (26) *имеет единственное решение* $v^*(x) \in U_\partial$: $\Psi(v^*) = \inf\limits_{\upsilon\in U_\partial}\Psi(\upsilon)$; $v^*(x)$ — *оптимальное управление* (*оптимум*).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используется свойство коэрцитивности квадратичной формы функционала $\Psi(\upsilon)$ на U_∂. А именно, учитывая представление (27), приходим к следующим соотношениям:

$$\|y(x,T;\upsilon) - w(x)\|^2_{L_2(\Im)} + (N\upsilon,\upsilon)_U =$$

$$= \|y(x,T;\upsilon) - y(x,0) + y(x,0) - w(x)\|^2_{L_2(\Im)} + (N\upsilon,\upsilon)_U =$$

$$= \mathfrak{F}(\upsilon,\upsilon) - 2\mathfrak{L}(\upsilon) + \|y(x,0) - w(x)\|^2_{L_2(\Im)},$$

здесь $\mathfrak{F}(\upsilon,\upsilon)$ — квадратичная форма

$$\mathfrak{F}(\upsilon,\upsilon) = (y(x,T;\upsilon) - y(x,0)),\, y(x,T;\upsilon) - y(x,0)) + (N\upsilon,\upsilon)_U,$$

а $\mathfrak{L}(\upsilon)$ — линейная форма

$$\mathfrak{L}(\upsilon) = (w_0(k) - y(x,0),\, y(x,T;\upsilon) - y(x,0))$$

на множестве U_∂. Таким образом, $\Psi(\upsilon) = \mathfrak{F}(\upsilon,\upsilon) + \mathfrak{L}(\upsilon)$, откуда, учитывая неравенство для $(N\upsilon,\upsilon)_U$ в соотношении (27), вытекает коэрцитивность формы $\mathfrak{F}(\upsilon,\upsilon)$. Рассуждения, приведенные в работе [9, с. 13], завершают доказательство. □

В соответствии с методом штрафных функций задачу оптимального управления системой (25), (26) будем аппроксимировать семейством задач, зависящих от параметров ε_1 и ε_2, причем $y(x,t)$ и $\upsilon(x)$ будут независимыми переменными.

Введем вспомогательное пространство

$$\mathbb{Y} = \Big\{y:\ y \in \tilde{W}^{1,0}_{\ 0}(\Im_T);\ \tfrac{\partial y}{\partial t} + \mathcal{A}y \in L_{2,1}(\Im_T);\ y(x,0) \in L_2(\Im)\Big\}$$

с нормой, определяемой соотношением

$$\|y\|_{\mathbb{Y}} = \Big\{\|y\|^2_{\tilde{W}^{1,0}_{\ 0}(\Im_T)} + \|\tfrac{\partial y}{\partial t} + \mathcal{A}y\|^2_{L_{2,1}(\Im_T)} + \|y(\cdot,0)\|^2_{L_2(\Im)}\Big\}. \tag{29}$$

Отметим, что $\mathbb{Y}$ с нормой (29) является гильбертовым пространством.

Далее на $\mathbb{Y} \times U$ введем вспомогательные функционалы $\Psi_\varepsilon(y,\upsilon)$ с параметрами $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ $(\varepsilon = \{\varepsilon_1,\varepsilon_2\})$:

$$\begin{gathered}\Psi_\varepsilon(y,\upsilon) := \int\limits_{\Im}[y(x,T;\upsilon) - w(x)]^2dx + (N\upsilon,\upsilon)_U + \\ + \tfrac{1}{\varepsilon_1}\|\tfrac{\partial y}{\partial t} + \mathcal{A}y - f\|^2_{L_{2,\,1}(\Im_T)} + \tfrac{1}{\varepsilon_2}\int\limits_{\Im}[y(x,0) - \upsilon(x)]^2dx.\end{gathered} \tag{30}$$

Задача (28) трансформируется в новую задачу для функционала (30): определить

$$\inf_{y\in\mathbb{Y},\ \upsilon\in U_\partial} \Psi_\varepsilon(y,\upsilon) = \psi_\varepsilon. \tag{31}$$

Теорема 4. *Задача* (31) *определения пары* $y \in \mathbb{Y}$, $\upsilon \in U_\partial$ *имеет единственный оптимум* $\{y_\varepsilon, u_\varepsilon\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о утверждения во многом повторяет рассуждения при доказательстве теоремы 2. Рассматривается выделенная однородная часть второй степени $\chi(y,\upsilon)$ квадратичной формы $\Psi_\varepsilon(y,\upsilon)$ и, учитывая неравенство $(N\upsilon,\upsilon)_U \geqslant \varsigma\|\upsilon\|^2_U$ $(\varsigma > 0)$, для $\chi(y,\upsilon)$ устанавливается оценка

$$\chi(y,\upsilon) \geqslant C\left(\|y\|^2_{\mathbb{Y}} + \|\upsilon\|^2_U\right) \tag{32}$$

при любых $y \in \mathbb{Y}$, $\upsilon \in U_\partial$. Дальнейшие рассуждения следуют в соответствии с [9, с. 13]. □

Теорема 5. *Пусть* $\varepsilon = \{\varepsilon_1,\varepsilon_2\} \to 0$ (*т. е.* $\varepsilon_1 \to 0$ *и* $\varepsilon_2 \to 0$), *тогда*

$$\psi_\varepsilon \to 0, \tag{33}$$

$$\upsilon_\varepsilon \to \upsilon \ \ in\, U, \tag{34}$$

$$y_\varepsilon \to y(\upsilon) \ \ in\, \mathbb{Y}. \tag{35}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу самого определения задачи оптимального управления при $y = y(\upsilon)$ и υ_ε из соотношения (31) следует, что

$$\Psi_\varepsilon(y_\varepsilon, \upsilon_\varepsilon) \leqslant \Psi_\varepsilon(y(\upsilon), \upsilon) = \Psi(\upsilon) = \psi, \tag{36}$$

а это означает ограниченность $\Psi_\varepsilon(y_\varepsilon, u_\varepsilon)$. Тогда, учитывая (32), в силу (30)

$$\Psi_\varepsilon(y_\varepsilon, u_\varepsilon) \geqslant \varsigma \|u_\varepsilon\|_U^2,$$

$$\Psi_\varepsilon(y_\varepsilon, u_\varepsilon) \geqslant \tfrac{1}{\varepsilon_1} \| \tfrac{\partial y_\varepsilon}{\partial t} + \mathcal{A} y_\varepsilon - f\|^2_{L_{2,1}(\Im_T)} + \tfrac{1}{\varepsilon_2} \|y_\varepsilon(x,0) - u_\varepsilon(x)\|^2_{L_2(\Im)},$$

а значит,

$$\|u_\varepsilon\|_U \leqslant C, \tag{37}$$

$$\| \tfrac{\partial y_\varepsilon}{\partial t} + \mathcal{A} y_\varepsilon - f\|_{L_{2,1}(\Im_T)} \leqslant C\sqrt{\varepsilon_1}, \tag{38}$$

$$\|y_\varepsilon(x,0) - u_\varepsilon(x)\|_{L_2(\Im)} \leqslant C\sqrt{\varepsilon_2}. \tag{39}$$

Из соотношений (37)–(39) при $\varepsilon = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} \to 0$ находим, что выражение $\frac{\partial y_\varepsilon}{\partial t} + \mathcal{A} y_\varepsilon$ ограничено в $L_{2,1}(\Im_T)$, $y_\varepsilon(x,0)$ ограничено в $L_2(\Im)$. В силу утверждения теоремы 1 последнее означает ограниченность y_ε в $\tilde{W}_0^{1,0}(\Im_T)$ при $\varepsilon = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} \to 0$. Таким образом показано, что совокупность функций y_ε ограничена в пространстве $\mathbb{Y}$ при $\varepsilon = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} \to 0$, следовательно, учитывая неравенство (37), из множеств $y_\varepsilon, u_\varepsilon$ можно выделить подпоследовательность $\{y_\varepsilon, u_\varepsilon\}$ такую, что

$$y_\varepsilon \to \tilde{y}, \ \ u_\varepsilon \to \tilde{u}$$

слабо в $\mathbb{Y}$ и U соответственно. Тогда справедливо (33), причем $\tilde{u} \in U_\partial$.

Исходя из соотношений (37)–(39), получаем уравнение

$$\tfrac{\partial \tilde{y}}{\partial t} + \mathcal{A}\tilde{y} = f, \ \ \tilde{y}(x,0) = \tilde{u},$$

что означает $\tilde{y} = y(\tilde{u})$.

Исходя из неравенства

$$\Psi_\varepsilon(y_\varepsilon, u_\varepsilon) \geqslant \int\limits_\Im [y_\varepsilon(x,T) - w(x)]^2 dx + (N\upsilon_\varepsilon, \upsilon_\varepsilon)_U$$

и слабой сходимости $y_\varepsilon(x,T) \to \tilde{y}(x,T)$, приходим к неравенству

$$\underline{\lim} \Psi_\varepsilon(y_\varepsilon, u_\varepsilon) \geqslant \int\limits_\Im [y(x,T) - w(x)]^2 dx + (N\tilde{\upsilon}, \tilde{\upsilon})_U,$$

или, учитывая $\tilde{y} = y(\tilde{u})$,

$$\underline{\lim} \Psi_\varepsilon(y_\varepsilon, u_\varepsilon) \geqslant \Psi(\tilde{u}). \tag{40}$$

Из неравенства (40), совместно с неравенством (36), вытекают соотношения (33) и $\tilde{u} = u$. Отсюда следуют соотношения (34), (35) в смысле слабой сходимости. Теорема доказана. □

Задача оптимального управления волновыми процессами методом штрафных функций применительно к дифференциальной системе (18), (21), (22) строится аналогично, но при этом вносятся некоторые изменения. Управление осуществляется в начальный момент времени функциями $\upsilon = \vartheta(x)$ и $\upsilon_1 = \vartheta_1(x)$, определяющими начальное условие (21): $\upsilon, \upsilon_1 \in \mathcal{U} = U \times U$. Вспомогательное пространство принимает вид

$$\mathbb{Y} = \Big\{ y: \ y \in \tilde{W}^1_0(\Im_T); \ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \mathcal{A}y \in L_{2,1}(\Im_T); \ y(x,0) \in L_2(\Im); \ \frac{\partial y(x,0)}{\partial t} \in L_2(\Im) \Big\}$$

с нормой, рассчитываемой по соотношению

$$\|y\|_{\mathbb{Y}} = \Big\{ \|y\|^2_{\tilde{W}^{1,0}_0(\Im_T)} + \|\frac{\partial y}{\partial t} + \mathcal{A}y\|^2_{L_{2,1}(\Im_T)} + \|y(\cdot,0)\|^2_{L_2(\Im)} + \|\frac{\partial y(\cdot,0)}{\partial t}\|^2_{L_2(\Im)} \Big\}.$$

Вспомогательные функционалы $\Psi_\varepsilon(y,\upsilon)$ на $\mathbb{Y} \times \mathcal{U}$ с параметрами $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ и $\varepsilon_3 > 0$ представляются в виде

$$\Psi_\varepsilon(y,\upsilon) := \int_{\Im} [y(x,T;\upsilon) - w(x)]^2 dx + (N\upsilon,\upsilon)_U +$$
$$+ \frac{1}{\varepsilon_1} \|\frac{\partial y}{\partial t} + \mathcal{A}y - f\|^2_{L_{2,1}(\Im_T)} + \frac{1}{\varepsilon_2} \int_{\Im} [y(x,0) - \upsilon(x)]^2 dx + \frac{1}{\varepsilon_3} \int_{\Im} [\frac{\partial y(x,0)}{\partial t} - \upsilon_1(x)]^2 dx,$$

функционал $\Psi(\upsilon)$ сохраняет свой вид (пространство U заменено на $\mathcal{U}$).

Дальнейшие рассуждения почти дословно повторяют приведенные выше для задачи оптимального управления тепловыми процессами.

6. Заключение. Задачи оптимального управления тепловых и волновых эволюционных процессов в композитных материалах изучаются в соболевских пространствах функций с носителями в слоистой области трехмерного евклидова пространства. В работе представлены результаты основных направлений исследования: 1) получение условий слабой разрешимости начально-краевых задач указанных процессов в соболевских пространствах; 2) формирование и решение задач оптимального управления методом штрафных функций. При анализе слабой разрешимости начально-краевых задач осуществляется редукция их к операторно-разностным системам, для норм слабых решений которых формируются априорные оценки. Основываясь на методе Галеркина со специальным базисом (система обобщенных собственных функций эллиптического оператора начально-краевой задачи), формируются кусочно-постоянные по временной переменной приближения слабых решений исходных задач — алгоритмическая база фактического построения слабых решений начально-краевых задач указанных процессов. На этой базе представлен универсальный метод штрафных функций для решения задач оптимального управления эволюционными системами. Полученные результаты эффективно используются в анализе как задач оптимального управления не только тепловыми и волновыми процессами в композитных материалах, но задач гидродинамики с сетевыми носителями [1, 3] и обратных задач [17].

Литература

1. *Artemov M. A., Baranovskii E. S., Zhabko A. P., Provotorov V. V.* On a 3D model of non-isothermal flows in a pipeline network // Journal of Physics. Conference Series. 2019. Vol. 1203. Art. ID 012094. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1203/1/012094

2. *Zhabko N. A., Karelin V. V., Provotorov V. V., Sergeev S. M.* The method of penalty functions in the analysis of optimal control problems of Navier — Stokes evolutionary systems with a spatial variable in a network-like domain // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2023. Т. 19. Вып. 2. С. 162–175. https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2023.203

3. *Baranovskii E. S., Provotorov V. V., Artemov M. A., Zhabko A. P.* Non-isothermal creeping flows in a pipeline network: existence results // Symmetry. 2021. Vol. 13. Art. ID 1300. https://doi.org/10.3390/sym13071300

4. *Zhabko A. P., Provotorov V. V., Shindyapin A. I.* Optimal control of a differential-difference parabolic system with distributed parameters on the graph // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2021. Т. 17. Вып. 4. С. 433–448. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.411

5. *Lax P. D., Milgram N.* Parabolie equations. Contributions to the theory of partial differential // *Ann. Math. Studies*. 1954. Vol. 33. P. 167–190.

6. *Провоторов В. В.* Построение граничных управлений в задаче о гашении колебаний системы из M струн // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2012. Т. 6. Вып. 1. С. 60–69.

7. *Подвальный С. Л., Провоторов В. В.* Определение стартовой функции в задаче наблюдения параболической системы на графе // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2014. Т. 10. № 6. С. 29–35.

8. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971. 367 с.

9. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1973. 414 с.

10. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1973. 655 с.

11. *Провоторов В. В.* Собственные функции краевых задач на графе и приложения. Воронеж: Научная книга, 2008. 247 с.

12. *Demyanov V. F., Giannessi F., Karelin V. V.* Optimal control problems via exact penalty functions // Journal of Global Optimization. 1998. Vol. 12. P. 127–139.

13. *Карелин В. В.* Точные штрафы в задаче оценки координат динамической системы в условиях неопределенности // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2011. Вып. 4. С. 40–44.

14. *Demyanov V. F., Karelin V. V.* On a minimax approach to the problem of identification of dynamic systems in the presence of uncertainty. Advances in optimization (Lambrecht, 1991) // Lecture Notes in Econom. and Math. Systems. Berlin: Springer, 1992. Vol. 382. P. 515–517.

15. *Polyakova L., Karelin V.* Exact penalty functions method for solving problems of nondifferentiable optimization // Cybernetics and Physics. SmartFly. LLC. 2014. Vol. 3. N 3. P. 124–129.

16. *Карелин В. В., Фоминых А. В.* Точные штрафы в задаче построения оптимального решения дифференциального включения // Труды Института математики и механики УРО РАН. 2015. Т. 21. № 3. С. 153–163.

17. *Zhabko A. P., Nurtazina K. B., Provotorov V. V.* About one approach to solving the inverse problem for parabolic equation // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2019. Т. 15. Вып. 3. С. 322–335. https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2019.303

Статья поступила в редакцию 23 мая 2023 г.
Статья принята к печати 8 июня 2023 г.

Контактная информация:

Жабко Алексей Петрович — д-р физ.-мат. наук, проф.; zhabko.apmath.spbu@mail.ru

Карелин Владимир Витальевич — канд. физ.-мат. наук, доц.; vlkarelin@mail.ru

Провоторов Вячеслав Васильевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; wwprov@mail.ru

Сергеев Сергей Михайлович — канд. техн. наук, доц.; sergeev2@yandex.ru

Optimal control of thermal and wave processes in composite materials

A. P. Zhabko[1], *V. V. Karelin*[1], *V. V. Provotorov*[2], *S. M. Sergeev*[3]

[1] St. Petersburg State University,
7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation
[2] Voronezh State University,
1, Universitetskaya pl., Voronezh, 394006, Russian Federation

[3] Peter the Great Saint Petersburg Polytechnic University,
29, Polytechnicheskaya ul., St. Petersburg, 195251, Russian Federation

For citation: Zhabko A. P., Karelin V. V., Provotorov V. V., Sergeev S. M. Optimal control of thermal and wave processes in composite materials. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2023, vol. 19, iss. 3, pp. 403–418. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.308 (In Russian)

The paper indicates the approach and the corresponding him method of penalty functions for analyzing the problems of optimal control of thermal and wave processes in structural elements made of composite materials (composites). An object that is quite common in the industrial sphere, the structure of which is a set of layers (phases) of unidirectional composites — layered composites, is considered. When solving problems related to the analysis and description of the states of composites, quantitative characteristics of layers that are not functions of the coordinates of the points of the medium are usually used in order not to solve the corresponding problems for an inhomogeneous medium. Such functions are elements of Sobolev spaces, first of all, functions summable with a square. The convenience lies in the fact that when finding the conditions for solvability of initial-boundary value problems of various types (in most cases, such problems are the basis of mathematical models of many physical processes), it is possible to reduce to operator-difference systems, for which it is easy to construct a priori estimates of weak solutions. The next step after establishing the weak solvability of the initial-boundary value problem of the thermal or wave process in composites is the formulation and solution of the problem of optimal control of these processes. The proposed method of penalty functions on the example of solving such problems is a general method. It is applicable with slight modifications also not only in the case of elliptic, parabolic and other problems (including nonlinear) for scalar functions, but also for vector functions. An example of the latter is the Navier — Stokes system, widely used in the description of network-like hydrodynamic processes, considered in Sobolev spaces, the elements of which are functions with carriers on n-dimensional network-like domains, $n \geqslant 2$.

Keywords: composite materials, layered region, initial-boundary value problem, weak solvability, optimal control, method of penalty functions.

References

1. Artemov M. A., Baranovskii E. S., Zhabko A. P., Provotorov V. V. On a 3D model of non-isothermal flows in a pipeline network. *Journal of Physics. Conference Series*, 2019, vol. 1203, Art. ID 012094. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1203/1/012094

2. Zhabko N. A., Karelin V. V., Provotorov V. V., Sergeev S. M. The method of penalty functions in the analysis of optimal control problems of Navier — Stokes evolutionary systems with a spatial variable in a network-like domain. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2023, vol. 19, iss. 2, pp. 162–175. https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2023.203

3. Baranovskii E. S., Provotorov V. V., Artemov M. A., Zhabko A. P. Non-isothermal creeping flows in a pipeline network: existence results. *Symmetry*, 2021, vol. 13, Art. ID 1300. https://doi.org/10.3390/sym13071300

4. Zhabko A. P., Provotorov V. V., Shindyapin A. I. Optimal control of a differential-difference parabolic system with distributed parameters on the graph. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2021, vol. 17, iss. 4, pp. 433–448. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.411

5. Lax P. D., Milgram N. Parabolie equations. Contributions to the theory of partial differetial. *Ann. Math. Studies*, 1954, vol. 33, pp. 167–190.

6. Provotorov V. V. Postroenie granichnykh upravlenii v zadache o gashenii kolebanii sistemy iz M strun [Construction of boundary controls in the problem of damping vibrations of a system of M strings]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2012, vol. 6, no. 1, pp. 60–69. (In Russian)

7. Podvalny S. L., Provotorov V. V. Opredelenie startovoi funktsii v zadache nabliudeniia parabolicheskoi sistemy na grafe [Determining the starting function in the task of observing the parabolic system

with distributed parameters on the graph]. *Vestnik of Voronezh State Technical University*, 2014, vol. 10, no. 6, pp. 29–35. (In Russian)

8. Lions J.-L., Madgenes E. *Neodnorodnye granichnye zadachi i ikh prilozheniia* [*Nonhomogeneous boundary problems and their applications*]. Moscow, Mir Publ., 1971, 367 p. (In Russian)

9. Lions J.-L. *Optimal'noe upravlenie sistemami, opisyvaemymi uravneniiami s chastnymi proizvodnymi* [*Controle optimal de sistemes gouvernes par des eqations aux derivees partielles*]. Moscow, Mir Publ., 1973, 414 p. (In Russian)

10. Samarskii A. A. *Teoriia raznostnykh skhem* [*Theory of difference schemes*]. Moscow, Nauka Publ., 1973, 655 p. (In Russian)

11. Provotorov V. V. *Sobstvennye funktsii kraevykh zadach na grafe i prilozheniia* [*Native functions of boundary value problems on graphs and applications*]. Voronezh, Nauchnaya kniga Publ., 2008, 247 p. (In Russian)

12. Demyanov V. F., Giannessi F., Karelin V. V. Optimal control problems via exact penalty functions. *Journal of Global Optimization*, 1998, vol. 12, pp. 127–139.

13. Karelin V. V. Tochnye shtrafy v zadache otsenki koordinat dinamicheskoi sistemy v usloviiakh neopredelennosti [Exact fines in the problem of estimating the coordinates of a dynamical system under uncertainty]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2011, iss. 4, pp. 40–44. (In Russian)

14. Demyanov V. F., Karelin V. V. On a minimax approach to the problem of identification of dynamic systems in the presence of uncertainty. Advances in optimization (Lambrecht, 1991). *Lecture Notes in Econom. and Math. Systems.* Berlin, Springer Publ., 1992, vol. 382, pp. 515–517.

15. Polyakova L., Karelin V. Exact penalty functions method for solving problems of nondifferentiable optimization. *Cybernetics and Physics. SmartFly, LLC*, 2014, vol. 3, no. 3, pp. 124–129.

16. Karelin V. V., Fominih A. V. Tochnye shtrafy v zadache postroeniia optimal'nogo resheniia differentsial'nogo vkliucheniia [Exact penalties in the problem of constructing the optimal solution of differential inclusion]. *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics URO RAS*, 2015, vol. 21, no. 3, pp. 153–163. (In Russian)

17. Zhabko A. P., Nurtazina K. B., Provotorov V. V. About one approach to solving the inverse problem for parabolic equation. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2019, vol. 15, iss. 3, pp. 322—335.
https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2019.303

Received: May 23, 2023.
Accepted: June 8, 2023.

A u t h o r s' i n f o r m a t i o n:

Aleksei P. Zhabko — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; zhabko.apmath.spbu@mail.ru

Vladimir V. Karelin — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor; vlkarelin@mail.ru

Vyacheslav V. Provotorov — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; wwprov@mail.ru

Sergey M. Sergeev — PhD in Engineering, Associate Professor; sergeev2@yandex.ru