УДК 51-75 Вестник СПбГУ. Прикладная математика. Информатика... 2023. Т. 19. Вып. 3
MSC 97M30

Исследование возможности заключения договора страхования с учетом функции полезности

А. В. Сачков

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Сачков А. В.* Исследование возможности заключения договора страхования с учетом функции полезности // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2023. Т. 19. Вып. 3. С. 369–373. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.305

Рассмотрена задача исследования возможности заключения договора страхования с учетом функции полезности денег клиента. С использованием базовой модели проведены расчеты, предлагаемая формула опробована для двух функций полезности, соответствующих крайним децильным группам индивидов (по доходам). Сделаны выводы, предложены дальнейшие направления исследования.

Ключевые слова: страхование, полезность, риск.

1. Введение. Страховая деятельность играет ключевую роль в поддержании непрерывности экономической деятельности. Страховым компаниям приходится сталкиваться с самыми разными клиентами, поэтому важной задачей является их ранжировка по различным признакам. В настоящей работе рассмотрена возможность изучения клиентов с учетом их функции полезности мх денег, в том числе в контексте разделения клиентов по уровням дохода.

Необходимые сведения актуарной математики взяты из монографии [1], которая издана Обществом актуариев в соответствии с их требованиями к экзаменам, являющимися международным стандартом в сфере актуарной математики. Предварительные сведения из теории вероятностей и математической статистики даются по книге [2].

2. Постановка задачи. Наиболее общая постановка задачи расчета страховых премий звучит так: пусть у индивида имеется капитал ω и известна его функция полезности денег $u(x)$. Положим, что Y представляет собой размер случайного убытка индивида в денежном выражении. Индивид может приобрести полис у страховщика за сумму p. Тогда естественно задаться следующим вопросом: по какой величине p индивид готов купить полис, если считать, что при наступлении страхового случая весь случайный убыток Y будет возмещен?

Записывая вышесказанное формально, получаем, что

$$u(\omega - G) = \mathbb{E}(u(\omega - Y)).$$

В базовых моделях полагают $G = \mathbb{E}(Y)$ (так называемая *нетто-премия*), в дальнейшем же используют выражения типа $G = (1 + a)\mathbb{E}(Y) + C$ (так называемая *брутто-премия*), где учтены как колебания убытка Y, так и постоянные издержки C.

Рассмотрим сначала вспомогательную модель. Полагаем время дискретным, с единичным периодом в один год. Есть m страхователей $X_1, \ldots, X_m$, возраст каждого из которых в данный момент равен x. Любой из них хочет заключить со страховщиком договор страхования следующего содержания: если страхователь проживет еще n лет, то страховщик выплачивает ему 1 условную единицу (к примеру, 1 условная единица может быть равна 100 000 руб.) страховой выплаты. Для заключения договора страхователь должен выплатить страховщику премию (один раз). Задача данной статьи — рассчитать размер такой премии при условии, что она будет приемлема для обеих сторон.

3. Предварительные сведения. Обозначим через $A_{x:\overline{n}}$ ожидаемое значение страхового обеспечения. Тогда

$$A_{x:\overline{n}} = \nu^n \frac{l_{x+n}}{l_x} = \nu^n {}_n p_x,$$

где ν^n — размер заявленных убытков для каждого страхователя; l_x — число индивидов, живых на начало периода x; ${}_n p_x$ — вероятность того, что X выживет по меньшей мере в течение n лет.

Так как страховая выплата принята равной 1 условной единице, то $\nu^n = (1+\delta)^{-n}$, где δ есть средняя процентная ставка на рынке займов (значение приводится к текущему моменту). Полученное выражение для $A_{x:\overline{n}}$ позволяет рассчитать в первом приближении размер нетто-премии для каждого страхователя. Для брутто-премии будем использовать выражение

$$\overline{A_{x:\overline{n}}} = (1+\theta) A_{x:\overline{n}} + C.$$

Приведем пример, где параметры модели принимают следующие значения: $x = 40,\ m = 100\,000,\ n = 10,\ \delta = 0.03$. Используя данные таблицы продолжительности жизни из [1], получаем, что $l_{40} = 94\,926,\ l_{50} = 91\,526$. Тогда имеем, что

$$A_{40:\overline{10}} = (1+\delta)^{-n} \frac{l_{50}}{l_{40}} = (1+0.03)^{-10} \frac{91\,526}{94\,926} \approx 0.717443.$$

Возможна следующая интерпретация этого результата: если каждый страхователь, доживший до 50 лет, хочет получить 1 условную единицу, то он должен заплатить не меньше 0.717443 условных единиц в качестве премии (количество знаков после точки определяется денежным эквивалентом условной единицы).

4. Решение задачи. Попробуем теперь включить в модель функцию полезности денег $u(x)$ (пока абстрактную). Для этого положим, что каждый страхователь имеет капитал ω. Что в данном случае будет случайной величиной-убытком Y? Нетрудно видеть, что ее распределение имеет вид

$$\begin{cases} \mathcal{P}(Y = 0) = {}_n q_x, \\ \mathcal{P}(Y = \nu^n) = {}_n p_x, \end{cases}$$

т. е. в случае недожития не теряется ничего, а в случае дожития при условии, что договор не был заключен, теряется условная единица страховой выплаты, приведенная к текущему моменту.

Применим ранее упомянутое соотношение (здесь G может обозначать как нетто-, так и брутто-премию)

$$u(\omega - G) = \mathbb{E}(u(\omega - Y)).$$

Так как Y дискретна, то и $\omega - Y$ дискретна с распределением

$$\begin{cases} \mathcal{P}(\omega - Y = \omega) = {}_n q_x, \\ \mathcal{P}(\omega - Y = \omega - \nu^n) = {}_n p_x. \end{cases}$$

Согласно известным формулам для функции от дискретной случайной величины (см. [2]), $u(\omega - Y)$ также является дискретной случайной величиной с распределением

$$\begin{cases} \mathcal{P}(u(\omega - Y) = u(\omega)) = {}_nq_x, \\ \mathcal{P}(u(\omega - Y) = u(\omega - \nu^n)) = {}_np_x. \end{cases}$$

Далее, вычисляя математическое ожидание, получаем уравнение

$$\mathbb{E}(u(\omega - Y)) = u(\omega)_nq_x + u(\omega - \nu^n)_np_x.$$

Окончательно оно имеет вид

$$u(\omega - G) = u(\omega)_nq_x + u(\omega - \nu^n)_np_x. \tag{1}$$

Уравнение (1) позволяет для каждой конкретной функции полезности $u(x)$ найти премию G, за которую страхователь гарантированно согласится на заключение договора.

Положим $u(x) = \ln(x + 1)$. Выполняя элементарные преобразования, находим, что

$$\begin{gathered} \ln(\omega - G + 1) = \ln(\omega + 1)_nq_x + \ln(\omega - \nu^n + 1)_np_x \Rightarrow \\ \Rightarrow \omega - G + 1 = (\omega + 1)^{nq_x}(\omega - \nu^n + 1)^{np_x} \Rightarrow \\ \Rightarrow G = \omega + 1 - (\omega + 1)^{nq_x}(\omega - \nu^n + 1)^{np_x}. \end{gathered} \tag{2}$$

Если теперь капитал $\omega = 1$, то

$$G \approx 0.048.$$

Этот подход, однако, дает размер премии лишь в первом приближении. Гораздо лучше таким образом можно ответить на вопрос: «Готов ли будет страхователь на заключение договора при данном размере премии?» Почему это так?

Посмотрим еще раз на соотношение

$$u(\omega - G) = \mathbb{E}(u(\omega - Y)).$$

Что здесь написано? Ровно то, что полезность от потери премии для страхователя совпадает с математическим ожиданием полезности от потери случайного убытка, т. е. между этими двумя альтернативами страховщик не делает разницы. Естественно, что ответ здесь зависит от того, какая функция полезности применяется.

Заменив знак равенства на знак неравенства:

$$u(\omega - G) > \mathbb{E}(u(\omega - Y)),$$

можно уже отвечать на вопрос, который, несомненно, интересен страховщикам: «Предпочтет ли страхователь случайному и большему по размеру риску меньший по размеру, но гарантированный, убыток?»

Применим этот способ к численным результатам, полученным выше: $G = A_{40:\overline{10}} \approx 0.717443$, остальные данные — те же (процентная ставка постоянна). Тогда имеем, что

$$u(\omega - G) \approx 0.248856,$$

$$\mathbb{E}(u(\omega - Y)) \approx 0.675704,$$

откуда делаем вывод, что для страхователя с такой функцией полезности и капиталом предпочтительнее будет риск случайного убытка.

5. Рассмотрение с различными функциями полезности денег. Хорошо известно, что для индивидов с различным уровнем дохода форма функции полезности денег отличается. Действительно, одна и та же сумма денег представляет совершенно различный уровень полезности для богатого и бедного индивидов (также можно представить это в терминах добавочного продукта).

В связи с этим предлагается изучить, как влияет форма функции полезности денег на возможность заключения договора страхования для групп индивидов, разбитых по децилям дохода (см. таблицу). Часто дополнительно оценивают децильный коэффициент — соотношение между долями в фонде оплаты труда крайних децильных групп.

Таблица. **Распределение общей суммы средств, направленных на оплату труда, по децильным группам работающих в апреле, 2010 г. [3]**

Группа	Доля
1	2.3
2	3.4
3	4.4
4	5.4
5	6.6
6	7.9
7	9.5
8	11.7
9	15.6
10	33.2

В качестве примеров для крайних случаев отношения к деньгам с точки зрения полезности можно предложить к рассмотрению функции $\ln(x+1)$ и $\exp(x)$. В некотором роде прослеживается параллель с отношением к риску — его принятие и неприятие.

Повторим вычисления для $\exp\,(x)$ по той же схеме, что и в (2):

$$\exp(\omega - G) = \exp(\omega)_n q_x + \exp(\omega - \nu^n)_n p_x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \omega - G = \omega + \ln({}_n q_x) + (\omega - \nu^n) + \ln({}_n p_x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow G = \nu^n - \omega - \ln({}_n q_{x n} p_x).$$

Теперь воспользуемся численными результатами (помним, что $\nu^n = (1+\delta)^{-n}$, $n = 10,\ \delta = 0.03$):

$$G \approx 0.781.$$

Далее получим, что

$$u(\omega - G) \approx 1.326,$$
$$\mathbb{E}(u(\omega - Y)) \approx 1.327.$$

Здесь полезность практически равна, и можно заключить, что разницы для страхователя в данном случае практически нет, а это наглядно показывает разное отношение к деньгам индивидов из первой и последней децильных групп (см. таблицу).

6. Заключение. В статье рассмотрена возможность использования функции полезности денег для изучения вероятности заключения договора страхования, в том числе с учетом уровня доходов клиента.

В дальнейшем будут рассмотрены функции полезности для всех децильных групп, схожие схемы в других областях человеческой деятельности, интегрирована аксиоматическая теория выбора [4] и автоматизированы соответствующие вычисления путем написания компьютерной программы.

Литература

1. *Bowers N. L., Gerber H. U., Hickman J. C., Jones D. A, Nesbitt C. J.* Actuarial mathematics. 2nd ed. Chicago: The Society of Actuaries, 1997. 753 p.

2. *Буре В. М., Парилина Е. М.* Теория вероятностей и математическая статистика. СПб.: Лань, 2013. 416 с.

3. Официальный сайт Федеральной службы государственной статистики. URL: https://www.gks.ru/bgd/regl/b10_04/isswww.exe/stg/d09/1-00.htm (дата обращения: 19 февраля 2023 г.).

4. *Ногин В. Д.* Сужение множества Парето: аксиоматический подход. М.: Физматлит, 2018. 272 с.

Статья поступила в редакцию 30 мая 2023 г.
Статья принята к печати 8 июня 2023 г.

Контактная информация:

Сачков Александр Валерьевич — аспирант; st031354@student.spbu.ru

Examining the possibility of insurance contract conclusion based on utility function

A. V. Sachkov

St. Petersburg State University,
7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Sachkov A. V. Examining the possibility of insurance contract conclusion based on utility function. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2023, vol. 19, iss. 3, pp. 369–373.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.305 (In Russian)

The problem of a potential insurance contract conclusion is considered taking into account client's money utility function. A basic model is employed for practical calculations and a formula is proposed and tried for two utility functions corresponding to polar income decile groups. Conclusions are made with suggested future research directons.

Keywords: insurance, utility, risk.

References

1. Bowers N. L., Gerber H. U., Hickman J. C., Jones D. A, Nesbitt C. J. *Actuarial mathematics.* 2^{nd} ed. Chicago, The Society of Actuaries Publ., 1997, 753 p.

2. Bure V. M., Parilina E. M. *Teoriia veroyatnostei i matematicheskaia statistika* [*Probability and statistics*]. St. Petersburg, Lan' Publ., 2013, 416 p. (In Russian)

3. *Federal'naia sluzhba gosudarstvennoi statistiki* [*Federal State Statistics Service*]. Official website. Available at: https://www.gks.ru/bgd/regl/b10_04/isswww.exe/stg/d09/1-00.htm (accessed: February 19, 2023).

4. Noghin V. D. *Suzhenie mnozhestva Pareto: aksiomaticheskii podhod* [*Reduction of the Pareto set: an axiomatic approach*]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2018, 272 p. (In Russian)

Received: May 30, 2023.
Accepted: June 8, 2023.

Author's information:

Alexander V. Sachkov — Postgraduate Student; st031354@student.spbu.ru