УДК 519.878
MSC 90B40

Вестник СПбГУ. Прикладная математика. Информатика... 2023. Т. 19. Вып. 3

Теоретические основы решения задач поиска методом максимума энтропии

А. Н. Прокаев

Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации —
Научно-техническое бюро высоких технологий,
Российская Федерация, 199178, Санкт-Петербург, 14-я линия В. О., 39

Для цитирования: *Прокаев А. Н.* Теоретические основы решения задач поиска методом максимума энтропии // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2023. Т. 19. Вып. 3. С. 348–368.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.304

Традиционной задачей теории поиска является разработка плана поиска физического объекта в море или на суше. Известные алгоритмы оптимального распределения поисковых ресурсов используют преимущественно экспоненциальную функцию обнаружения. Если рассматривать задачу поиска шире — как задачу поиска информации различного вида, то функция обнаружения может существенно отличаться от экспоненциальной. В этом случае решения, полученные с помощью традиционных алгоритмов, могут быть корректными с точки зрения математики, но неприемлемыми с точки зрения логики. В данной работе указанная проблема решается на основе принципа максимума энтропии. Приведено доказательство теорем, а также следствий из них для функций обнаружения четырех видов, позволяющих создать алгоритмы решения различных задач поиска на основе принципа максимума энтропии.

Ключевые слова: теория информации, теория поиска, равномерно оптимальный поисковый план, функция обнаружения, принцип максимума энтропии.

1. Введение. С момента появления в середине XX в. традиционной задачей теории поиска является разработка плана поиска физического объекта в море или на суше. Вместе с тем уже в некоторых ранних трудах задача поиска рассматривалась именно как задача поиска информации [1], и даже имели место попытки создания единой теории поиска, объединяющей под термином «поиск» разноплановые задачи из области исследования операций, теории информации, медицины, компьютерных наук и теории управления (см., например, [2, 3]). Тем не менее работ о взаимосвязи принципа максимума энтропии с теорией поиска, вышедших после статьи [4], найти не удалось.

В работе [5] кратко освещена сравнительно недолгая история «взаимоотношений» теории информации с теорией поиска, дано описание «традиционного» алгоритма решения «основной задачи теории поиска» [6], и на простом примере («задача о двух шкафах») показан один из его существенных недостатков. Далее указанная задача была рассмотрена с точки зрения теории информации и предложен вариант ее решения на основе принципа максимума энтропии. Настоящая работа является логическим продолжением [5]. Преимущественно для сохранения общности изложения поиск представляется здесь в его «классическом» понимании как поиск физического объекта, что ни в коей мере не мешает рассматривать поиск объекта как поиск информации о нем. Приведенные теоремы и следствия предполагают дальнейшее создание на их основе алгоритмов решения различных задач поиска методом максимума энтропии. Теоремы 1 и 2 впервые были представлены нами в работе [7] в несколько ином виде и без доказательств.

2. Условия задачи поиска и вводные теоретические положения. При описании задачи будем использовать традиционную для теории поиска терминологию и математические обозначения, принятые в [4–8]. Объект поиска именуется как «цель», участник поиска — «наблюдатель», а параметр, который должен быть распределен, — «поисковые усилия». Известно априорное дискретное распределение, показывающее степень нашей уверенности о местонахождения цели, — вероятностное распределение на конечном множестве из n ячеек, именуемое далее как «область J». Предположим, что цель может находиться только в одной из ячеек j с вероятностью p_j, $j = 1, \ldots, n$, $\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$. Для каждой ячейки j существует *функция обнаружения* $b(z_j)$ как условная вероятность обнаружения цели в ячейке j поисковыми усилиями объемом z_j при условии, что цель находится в ячейке j.

В работе [5] были рассмотрены различные способы поиска, которым соответствуют четыре вида функций обнаружения, для ясности дальнейшего изложения приведем их краткое описание. При поиске первым способом функция обнаружения имеет вид

$$b(z_j) = 1 - \left(1 - \frac{kz_j}{l}\right)^l, \tag{1}$$

где l — число «просмотров» области поиска за время поиска; $k \leqslant 1$ — вероятность правильного распознавания цели при ее обнаружении. Данная зависимость соответствует *показательной* функции обнаружения. Если значение l мало, то такой поиск называется «дискретным». Если же оно велико, то поиск называется «непрерывным», при этом функция обнаружения принимает вид

$$b(z_j) = 1 - \exp(-kz_j), \tag{2}$$

т. е. является *экспоненциальной*. Данная функция обнаружения используется в теории поиска наиболее часто. При поиске вторым способом условная вероятность обнаружения прямо пропорциональна затратам поискового ресурса:

$$b(z_j) = kz_j, \quad z_j \leqslant 1, \tag{3}$$

т. е. функция обнаружения $b(z_j)$ *линейная*. Условную вероятность обнаружения при поиске третьим способом можно определить *степенной* функцией

$$b(z_j) = krz_j{}^r, \quad z_j \leqslant \frac{1}{\sqrt[r]{r}}, \tag{4}$$

в которой $r \geqslant 1$ — некоторый показатель, определяющий скорость нарастания «информированности» наблюдателя по мере поиска. При $r = 1$ линейная функция есть частный случай степенной. Поскольку учитывается вероятность $k \leqslant 1$ распознавания цели, возможна ситуация, когда при полном обследовании ячейки $\left(z_j = \frac{1}{\sqrt[r]{r}}\right)$ объект не будет обнаружен. Тогда, если процедура поиска повторяется заново, т. е. если $z_j > \frac{1}{\sqrt[r]{r}}$, условную вероятность обнаружения можно выразить приближенной формулой

$$b(z_j) = 1 - (1 - k)^{z_j \sqrt[r]{r}}, \tag{5}$$

при этом функция обнаружения становится показательной, как и при поиске первым способом.

Решением задачи поиска является *план поиска* — функция распределения поисковых усилий f, которая определяет количество поисковых усилий z_j, распределенных в ячейку j. Пусть F — это множество функций распределения поисковых усилий. Для функции распределения f можно вычислить вероятность обнаружения

$$P(f) = \sum_{j=1}^{n} p_j b(z_j) \tag{6}$$

и требуемое (израсходованное) количество поисковых усилий, или *ресурс поисковых усилий* $C(f) = \sum_{j=1}^{n} z_j$. Пусть $M > 0$ — это ограничение на ресурс поисковых усилий. Тогда поисковый план $f^* \in F$ — оптимальный для ресурса M, если $C(f^*) \leqslant M$ и $P(f^*) \geqslant P(f)$ (см. формулу (6)) для всех $f \in F$ при условии $C(f) \leqslant M$. В [5] предполагается, что поиск ведется не одновременно во всех n ячейках, а поэтапно, путем обследования m ячеек в ходе одного этапа, $1 \leqslant m \leqslant n$, при этом как предельное число этапов поиска $K \geqslant 1$, так и лимит поискового ресурса M могут быть не известны.

Введем обозначения. Совокупность из m ячеек обозначим как область S, а оставшиеся ячейки области J — как область U. Будем считать, что запись $j \in J$ эквивалентна записи $j = 1, \ldots, n$, а $j \in S$ эквивалентно $j = 1, \ldots, s, \ldots, m$, $m \leqslant n$. Если поисковые усилия распределены в ячейку j, то пишем $j \in S$, а если они в нее не распределены — то $j \in U$. Таким же образом запись $j = s$ или $j = u$ предполагает любую ячейку соответственно области S или U. Тот же смысл вкладываем в запись «ячейки s» или «ячейки u», поэтому запись p_s равнозначна записи $p_{j=s}$ или $p_{j \in S}$. Также считаем, что $\sum_U p_u$ означает то же, что и $\sum_{j \in U} p_j$, а $\sum_S p_s \ln p_s$ — то же, что $\sum_{j=1}^{m} p_j \ln p_j$ или $\sum_{j \in S} p_j \ln p_j$.

Известно, что основание логарифма в функции энтропии может быть любым, и для удобства изложения будем использовать натуральный логарифм. Энтропию области J обозначим $H_J = -\sum_{j=1}^{n} p_j \ln p_j$ и представим в виде $H_J = H_S + H_U$, здесь $H_S = -\sum_S p_s \ln p_s$ — часть энтропии, приходящаяся на область поиска, $H_U = -\sum_U p_u \ln p_u$ — часть энтропии, приходящаяся на область, где поиск не выполняется. По аналогии для апостериорной энтропии можно записать $\acute{H}_J = \acute{H}_S + \acute{H}_U$, здесь $\acute{H}_S = -\sum_S \acute{p}_s \ln \acute{p}_s$, $\acute{H}_U = -\sum_U \acute{p}_u \ln \acute{p}_u$.

3. Теоремы и следствия. С учетом сказанного приведем ряд теорем и следствий из них. Цель — получение результатов, позволяющих решить поставленную выше задачу поиска вне зависимости от вида функции обнаружения и ограничений на число этапов поиска K, ресурс поисковых усилий M, вероятность распознавания k и др.

Теорема 1. *Если в результате поиска априорная вероятность $p_{j \in S}$ нахождения цели в ячейках области S уменьшится до значения $q_s = \gamma$,*

$$\gamma = \exp\left(-\frac{H_U}{\sum_U p_u}\right), \tag{7}$$

то апостериорная энтропия $\acute{H}_J$ достигнет максимума $\acute{H}_{J\,\max}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При поиске в ячейке s априорная вероятность p_s уменьшится на величину $\delta p_s = b(z_s) p_s$ и станет равна $q_s = p_s - \delta p_s = p_s\,(1 - b\,(z_s))$. С учетом поиска одновременно в m ячейках области S запишем $\sum_S q_s = \sum_S p_s - \sum_S \delta p_s = \sum_S p_s (1 - b\,(z_s))$, где $\sum_S \delta p_s = \sum_S p_s b\,(z_s)$. Выразим $\acute{p}_s$ через δp_s:

$$\acute{p}_s = \frac{p_s - \delta p_s}{1 - \sum_S \delta p_s} = \frac{p_s\,(1 - b\,(z_s))}{1 - \sum_S p_s b\,(z_s)} = \frac{q_s}{1 - \sum_S \delta p_s}. \tag{8}$$

Тогда $\sum_S \delta p_s$ может быть выражена как

$$\sum_S \delta p_s = \frac{\sum_S p_s - \sum_S \acute{p}_s}{1 - \sum_S \acute{p}_s}. \tag{9}$$

С учетом приложенных в S поисковых усилий апостериорная вероятность $\acute{p}_u$ нахождения цели в других ячейках области J также изменится и станет равной $\acute{p}_u = \frac{p_u}{1-\sum_S \delta p_s}$, после чего с учетом (9) может быть преобразована следующим образом:

$$\acute{p}_u = p_u \frac{1 - \sum_S \acute{p}_s}{1 - \sum_S p_s}. \tag{10}$$

Поскольку $\sum_S p_s + \sum_U p_u = \sum_S \acute{p}_s + \sum_U \acute{p}_u = 1$, получим $\acute{p}_u = p_u \frac{\sum_U \acute{p}_u}{\sum_U p_u}$. Аналогично выражение (8) можно привести к виду $\acute{p}_s = q_s \frac{1-\sum_S \acute{p}_s}{1-\sum_S p_s} = q_s \frac{\sum_U \acute{p}_u}{\sum_U p_u}$.

Энтропия H_J имеет максимум в случае, когда целевой функционал

$$y = \sum_J p_j \ln p_j = -H_J \tag{11}$$

имеет минимум. Если поиск в ячейке s не дал результата, то апостериорная вероятность нахождения цели в ней становится равной $\acute{p}_s$, а величина изменения вероятности равной

$$\Delta p_s = p_s - \acute{p}_s. \tag{12}$$

С учетом (10) представим условие $\sum_J p_j = 1$ так:

$$\begin{gathered}(p_1 - \Delta p_1) + \\ + \ldots + (p_s - \Delta p_s) + \ldots + (p_m - \Delta p_m) + p_{m+1} \frac{1 - \sum_S \acute{p}_s}{1 - \sum_S p_s} + \ldots + p_n \frac{1 - \sum_S \acute{p}_s}{1 - \sum_S p_s} = 1,\end{gathered}$$

или после преобразования в виде

$$\begin{gathered}(p_1 - \Delta p_1) + \\ + \ldots + (p_m - \Delta p_m) + p_{m+1}\left(1 + \frac{\sum_S \Delta p_s}{1 - \sum_S p_s}\right) + \ldots + p_n\left(1 + \frac{\sum_S \Delta p_s}{1 - \sum_S p_s}\right) = 1.\end{gathered}$$

Тогда функционал (11) запишем следующим образом:

$$\begin{gathered}y(\Delta p_1, \ldots, \Delta p_m) = (p_1 - \Delta p_1) \ln (p_1 - \Delta p_1) + \ldots + (p_m - \Delta p_m) \ln (p_m - \Delta p_m) + \\ + p_{m+1}\left(1 + \frac{\sum_S \Delta p_s}{1 - \sum_S p_s}\right) \ln \left[p_{m+1}\left(1 + \frac{\sum_S \Delta p_s}{1 - \sum_S p_s}\right)\right] + \\ + \ldots + p_n\left(1 + \frac{\sum_S \Delta p_s}{1 - \sum_S p_s}\right) \ln \left[p_n\left(1 + \frac{\sum_S \Delta p_s}{1 - \sum_S p_s}\right)\right].\end{gathered} \tag{13}$$

Таким образом, величина Δp_s является управляющим параметром, изменение которого определяет значение целевого функционала (11). В общем случае для нахождения условного минимума целевого функционала (11) потребовалось бы составление функции Лагранжа. Однако в рассматриваемом случае каких-либо ограничений по переменным Δp_s на функционал (11) не накладывается, поэтому функция Лагранжа будет совпадать с самим функционалом. Для нахождения безусловного минимума целевого функционала (11) найдем частные производные от y по Δp_s и приравняем их к нулю.

Частные производные от y по Δp_s будут иметь вид

$$\frac{\partial y}{\partial \Delta p_s} = -\ln(p_s - \Delta p_s) - 1 + \left[\frac{p_{m+1}}{1-\sum_S p_s}\ln\left[p_{m+1}\left(1+\frac{\sum_S \Delta p_s}{1-\sum_S p_s}\right)\right] + \frac{p_{m+1}}{1-\sum_S p_s}\right] + \\ + \ldots + \left[\frac{p_n}{1-\sum_S p_s}\ln\left[p_n\left(1+\frac{\sum_S \Delta p_s}{1-\sum_S p_s}\right)\right] + \frac{p_n}{1-\sum_S p_s}\right]. \quad (14)$$

Приравняв все m производных (14) к нулю, получим систему из m аналогичных уравнений (приведено одно уравнение для s):

$$\ln(p_s - \Delta p_s) + 1 = \lambda, \quad (15)$$

где

$$\lambda = \left[\frac{p_{m+1}}{1-\sum_S p_s}\ln\left[p_{m+1}\left(1+\frac{\sum_S \Delta p_s}{1-\sum_S p_s}\right)\right] + \frac{p_{m+1}}{1-\sum_S p_s}\right] + \\ + \ldots + \left[\frac{p_n}{1-\sum_S p_s}\ln\left[p_n\left(1+\frac{\sum_S \Delta p_s}{1-\sum_S p_s}\right)\right] + \frac{p_n}{1-\sum_S p_s}\right].$$

Анализ данной системы уравнений позволяет записать:

$$p_1 - \Delta p_1 = \ \ldots = p_s - \Delta p_s \ldots = \ p_m - \Delta p_m,$$

или с учетом (12)

$$\acute{p}_1 = \ldots = \acute{p}_s = \ldots = \ \acute{p}_m. \quad (16)$$

Поскольку значения $\acute{p}_s$ во всех ячейках области S равны, рассмотрим далее одно из m уравнений системы (15):

$$\ln \acute{p}_s + 1 = \left[\frac{p_{m+1}}{1-\sum_S p_s}\ln\left[p_{m+1}\left(1+\frac{\sum_S \Delta p_s}{1-\sum_S p_s}\right)\right] + \frac{p_{m+1}}{1-\sum_S p_s}\right] + \\ + \ldots + \left[\frac{p_n}{1-\sum_S p_s}\ln\left[p_n\left(1+\frac{\sum_S \Delta p_s}{1-\sum_S p_s}\right)\right] + \frac{p_n}{1-\sum_S p_s}\right].$$

Представим это так:

$$\ln \acute{p}_s + 1 = \\ = \left(\frac{p_{m+1}}{1-\sum_S p_s}\ln\left[p_{m+1}\left(1+\frac{\sum_S \Delta p_s}{1-\sum_S p_s}\right)\right] + \right. \\ + \ldots + \frac{p_n}{1-\sum_S p_s}\ln\left[p_n\left(1+\frac{\sum_S \Delta p_s}{1-\sum_S p_s}\right)\right] + \\ + \left(\frac{p_{m+1}}{1-\sum_S p_s} + \ldots + \frac{p_n}{1-\sum_S p_s}\right).$$

Поскольку $\sum_S p_s + \sum_U p_u = 1$, запишем, что

$$1 - \sum_S p_s = \sum_U p_u, \quad (17)$$

тогда с учетом (17) уравнение примет вид

$$\ln p'_s = \sum_U \left(\frac{p_u}{\sum_U p_u} \ln \left[p_u \left(1 + \frac{\sum_S \Delta p_s}{\sum_U p_u} \right) \right] \right), \tag{18}$$

поскольку здесь $\frac{p_{m+1}}{1-\sum_S p_s} + \ldots + \frac{p_n}{1-\sum_S p_s} = \frac{p_{m+1}+\ldots+p_n}{\sum_U p_u} = 1$.

Введем обозначение:

$$\frac{1}{\sum_U p_u} = \alpha, \tag{19}$$

тогда (18) будет таким:

$$\ln p'_s = \sum_U \left(p_u \alpha \ln \left[p_u \left(1 + \sum_S \Delta p_s \alpha \right) \right] \right). \tag{20}$$

Раскроем правую часть (20) и получим выражение

$$\sum_U \left(p_u \alpha \ln \left[p_u \left(1 + \sum_S \Delta p_s \alpha \right) \right] \right) =$$

$$= p_{m+1} \alpha \ln p_{m+1} + p_{m+1} \alpha \ln \left(1 + \sum_S \Delta p_s \alpha \right) + \ldots + p_n \alpha \ln p_n + p_n \alpha \ln \left(1 + \sum_S \Delta p_s \alpha \right),$$

которое, в свою очередь, можно преобразовать следующим образом:

$$\sum_U \left(p_u \alpha \ln \left[p_u \left(1 + \sum_S \Delta p_s \alpha \right) \right] \right) =$$

$$= \alpha \ln \left(1 + \sum_S \Delta p_s \alpha \right) [p_{m+1} + \ldots + p_n] + \alpha \left[p_{m+1} \ln p_{m+1} + \ldots + p_n \ln p_n \right]. \tag{21}$$

Но, согласно (17) и (18), $p_{m+1} + \ldots + p_n = \frac{1}{\alpha}$, отсюда в соответствии с (21) выражение (20) примет вид

$$\ln p'_s = \ln \left(1 + \sum_S \Delta p_s \alpha \right) + \alpha \sum_U \left(p_u \ln p_u \right), \tag{22}$$

откуда получим, что

$$\frac{p'_s}{(1 + \sum_S \Delta p_s \alpha)} = \exp \left[\alpha \sum_U \left(p_u \ln p_u \right) \right] = \exp \left[\frac{\sum_U (p_u \ln p_u)}{\sum_U p_u} \right]. \tag{23}$$

Преобразуем правую часть выражения (23):

$$\exp \left[\frac{\sum_U (p_u \ln p_u)}{\sum_U p_u} \right] = \exp \left[\sum_U \left(\ln \frac{p_u}{\sum_U p_u} \right) \right] = \prod_U p_u^{\frac{p_u}{\sum_U p_u}}.$$

Введем обозначение:

$$\gamma = \prod_U p_u^{\frac{p_u}{\sum_U p_u}}, \tag{24}$$

тогда (23) примет вид $\frac{\acute{p}_s}{1+\sum_S \Delta p_s \alpha} = \gamma$, или с учетом (12) и (19) $\acute{p}_s \frac{1-\sum_S p_s}{1-\sum_S \acute{p}_s} = \gamma$. Далее, принимая во внимание (16), можно записать, что $\acute{p}_s \frac{1-\sum_S p_s}{1-m\acute{p}_s} = \gamma$. С учетом (17) решим данное уравнение относительно $\acute{p}_s$:

$$\acute{p}_s = \frac{\gamma}{1-\sum_S p_s + m\gamma} = \frac{\gamma}{\sum_U p_u + m\gamma}. \tag{25}$$

Учитывая, что в соответствии с (16) $\sum_S \acute{p}_s = m\acute{p}_s$, и принимая во внимание (17), подставим $\acute{p}_s$ из (25) в (9) и получим выражение $\sum_S p_s = \sum_S \delta p_s + m\gamma$. Далее, подставив его в (25), находим, что $\acute{p}_s = \frac{\gamma}{1-\sum_S \delta p_s}$. Сравнив данную формулу с (8), можно заключить, что γ есть вероятность q_s нахождения цели в ячейке s по окончании неудачного поиска, $q_s = p_s - \delta p_s = p_s \left(1 - b\left(z_s\right)\right) = \gamma$. Взяв логарифм от γ (см. (24)), имеем, что $\ln \gamma = \frac{\sum_U p_u \ln p_u}{\sum_U p_u} = -\frac{H_U}{\sum_U p_u}$, откуда, в свою очередь, можно представить γ в виде (7).

Следствие 1. Теорема 1 не предполагает функциональной зависимости $H = H(b)$. Из этого следует, что в рамках данной задачи функция энтропии H безразлична к виду функции обнаружения $b(z)$.

Следствие 2. Из (16) следует, что если апостериорная энтропия достигает максимума $\acute{H}_{J\max}$, то значения апостериорной вероятности $\acute{p}_{j\in S}$ равны.

Следствие 3. Выражение (7) можно представить таким образом:

$$\gamma = \exp\left(-\frac{H_J - H_s}{1-\sum_S p_s}\right). \tag{26}$$

Отсюда следует, что если поиск не производится, то γ принимает некоторое «фиктивное» значение

$$\gamma_0 = \exp\left(-H_J\right), \tag{27}$$

смысл которого будет показан ниже.

Следствие 4. Для достижения максимума энтропии условная вероятность $b\left(z_s\right)$ обнаружения цели в ячейке s должна быть равна

$$b\left(z_s\right) = 1 - \frac{\gamma}{p_s}. \tag{28}$$

Напомним, что после приложения поисковых усилий объемом z_s к ячейке s вероятность p_s уменьшается на $\delta p_s = b(z_s)p_s$ и становится равной $q_s = p_s - \delta p_s = p_s\left(1 - b\left(z_s\right)\right)$, где $\delta p_s = p_s b\left(z_s\right)$, откуда с учетом $q_s = \gamma$ получим (28).

Следствие 5. Если поиск осуществляется одновременно во всей области J, то максимум энтропии достигается при распределении поисковых усилий в $m \leqslant n-1$ ячеек.

Действительно, исходя из (24), при $m = n$ величина γ не существует, так как в этом случае $p_u = 0$, и задача не имеет решения. Для достижения максимума энтропии в области J достаточно распределить поисковые усилия z_s не более чем в $n-1$ ячеек.

Следствие 6. Для экспоненциальной функции обнаружения вида (2) объем поисковых усилий, который необходимо приложить в ячейке s для достижения максимума энтропии, определяется выражением

$$z_s = \frac{1}{k}\left(\ln p_s - \ln \gamma\right). \tag{29}$$

Сравнив формулы (28) и (2), можно записать $\exp(-kz_s) = \frac{\gamma}{p_s}$. Прологарифмировав данное уравнение, получим выражение (29).

Следствие 7. Для показательной функции обнаружения вида (1) объем поисковых усилий, который необходимо приложить в ячейке s для достижения максимума энтропии, определяется так:

$$z_s = \frac{l}{k}\left(1 - \left(\frac{\gamma}{p_s}\right)^{\frac{1}{l}}\right). \tag{30}$$

Сравнив выражения (28) и (1), получим сначала $\left(1 - \frac{kz_j}{l}\right)^l = \frac{\gamma}{p_s}$, далее $1 - \frac{kz_j}{l} = \left(\frac{\gamma}{p_s}\right)^{\frac{1}{l}}$, откуда вытекает (30).

Следствие 8. Для степенной функции обнаружения вида (4) объем поисковых усилий, который необходимо приложить в ячейке s для достижения максимума энтропии, определяется выражением

$$z_s = \left(\left(\frac{1}{kr}\right)\left(1 - \frac{\gamma}{p_s}\right)\right)^{\frac{1}{r}}. \tag{31}$$

Поскольку при $r = 1$ уравнения (3) и (4) совпадают, данное следствие справедливо и для линейной функции обнаружения. Сравнив (28) и (4), получим, что ${z_s}^r = \left(\frac{1}{kr}\right)\left(1 - \frac{\gamma}{p_s}\right)$, откуда непосредственно следует (31).

Следствие 9. Для функции обнаружения вида (5) объем поисковых усилий, который необходимо приложить в ячейке s для достижения максимума энтропии, определяется следующим образом:

$$z_s = \frac{1}{r^{\frac{1}{r}}}\frac{\ln\gamma - \ln p_s}{\ln(1-k)}. \tag{32}$$

Сравнив (28) и (5), запишем уравнение $(1-k)^{z_s \sqrt[r]{r}} = \frac{\gamma}{p_s}$. Прологарифмировав его, получим $z_s r^{\frac{1}{r}} \ln(1-k) = \ln\gamma - \ln p_s$, откуда следует (32).

Теорема 2. *Если в результате поиска в области S апостериорная энтропия $\acute{H}_J$ достигает максимума $\acute{H}_{J\max}$, то*

$$\acute{H}_{J\max} = \breve{\ } \ln \acute{p}_s. \tag{33}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся результатами, полученными при доказательстве теоремы 1. Будем считать, что энтропия $\acute{H}_J$ достигает максимума в точке, где частные производные $\acute{y}_{\Delta p_s}$ (14) от целевого функционала (13) по Δp_s равны нулю. Если $\acute{y}_{\Delta p_s} = 0$, то с учетом выражения (18) целевой функционал (13) может быть представлен так:

$$y_{\min} = \frac{m\acute{p}_s p_{m+1}}{1 - \sum_S p_s}\ln\left[p_{m+1}\left(1 + \frac{\sum_S \Delta p_s}{1 - \sum_S p_s}\right)\right] +$$
$$+ p_{m+1}\left(1 + \frac{\sum_S \Delta p_s}{1 - \sum_S p_s}\right)\ln\left[p_{m+1}\left(1 + \frac{\sum_S \Delta p_s}{1 - \sum_S p_s}\right)\right] +$$
$$+ \ldots \frac{m\acute{p}_s p_n}{1 - \sum_S p_s}\ln\left[p_n\left(1 + \frac{\sum_S \Delta p_s}{1 - \sum_S p_s}\right)\right] + p_n\left(1 + \frac{\sum_S \Delta p_s}{1 - \sum_S p_s}\right)\ln\left[p_n\left(1 + \frac{\sum_S \Delta p_s}{1 - \sum_S p_s}\right)\right] =$$

$$= \frac{p_{m+1}}{1-\sum_S p_s} \ln \left[p_{m+1} \left(1 + \frac{\sum_S \Delta p_s}{1-\sum_S p_s} \right) \right] + \ldots + \frac{p_n}{1-\sum_S p_s} \ln \left[p_n \left(1 + \frac{\sum_S \Delta p_s}{1-\sum_S p_s} \right) \right].$$

С учетом (19) он может быть приведен к виду

$$y_{\min} = p_{m+1}\alpha \ln p_{m+1} + p_{m+1}\alpha \ln \left(1 + \sum_S \Delta p_s \alpha \right) +$$

$$+ \ldots + p_n \alpha \ln p_n + p_n \alpha \ln \left(1 + \sum_S \Delta p_s \alpha \right) =$$

$$= \alpha(p_{m+1} \ln p_{m+1} + \ldots + p_n \ln p_n) + \alpha \ln \left(1 + \sum_S \Delta p_s \alpha \right) (p_{m+1} + \ldots + p_n).$$

Поскольку $p_{m+1} + \ldots + p_n = 1 - \sum_S p_s = \frac{1}{\alpha}$, то $y_{\min}$ может быть представлен как

$$y_{\min} = \ln \left(1 + \sum_S \Delta p_s \alpha \right) + \alpha \sum_U (p_u \ln p_u).$$

Сравнив это выражение с (22), можно записать $y_{\min} = \ln \acute{p}_s$, откуда с учетом (11) получим, что $\acute{H}_{J\max} = -\ln \acute{p}_s$. $\square$

Следствие 10. Если поиск производится одновременно во всей области J, то в соответствии с теоремой 2 $\acute{H}_{J\max} = -\ln \frac{1}{n} = \ln n$, что является известным соотношением.

Следствие 11. Максимум апостериорной энтропии (33) можно дать в виде

$$\acute{H}_{J\max} = \frac{\acute{H}_U}{\sum_U \acute{p}_u}. \tag{34}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $\acute{H}_J = \acute{H}_S + \acute{H}_U$, то, используя выражения (16) и (33), можно записать $-\ln \acute{p}_s = -m\acute{p}_s \ln \acute{p}_s - \sum_U \acute{p}_u \ln \acute{p}_u$, откуда следует, что $-\ln \acute{p}_s(1 - m\acute{p}_s) = -\sum_U \acute{p}_u \ln \acute{p}_u$. Так как $m\acute{p}_s + \sum_U \acute{p}_u = 1$, то $1 - m\acute{p}_s = \sum_U \acute{p}_u$, произведя подстановку, имеем $-\ln \acute{p}_s \sum_U \acute{p}_u = -\sum_U \acute{p}_u \ln \acute{p}_u = \acute{H}_U$, откуда с учетом (33) приходим к (34). $\square$

Теорема 3. *Если в какой-либо из ячеек области S величина априорной вероятности p_s не превышает значения γ (см.* (24)*), то поиск в данной ячейке не приводит к увеличению апостериорной энтропии $\acute{H}_J$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По смыслу теоремы требуется найти такое значение p_s, при котором вне зависимости от объема прилагаемых к ячейке s поисковых усилий величина $\acute{H}(J)$ выше, чем H_J. Анализ целевого функционала (13) показывает, что если Δp_s равно нулю, то $\acute{H}_J = H_J$ вне зависимости от значения p_s. Для анализа величины Δp_s воспользуемся выражением (25):

$$\Delta p_s = p_s - \acute{p}_s = \tfrac{p_s - p_s \sum_S p_s + p_s m\gamma - \gamma}{1 - \sum_S p_s + m\gamma}.$$

Условия, при которых $\Delta p_s = 0$, представим как систему

$$\begin{cases} p_s - p_s \sum_S p_s + p_s m\gamma - \gamma = 0, \\ 1 - \sum_S p_s + m\gamma \neq 0. \end{cases}$$

Уравнение (первая формула системы) имеет два решения. Первое предполагает, что $p_s = \frac{1}{m}$ и $\sum_S p_s = 1$, второе — что $p_s = \gamma$ и $\sum_S p_s = m\gamma$. Рассмотрим первое решение. Если $p_s = \frac{1}{m}$, то для всех значений $m \geqslant 1$ получим $\sum_S p_s = 1$, т. е. $m = n$. В соответствии со следствием 5 стратегия максимума энтропии предполагает условие $m < n$. По этой же причине данное решение не удовлетворяет неравенству (вторая формула системы). Можно видеть, что первое решение соответствует ситуации, когда энтропия уже достигла максимума.

Для второго решения условие $\sum_S p_s = m\gamma$ означает выполнение условия (16), так как в противном случае для какого-либо из значений p_s условие $p_s = \gamma$ не будет выполняться. Таким образом, подходящим решением является только $p_s = \gamma$, т. е. если $p_s \leqslant \gamma$, то $\acute{H}_J \leqslant H_J$. □

Следствие 12. Если поиск может выполняться одновременно только в одной ячейке, т. е. если $m = 1$, то минимальное значение p_j, при котором поиск приводит к увеличению энтропии H_J, равно γ_0, определяемое формулой (27).

Доказательство. Пусть ячейка с номером j рассматривается на предмет поиска в ней, т. е. $p_j = p_s$. Тогда, согласно теореме 3, указанное минимальное значение p_j имеет место в случае, когда $p_j = p_s = \gamma$. Воспользуемся обозначением (24) и запишем $p_s = \prod_U p_u^{\frac{p_u}{\sum_U p_u}}$. Прологарифмировав его, получим, что $\ln p_s = \sum_U \left(\frac{p_u}{\sum_U p_u} \ln p_u\right)$. Данное выражение можно представить как $\ln p_s = \frac{\sum_U (p_u \ln p_u)}{1-\sum_S p_s}$. В свою очередь, его можно привести к виду $\ln p_s - \ln p_s \sum_S p_s = \sum_U p_u \ln p_u$. Далее, поскольку исследуется только одна ячейка, то $\sum_S p_s = p_s$. Тогда $\ln p_s \sum_S p_s = p_s \ln p_s$, поэтому можно записать $\ln p_s = p_s \ln p_s + \sum_U p_u \ln p_u = -H_J$. Таким образом, если $p_s \leqslant \exp(-H_J)$, то $p_s \leqslant \gamma$ и, согласно теореме 3, поиск не приводит к возрастанию энтропии H_J. Но по условию принято, что $p_s = p_j$, а в соответствии с (27) $\exp(-H_J) = \gamma_0$, т. е. при $p_j \leqslant \gamma_0$ поиск не приводит к увеличению энтропии H_J. □

Примечание. В этом и заключается смысл «фиктивного» значения $\gamma_0 = \exp(-H_J)$, о котором говорилось в следствии 3: γ_0 соответствует минимальному значению p_j, при котором поиск в ячейке j ведет к росту энтропии.

Следствие 13. Если поиск осуществляется одновременно во всей области J, а наименьшее из значений p_j равно p_n, то $p_n = \gamma$. Это непосредственно вытекает из выражения (24). Если же в области J имеет место соотношение $p_{n-r} = p_{n-r+1} = \ldots = p_n$, то $m = n - r$ и имеет место равенство $p_{n-r} = p_{n-r+1} = \ldots = p_n = \gamma$, что также можно проверить подстановкой в (24).

Теорема 4. *Пусть в каждую из ячеек области S может быть распределено одинаковое количество поисковых усилий z_s, равное z, при этом условная вероятность обнаружения цели составляет $b(z)$. Тогда энтропия получит наибольшее приращение $\Delta H = \acute{H}_J - H_J$ при поиске в той ячейке, где вероятность p_s максимальна.*

Доказательство. В [5] показано, что априорную энтропию H_J можно записать следующим образом:

$$H_J = H(p_S,\ p_U) + p_S H\left(\frac{p_s}{p_S}\right) + p_U H\left(\frac{p_u}{p_U}\right), \tag{35}$$

где p_S, p_U — суммарная вероятность нахождения цели соответственно в области S и области U; $H\left(\frac{p_s}{p_S}\right)$, $H\left(\frac{p_u}{p_U}\right)$ — условная энтропия указанных областей.

Аналогично, апостериорную энтропию $\acute{H}_J$ можно представить в виде

$$\acute{H}_J = \acute{H}\left(\acute{p}_S,\ \acute{p}_U\right) + \acute{p}_S \acute{H}\left(\frac{\acute{p}_s}{\acute{p}_S}\right) + \acute{p}_U \acute{H}\left(\frac{\acute{p}_u}{\acute{p}_U}\right). \tag{36}$$

Рассмотрим составные части (35) и (36). Поскольку по условию теоремы область S содержит только одну ячейку, то $s = 1$, а ее условная энтропия равна нулю, $H\left(\frac{p_s}{p_S}\right) = -\left(\frac{p_s}{p_s}\right)\ln\left(\frac{p_s}{p_s}\right) = 0$. То же можно записать и об условной апостериорной энтропии $\acute{H}\left(\frac{\acute{p}_s}{\acute{p}_s}\right)$.

Покажем далее, что $H\left(\frac{p_u}{p_U}\right) = \acute{H}\left(\frac{\acute{p}_u}{\acute{p}_U}\right)$. Поскольку $H\left(\frac{p_u}{p_U}\right) = -\sum_U \frac{p_u}{1-p_s}\ln\frac{p_u}{1-p_s}$, $\acute{H}\left(\frac{\acute{p}_u}{\acute{p}_U}\right) = -\sum_U \frac{\acute{p}_u}{1-\acute{p}_s}\ln\frac{\acute{p}_u}{1-\acute{p}_s}$, будет достаточно показать, что $\frac{p_u}{1-p_s} = \frac{\acute{p}_u}{1-\acute{p}_s}$. С учетом (8) $\acute{p}_s$ примет вид

$$\acute{p}_s = \frac{p_s\left(1-b(z)\right)}{1-p_s b(z)}, \tag{37}$$

а $1-\acute{p}_s$ можно представить так:

$$1-\acute{p}_s = \frac{1-p_s}{1-p_s b(z)}. \tag{38}$$

Тогда, учитывая, что $\acute{p}_u = \frac{p_u}{1-p_s b(z)}$, запишем $\frac{\acute{p}_u}{1-\acute{p}_s} = \left(\frac{p_u}{1-p_s b(z)}\right) \div \left(\frac{1-p_s}{1-p_s b(z)}\right) = \frac{p_u}{1-p_s}$, откуда следует, что $H\left(\frac{p_u}{p_U}\right) = \acute{H}\left(\frac{\acute{p}_u}{\acute{p}_U}\right)$.

Введем величину приращения энтропии $\Delta H = \acute{H}_J - H_J$. С учетом выражений (35), (36) и равенства $H\left(\frac{p_u}{p_U}\right) = \acute{H}\left(\frac{\acute{p}_u}{\acute{p}_U}\right)$ получим, что

$$\Delta H = \acute{H}\left(\acute{p}_S,\ \acute{p}_U\right) - H\left(p_S,\ p_U\right) + (p_s - \acute{p}_s) H\left(\frac{p_u}{p_U}\right). \tag{39}$$

Поскольку $H\left(\frac{p_s}{p_S}\right) = 0$, то из (35) вытекает, что $H\left(\frac{p_u}{p_U}\right) = \frac{1}{1-p_s}\ \left(H_J\ -\ H\left(p_S,\ p_U\right)\right)$. Тогда с учетом (37) запишем, что

$$p_s - \acute{p}_s = \frac{p_s b(z)\left(1-p_s\right)}{1-p_s b(z)}, \tag{40}$$

откуда вытекает, что $\left(p_s - \acute{p}_s\right) H\left(\frac{p_u}{p_U}\right) = \frac{p_s b(z)}{1-p_s b(z)}\left(H_J\ -\ H\left(p_S,\ p_U\right)\right)$. Тогда с учетом (38) и (40) выражение (39) может быть представлено следующим образом:

$$\Delta H = \acute{H}\left(\acute{p}_S,\ \acute{p}_U\right) - H\left(p_S,\ p_U\right) + \frac{p_s b(z)}{1-p_s b(z)}\left(H_J\ -\ H\left(p_S,\ p_U\right)\right), \tag{41}$$

где H_J — постоянная величина для заданного распределения p_j;

$$H\left(p_S,\ p_U\right) = -\left(p_s \ln p_s + (1-p_s)\ln\left(1-p_s\right)\right),$$

$$\acute{H}\left(\acute{p}_S,\ \acute{p}_U\right) = -\left(\frac{p_s\left(1-b(z)\right)}{1-p_s b(z)}\ln\frac{p_s\left(1-b(z)\right)}{1-p_s b(z)} + \left(\frac{1-p_s}{1-p_s b(z)}\right)\ln\left(\frac{1-p_s}{1-p_s b(z)}\right)\right).$$

Исследуем далее величину ΔH (см. (41)). Частная производная от ΔH по p_s имеет вид

$$\frac{\partial \Delta H_s}{\partial p_s} = \partial_1 \frac{\Delta H_s}{\partial p_s} + \partial_2 \frac{\Delta H_s}{\partial p_s} + \partial_3 \frac{\Delta H_s}{\partial p_s}, \tag{42}$$

здесь

$$\partial_1 \frac{\Delta H_s}{\partial p_s} = -\frac{(1-b(z))}{1-p_s b(z)} \ln \frac{p_s\,(1-b(z))}{1-p_s b(z)} - \frac{p_s b(z)\,(1-b(z)) \ln \frac{p_s(1-b(z))}{1-p_s b(z)}}{(1-p_s b(z))^2} -$$
$$- \left(-\frac{1-b(z)}{1-p_s b(z)} - \frac{p_s b(z)\,(1-b(z))}{(1-p_s b(z))^2}\right) \ln\left(1 - \frac{p_s\,(1-b(z))}{1-p_s b(z)}\right),$$

$$\partial_2 \frac{\Delta H_s}{\partial p_s} = \ln p_s - \ln(1-p_s),$$

$$\partial_3 \frac{\Delta H_s}{\partial p_s} = \frac{p_s b^2(z)\,(H_J + p_s \ln p_s + (1-p_s)\ln(1-p_s))}{(1-p_s b(z))^2} +$$
$$+ \frac{p_s b(z)(\ln p_s - \ln(1-p_s))}{1-p_s b(z)}.$$

Приравняем (42) к нулю и решим полученное уравнение относительно p_s. Уравнение имеет одно решение: $p_s = \exp\left(-H_J + \left(\frac{1}{b(z)} - 1\right) \ln(1-b(z))\right)$. Обозначим его как γ_1, и с учетом (27) представим так:

$$\gamma_1 = \gamma_0\,(1-b(z))^{\frac{1}{b(z)}-1}. \tag{43}$$

Анализ выражения (42) показывает, что в точке $p_s = \gamma_1$ функция (41) имеет минимум, при этом $\Delta H < 0$. Для нахождения значения p_s, при котором поиск сопровождается ростом энтропии, приравняем функцию ΔH (см. (41)) к нулю и решим полученное уравнение относительно p_s. Это уравнение также имеет одно решение: $p_s = \exp(-H_J + b(z)\ln(1+b(z)))$. Обозначим данное решение как γ_2, с учетом (27) его можно записать таким образом:

$$\gamma_2 = \gamma_0\,(1+b(z))^{b(z)}. \tag{44}$$

Анализ выражений (41)–(44) показывает, что при $p_s > \gamma_2$ функция ΔH монотонно возрастает. Таким образом, поиск в ячейке s поисковыми усилиями объемом z ведет к росту энтропии при условии $p_s > \gamma_2$, при этом наибольший прирост энтропии ΔH достигается при поиске в той ячейке, где вероятность p_s максимальна. □

В теореме 4 предполагается, что z_s имеет фиксированное значение z. Следующая теорема исходит из предположения, что в результате поиска энтропия достигает максимума, т. е. z_s является величиной переменной.

Теорема 5. *Пусть при поиске в некоторой ячейке s апостериорная энтропия $\acute{H}_J$ достигает максимума. Тогда наибольший прирост энтропии $\Delta H = \acute{H}_J - H_J$ имеет место при поиске в той ячейке, где вероятность p_s максимальна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку по условию теоремы H_J есть величина постоянная, то ΔH максимальна в случае максимума $\acute{H}_J$. Согласно теореме 1, если в результате поиска в ячейке s энтропия достигает максимума, то апостериорная вероятность $\acute{p}_s$ определяется выражением (25). В свою очередь, из теоремы 2 следует, что максимум $\acute{H}_j$ равен $\breve{}\ln \acute{p}_s$. Тогда функция ΔH максимальна в случае, когда максимально $\breve{}\ln \acute{p}_s$. Учитывая, что по условию теоремы $\sum_S p_s = p_s$, $H_s = -p_s \ln p_s$, воспользуемся формулами (25), (26) и представим $\acute{H}_j = \breve{}\ln \acute{p}_s$ таким образом: $\acute{H}_j = -\ln\left(\frac{\gamma_s}{1-p_s+\gamma_s}\right)$, где $\gamma_s = \exp\left(-\frac{H_J + p_s \ln p_s}{1-p_s}\right)$.

Возьмем частную производную от ΔH по p_s:

$$\frac{\partial \Delta H}{\partial p_s} = \partial_1 \frac{\Delta H_s}{\partial p_s} + \partial_2 \frac{\Delta H_s}{\partial p_s}, \tag{45}$$

здесь

$$\partial_1 \frac{\Delta H_s}{\partial p_s} = \frac{\ln p_s + 1}{1-p_s} + \frac{H_J + p_s \ln p_s}{(1-p_s)^2};$$

$$\partial_2 \frac{\Delta H_s}{\partial p_s} = \frac{\gamma_s\left(-\frac{\ln p_s+1}{1-p_s} - \frac{H_J+p_s\ln p_s}{(1-p_s)^2}\right) - 1}{1-p_s+\gamma_s}.$$

Приравняем данную производную к нулю и решим уравнение относительно p_s. Получим два решения: $p_s = 1$ и $p_s = \gamma_0$, где γ_0 определяется формулой (27). Очевидно, что подходящим является только второе решение. Далее анализ выражения (45) показывает, что в точке $p_s = \gamma_0$ функция ΔH минимальна, а при $p_s > \gamma_0$ она монотонно возрастает. Таким образом, наибольший прирост энтропии ΔH имеет место при поиске в той ячейке, где вероятность p_s максимальна. $\square$

На рис. 1, *I* и *II* представлены графики, построенные для некоторого априорного распределения p_j в условиях соответственно теорем 4 и 5. На рис. 1, *а* изображены графики распределения p_j (кривая *1*), функций $\acute{p}_s$ (кривая *2*) и q_s (кривая *3*, в условиях теоремы 5 график q_s становится графиком γ_s), а также приращения энтропии ΔH (кривая *5*) в ячейках $1, \ldots, n$ при поиске в них с эффективностью b_s (кривая *4*, в условиях теоремы 4 является прямой). В свою очередь, на рис. 1, *б* приведены графики функции ΔH (кривая *1*), а также изменения ее составляющих: $\Delta H_1 = \acute{H}(\acute{p}_S,\ \acute{p}_U) - H(p_S,\ p_U)$ (кривая *2*) и $\Delta H_2 = (p_s - \acute{p}_s) H\left(\frac{p_u}{p_U}\right)$ (кривая *3*), $\Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2$ (выражение (39)).

Дадим комментарии к графикам. На рис. 1, *I*, *а* можно видеть, что приращение энтропии происходит только при поиске в ячейках $s_1 - s_2$, априорная вероятность p_j в которых превышает γ_2 (рис. 1, *I*, *б*). В свою очередь, ситуация, изображенная на рис. 1, *II* может показаться странной. Действительно, согласно следствию 12, при $p_s \leqslant \gamma_0$ поиск не приводит к росту энтропии, в то время как рис. 1, *II* вроде как свидетельствует об обратном. Напомним, что величина γ_s (кривая *3*) по своей сути есть вероятность q_s нахождения цели в ячейке s по окончании поиска в ней, $q_s = p_s(1 - b(z_s))$, но только в ситуации, когда энтропия имеет максимум. Тогда из выражений (8), (37) следует, что если $z > 0$, то $\acute{p}_s > \gamma_s$. Данное условие выполняется только для ячеек $s_1 - s_2$, где кривая *3* расположена ниже кривой *2*. В остальных ячейках условие $p_j > \gamma_0$ не выполняется. Если воспользуемся формулой (28), то убедимся, что в таких ячейках величина $b(z_s)$ принимает отрицательное значение, а это невозможно. На рис. 1, *II*, *а* данная величина (кривая *4*) изображена только на участке $s_1 - s_2$. Таким образом, ситуация вне участка $s_1 - s_2$ (рис. 1, *II*, *а*) и слева от точки $p_j = \gamma_0$ (рис. 1, *II*, *б*) невозможна и изображена исключительно для лучшего понимания теорем 4 и 5.

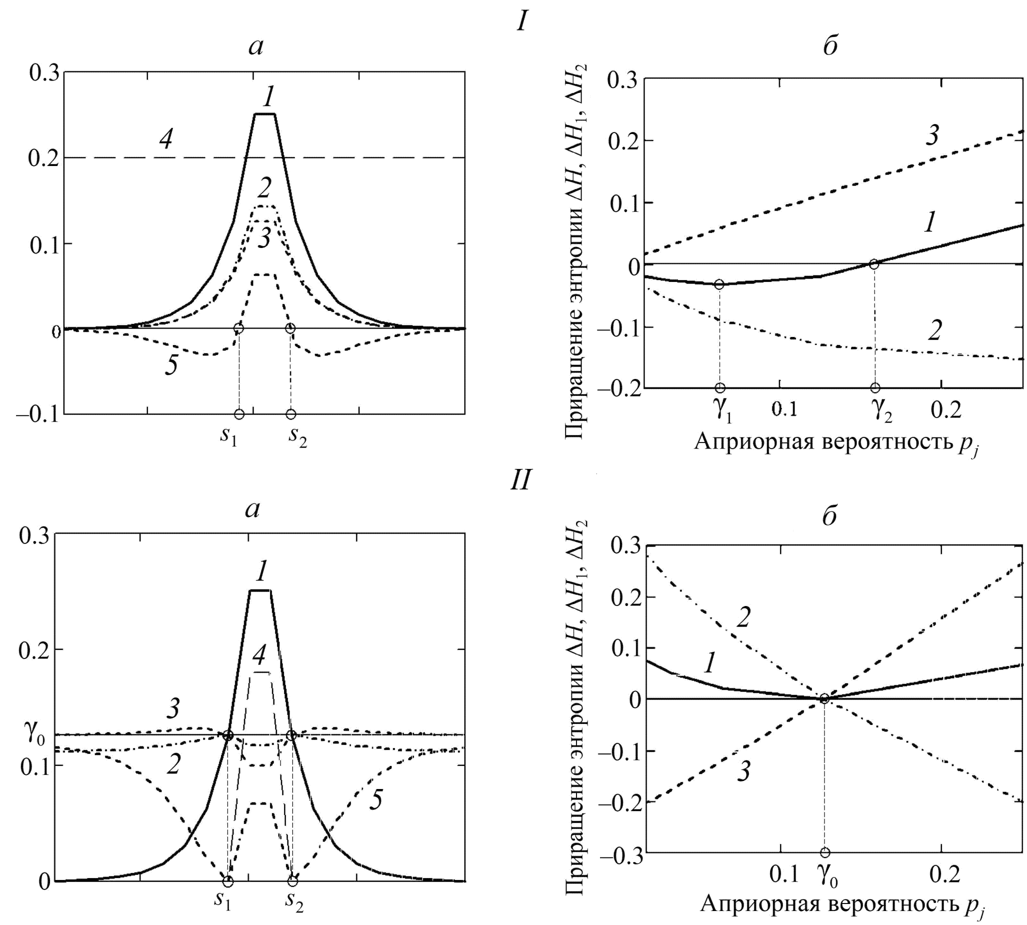

Рис. 1. Распределение вероятности и приращение энтропии
в условиях теоремы 4 (I) и теоремы 5 (II)

а: по вертикальной оси — вероятности p_j, $\acute{p}_s$, q_s, b_s, приращение энтропии ΔH, по горизонтальной оси — номер ячейки j; *1* — p_j, *2* — $\acute{p}_s$, *3* — q_s, *4* — b_s, *5* — ΔH; *б*: *1* — ΔH, *2* — ΔH_1, *3* — ΔH_2.

В теоремах 4 и 5 характер распределения вероятностей p_j не оговаривается. Следующая теорема, напротив, накладывает ограничение на распределение p_j и, как и теорема 5, исходит из предположения, что в результате поиска энтропия достигает максимума, т. е. z_S является величиной переменной.

Теорема 6. *Пусть априорная вероятность нахождения цели в области J может быть распределена различными способами, при этом суммарная вероятность p_S нахождения цели в области S может принимать любые значения, а соотношение вероятностей p_u нахождения цели в ячейках области U всегда остается неизменным:*

$$p_u = p_{0u}(1 - p_S), \tag{46}$$

где p_{0u} — значения вероятности нахождения цели в ячейках области U при $p_S = 0$, $\sum_U p_{0u} = 1$. Тогда, если в результате поиска в области S апостериорная энтропия $\acute{H}_J$ достигает максимума $\acute{H}_{J\,\max}$, то она, а также значения апостериорных вероятностей $\acute{p}_j$ есть константы, не зависящие от p_S:

$$\acute{H}_{J\max} = -\ln \acute{p}_s,$$

$$\acute{p}_s = \frac{1}{m + \exp(H_{S0})}, \tag{47}$$

$$\acute{p}_u = \frac{p_{0u} \exp(H_{S0})}{m + \exp(H_{S0})}, \tag{48}$$

где $H_{S0} = H_J$ *при* $p_S = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. На рис. 2 приведен пример распределения вероятностей, соответствующего условиям теоремы, в котором $n = 4$, $p_1 = p_S$, $p_{02} = 0.5$, $p_{03} = 0.3$, $p_{04} = 0.2$.

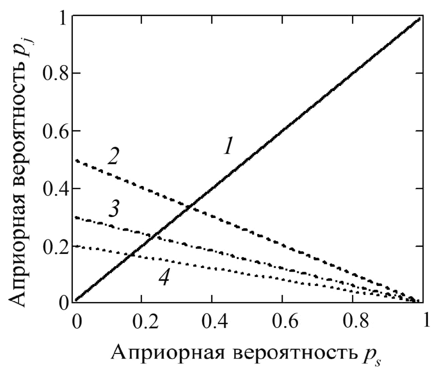

Рис. 2. Распределение априорной вероятности в условиях теоремы 6
1 — p_S; *2* — p_2; *3* — p_3; *4* — p_4.

Если в области S апостериорная энтропия $\acute{H}_J$ достигла максимума, то это значит, что в результате поиска априорная вероятность p_s в каждой ячейке области S уменьшилась до значения γ, определяемого выражением (24). Тогда апостериорная вероятность $\acute{p}_s$ будет определяться уравнением (25), откуда следует, что

$$\frac{1}{\acute{p}_s} = m + \frac{\sum_U p_u}{\gamma}. \tag{49}$$

Введем обозначение:

$$\beta\,(p_S) = \frac{\sum_U p_u\,(p_S)}{\gamma\,(p_S)}, \tag{50}$$

где $p_u\,(p_S)$, $\gamma\,(p_S)$ — величины соответственно p_u и γ в условиях теоремы $p_u\,(p_S) = p_{0u}(1 - p_S)$. Рассмотрим, как при этом будет изменяться $\beta\,(p_S)$. Сумму $\sum_U p_u\,(p_S)$ можно представить в виде $\sum_U p_u\,(p_S) = (1 - p_S) \sum_U p_{0u}$. Далее можно записать, что $\gamma\,(p_S) = \gamma_{S0} \prod_U (1 - p_S)^{\frac{p_{0u}}{\sum_U p_{0u}}}$, здесь γ_{S0} есть константа, определяемая формулой (24) для значений p_{0u}. Поскольку по условию теоремы $\sum_U p_{0u} = 1$, данное выражение преобразуется к виду

$$\gamma\,(p_S) = \gamma_{S0} \prod_U (1 - p_S)^{p_{0u}}. \tag{51}$$

Далее произведем подстановку $\gamma(p_S)$ из (51) в (50) и прологарифмируем полученное выражение:

$$\ln\beta(p_S) = \ln(1-p_S) + \ln\sum_U p_{0u} - \ln\gamma_{S0} - \sum_U p_{0u}\ln(1-p_S).$$

Тогда с учетом условия $\sum_U p_{0u} = 1$ получим, что $\ln\beta(p_S) = -\ln\gamma_{S0}$. Откуда следует, что $\beta(p_S) = \beta$, где $\beta = \frac{1}{\gamma_{S0}}$, т. е. $\beta(p_S)$ не зависит от p_S. Тогда выражение (49) примет вид $\frac{1}{\acute{p}_s} = m + \beta$, и отсюда вытекает, что

$$\acute{p}_s = \frac{1}{m + \frac{1}{\gamma_{S0}}}, \tag{52}$$

т. е. значения $\acute{p}_s$ в условиях теоремы 6 являются константами. Из этого также следует, что поскольку в соответствии с теоремой 2 $\acute{H}_{J\max} = -\ln\acute{p}_s$, то в условиях данной теоремы величина $\acute{H}_{J\max}$ также является константой. Так как по условию теоремы в результате поиска в области S энтропия достигла максимума, то $\acute{p}_S = m\acute{p}_s$, с учетом (46) получим, что

$$\acute{p}_u(\acute{p}_S) = \acute{p}_u = p_{0u}(1 - m\acute{p}_s), \tag{53}$$

т. е. значения $\acute{p}_u$ также не зависят от p_S и являются константами. Таким образом, апостериорное распределение $\acute{p}_j$ неизменно для любых значений p_S.

Величина γ_{S0} определяется выражением (24) для условия $p_S = 0$, когда $H_J = H_U = H_{S0}$, где H_{S0} — априорная энтропия при условии $p_S = 0$. Поскольку $\sum_U p_u = 1$, то из (24) вытекает, что $\ln\gamma_{S0} = -H_{S0}$, а $\gamma_{S0} = \exp(-H_{S0})$. Подставив γ_{S0} в (52), имеем выражение (47). В свою очередь, подставив (47) в (53), получим (48). □

Следствие 14. В условиях теоремы 6 наибольшее приращение апостериорной энтропии $\acute{H}_J$ достигается в случае, когда p_s максимальна.

Д о к а з а т е л ь с т в о. На рис. 3, *а* представлена зависимость между величинами p_s (прямая *1*), $\acute{p}_s$ (прямая *2*) и γ_s (прямая *3*) для некоторого распределения p_j согласно условиям теоремы 6, т. е. все величины являются функциями от p_s. В свою

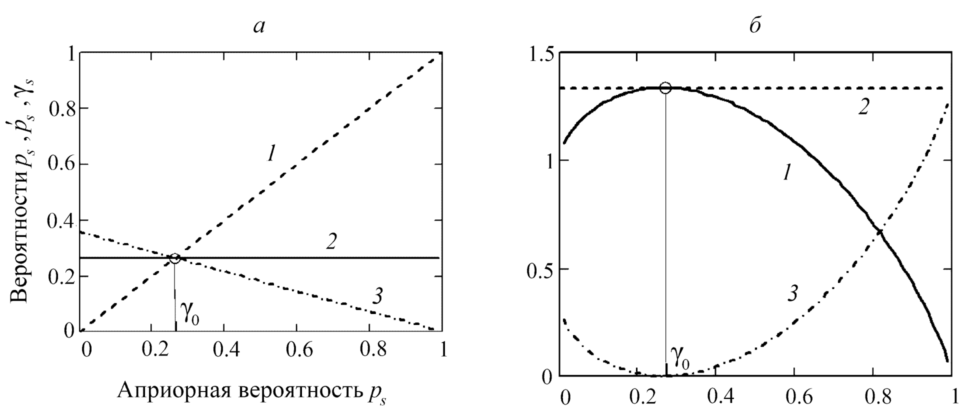

Рис. 3. Изменение вероятности и энтропии в условиях теоремы 6
а: *1* — p_s, *2* — $\acute{p}_s$, *3* — γ_s; *б*: по вертикальной оси — энтропия H_J, $\acute{H}_J$, приращение энтропии ΔH; по горизонтальной оси — вероятность p_s, *1* — H_J, *2* — $\acute{H}_J$, *3* — ΔH.

очередь, графики энтропии для данного распределения приведены на рис. 3, *б*: H_J (кривая *1*), $\acute{H}_J$ (прямая *2*) и приращение энтропии $\Delta H = \acute{H}_J - H_J$ (кривая *3*).

Согласно теореме 6, апостериорная энтропия $\acute{H}_J$ есть константа. Ситуация на участке $0 \leqslant p_s < \gamma_0$, как это имело место в теореме 5, является невозможной, поскольку $\acute{p}_s$ и γ_s не могут быть больше p_s, графики на этом участке изображены исключительно для наглядности. Значение γ_0 можно определить из условия $\gamma_s = \acute{p}_s$ (см. рис. 3, *а*), используя выражение (47). Для распределения, приведенного на рис. 3, получим $\gamma_0 = \acute{p}_s = 0.263$.

При $p_s > \gamma_0$ функция H_J монотонно убывает по мере увеличения p_s, а ΔH, в свою очередь, монотонно возрастает. Таким образом, наибольшее приращение апостериорной энтропии $\acute{H}_J$ достигается в случае, когда p_s максимальна. $\square$

Во всех приведенных выше теоремах речь шла о достижении глобального максимума энтропии без учета ограничения поискового ресурса $C = \sum_S z_s \leqslant M$. При наличии такого ограничения данная задача будет иметь другое решение. Согласно лемме 1 из работы [5], локальный максимум энтропии $\acute{H}_{J\,\max}$ достигается равенством вероятности $\acute{p}_s$ нахождения цели в тех ячейках области J, где выполняется поиск. Приведенные ниже теоремы 7–10 говорят о том, как распределить поисковые усилия z_s объемом M таким образом, чтобы достичь равенства апостериорной вероятности $\acute{p}_s$ для различных функций обнаружения.

Из (8) следует: если $\acute{p}_s = \frac{p_s(1-b(z_s))}{1-\sum_S p_s b(z_s)}$, $\acute{p}_{s+i} = \frac{p_{s+i}(1-b(z_{s+i}))}{1-\sum_S p_s b(z_s)}$, где $s+i \leqslant m$, то равенство $\acute{p}_s = \acute{p}_{s+i}$ предполагает, что

$$p_s\left(1-b\left(z_s\right)\right) = p_{s+i}\left(1-b\left(z_{s+i}\right)\right). \tag{54}$$

Это равенство использовалось при доказательстве теорем 7–10 как исходное условие.

Теорема 7. *Для экспоненциальной функции обнаружения вида* (2) *количество поисковых усилий, которое необходимо приложить в ячейке s для достижения равенства апостериорной вероятности $\acute{p}_s$ в ячейках области S, определяется выражением*

$$z_s = \frac{1}{m}\left(M + \frac{m}{k}\ln p_s - \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{m}\ln p_j\right). \tag{55}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть ячейка s — это ячейка с номером 1. Согласно (54), для функции обнаружения вида (2) можно записать $p_1 \exp\left(-kz_1\right) = p_2 \exp\left(-kz_2\right)$, откуда следует $\ln p_1 - \ln p_2 - kz_1 = -kz_2$, и далее $z_2 = z_1 + \frac{1}{k}\ln p_2 - \frac{1}{k}\ln p_1$.

Аналогично для $\acute{p}_1 = \acute{p}_3$ $z_3 = z_1 + \frac{1}{k}\ln p_3 - \frac{1}{k}\ln p_1$, а для $\acute{p}_1 = \acute{p}_m$ $z_m = z_1 + \frac{1}{k}\ln p_m - \frac{1}{k}\ln p_m$. Поскольку $C = \sum_S z_s = M$, просуммируем полученные выражения и приходим к уравнению $M = mz_1 + \frac{1}{k}\ln p_2 + \frac{1}{k}\ln p_3 + \ldots + \frac{1}{k}\ln p_m - \frac{m-1}{k}\ln p_1$. Добавив к его правой части $+\frac{1}{k}\ln p_1 - \frac{1}{k}\ln p_1$, имеем

$$M = mz_1 + \frac{1}{k}\ln p_1 + \frac{1}{k}\ln p_2 + \frac{1}{k}\ln p_3 + \ldots + \frac{1}{k}\ln p_m - \frac{m}{k}\ln p_1,$$

откуда следует, что $z_1 = \frac{1}{m}\left(M + \frac{m}{k}\ln p_1 - \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{m}\ln p_j\right)$. Учитывая условие, что ячейка s — это ячейка с номером 1, получим выражение (55). $\square$

Теорема 8. *Для показательной функции обнаружения вида* (1) *количество поисковых усилий, которое необходимо приложить в ячейке s для достижения равенства апостериорной вероятности $\acute{p}_s$ в ячейках области S, определяется следующим образом:*

$$z_s = \frac{1}{x_s}\left(M - \frac{nm}{k}\right) + \frac{n}{k}, \tag{56}$$

здесь $x_s = \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{p_s}{p_j}\right)^{\frac{1}{n}}$, $j = 1, \ldots, s, \ldots, m$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть ячейка s — это ячейка с номером 1. Согласно (54), для функции обнаружения вида (1) можно записать $p_1\left(1 - \frac{kz_1}{n}\right)^n = p_2\left(1 - \frac{kz_2}{n}\right)^n$, откуда следует $\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{n-kz_2}{n-kz_1}\right)^n$. Прологарифмировав данное уравнение, получим, что

$$n\ln(n - kz_2) = n\ln(n - kz_1) + \ln p_1 - \ln p_2.$$

Тогда $\ln(n - kz_2) = \ln(n - kz_1) + \ln p_1{}^{\frac{1}{n}} - \ln p_2{}^{\frac{1}{n}}$. Проведя потенцирование данного уравнения, находим $n - kz_2 = (n - kz_1)\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{n}}$, откуда вытекает $z_2 = \frac{n}{k} - \frac{1}{k}(n - kz_1)\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{n}}$. Аналогичные преобразования можно выполнить для величин $z_3, \ldots, z_m$.

Далее, учитывая, что $C = \sum_S z_s = M$, просуммируем выражения, полученные для $z_1, \ldots, z_m$, и приходим к уравнению

$$M = z_1 + \frac{n(m-1)}{k} - \frac{1}{k}(n - kz_1)\sum_{j=2}^{m}\left(\frac{p_1}{p_j}\right)^{\frac{1}{n}},$$

которое затем преобразуем:

$$M = z_1\left(1 + \sum_{j=2}^{m}\left(\frac{p_1}{p_j}\right)^{\frac{1}{n}}\right) + \frac{nm}{k} - \frac{n}{k}\left(1 + \sum_{j=2}^{m}\left(\frac{p_1}{p_j}\right)^{\frac{1}{n}}\right). \tag{57}$$

Введем обозначение:

$$x_1 = 1 + \sum_{j=2}^{m}\left(\frac{p_1}{p_j}\right)^{\frac{1}{n}} = \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{p_1}{p_j}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Тогда уравнение (57) примет вид $M = z_1x_1 + \frac{nm}{k} - \frac{n}{k}x_1$, откуда $z_1 = \frac{1}{x_1}\left(M - \frac{nm}{k}\right) + \frac{n}{k}$. Учитывая условие, что ячейка s — это ячейка с номером 1, получим, что $z_s = \frac{1}{x_s}\left(M - \frac{nm}{k}\right) + \frac{n}{k}$, где $x_s = \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{p_s}{p_j}\right)^{\frac{1}{n}}$. □

Теорема 9. *Для линейной функции обнаружения вида* (3) *количество поисковых усилий, которое необходимо приложить в ячейке* s *для достижения равенства апостериорной вероятности* $\acute{p}_s$ *в ячейках области* S, *определяется выражением*

$$z_s = \frac{1}{x_s}\left(M - \frac{m}{k}\right) + \frac{1}{k}, \tag{58}$$

в котором $x_s = \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{p_s}{p_j}\right)$, $j = 1, \ldots, s, \ldots, m$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть ячейка s — это ячейка с номером 1. Согласно (54), для функции обнаружения вида (3) можно записать $p_1(1 - kz_1) = p_2(1 - kz_2)$, откуда следует уравнение $\frac{p_1}{p_2} = \frac{1-kz_2}{1-kz_1}$. Оно аналогично уравнению, полученному при доказательстве теоремы 8 для показательной функции при условии $n = 1$. Исходя из этого, подставив в (56) значение $n = 1$, получим выражение (58). □

Теорема 10. *Для функции обнаружения вида* (5) *количество поисковых усилий, которое необходимо приложить в ячейке* s *для достижения равенства апостериорной вероятности* $\acute{p}_s$ *в ячейках области* S, *определяется следующим образом:*

$$z_s = \frac{1}{m}\left(M - mx\ln p_s + x\sum_{j=1}^{m}\ln p_j\right),$$

здесь $x = \frac{1}{\sqrt[r]{r}\,\ln(1-k)}$, $j = 1, \ldots, s, \ldots, m$.

Доказательство. Пусть ячейка s — это ячейка с номером 1. Обозначим также $\sqrt[r]{r} = a$. Согласно (54), для функции обнаружения вида (5) можно записать $p_1(1-k)^{az_1} = p_2(1-k)^{az_2}$, откуда следует $\frac{p_1}{p_2} = (1-k)^{az_2 - az_1}$. Прологарифмировав данное уравнение, получим $\ln p_1 - \ln p_2 = az_2\ln(1-k) - az_1\ln(1-k)$, откуда вытекает, что

$$z_2 = \frac{1}{a\ln(1-k)}\ln p_1 - \frac{1}{a\ln(1-k)}\ln p_2 + z_1.$$

Введем обозначение:

$$x = \frac{1}{a\ln(1-k)} = \frac{1}{\sqrt[r]{r}\,\ln(1-k)}.$$

Учитывая его, запишем уравнение, полученное выше для z_2, для остальных z_s — на примере z_3: $z_3 = x\ln p_1 - x\ln p_3 + z_1$. Далее с учетом условия $C = \sum_S z_s = M$ просуммируем выражения для $z_1, \ldots, z_m$ и приходим к уравнению

$$M = mz_1 + (m-1)x\ln p_1 - x\sum_{j=2}^{m}\ln p_j.$$

Добавим к правой части $+x\ln p_1 - x\ln p_1$. Затем преобразуем его к виду $M = mz_1 + mx\ln p_1 - x\sum_{j=1}^{m}\ln p_j$, откуда находим, что

$$z_1 = \frac{1}{m}\left(M - mx\ln p_1 + x\sum_{j=1}^{m}\ln p_j\right).$$

Учитывая условие, что ячейка s — это ячейка с номером 1, получим, что

$$z_s = \frac{1}{m}\left(M - mx\ln p_s + x\sum_{j=1}^{m}\ln p_j\right),$$

где $x = \frac{1}{\sqrt[r]{r}\,\ln(1-k)}$. □

4. Заключение. Дж. Пирс, завершая работу [8], в числе направлений последующих исследований и нерешенных проблем указал, что неэкспоненциальные функции обнаружения в задачах поиска представляют меньшую практическую значимость, но значительный теоретический интерес и *сложный математический вызов*. Как следует из представленного выше, вызов был принят.

Что видится упущенным в данной работе. Во-первых, задачу нахождения максимума энтропии можно сразу решить с учетом ограничения на поисковый ресурс. Теоремы 1, 2 дают решение без учета такого ограничения, но позволяют определить глобальный максимум энтропии вне зависимости от вида функции обнаружения. Ввод ограничения на поисковый ресурс позволит найти локальный максимум энтропии, но для функции обнаружения конкретного вида. Также можно отметить, что в теоремах 7–10 рассматривается распределение поисковых усилий для всех исследуемых функций обнаружения, за исключением *степенной* функции вида (4).

Завершая статью, отметим следующее. Э. Джейнс утверждал [4, с. 17], что теория информации должна иметь точную, аналитически демонстрируемую всеобъемлющую связь не только с теорией поиска, но и с оптимальным планированием в любой области, поскольку любая оптимальная стратегия — это только процедура, использующая априорную информацию для достижения поставленной цели настолько эффективно, насколько это возможно.

Цель последующей работы — установление этой «аналитически демонстрируемой связи». Направлением дальнейших исследований является разработка алгоритмов решения практических задач поиска на основе полученных теоретических результатов.

Литература

1. *Акоф Р., Сасиени М.* Основы исследования операций / пер. с англ.; под ред. И. А. Ушакова. М.: Мир, 1971. 533 с.

2. *Альсведе Р., Вегенер И.* Задачи поиска / пер. с нем. В. А. Душского; ред. М. Б. Малютов. М.: Мир, 1982. 367 с.

3. Information theory, combinatorics, and search theory: In memory of Rudolf Ahlswede / eds by H. Aydinian, F. Cicalese, C. Deppe. Vol. 7777 of Lecture Notes in Computer Science. Cambrige: Springer, 2013. 773 p. https://doi.org/10.1007/978-3-642-36899-8

4. *Jaynes E. T.* Entropy and search theory // Maximum-entropy and Bayesian methods in inverse problems. Fundamental theories of physics. Dordrecht, Netherlands: Springer, 1985. Vol. 14. P. 1–18.

5. *Прокаев А. Н.* Принцип максимума энтропии в теории поиска // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2023. Т. 19. Вып. 1. С. 27–42. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.103

6. *Stone L. D., Royset J. O., Washburn A. R.* Optimal search for moving targets. Switzerland: Springer, 2016. 312 p. (International Series in Operations Research & Management Science N 237). https:// doi.org/10.1007/978-3-319-26899-6_1

7. *Prokaev A. N.* Search efforts optimal distribution based on the posteriori entropy analysis. Research. Online publication. February 20, 2016. https://doi.org/10.13140/RG.2.1.1446.1209/1. URL: https: //www.researchgate.net/publication/295254267_Search_Efforts_Optimal_Distribution_Based_on_the_Posteriori_Entropy_Analysis?channel=doilinkId=56c89bbd08ae5488f0d6f43fshowFulltext=true (дата обращения: 19 апреля 2023 г.).

8. *Pierce J. G.* A new look at the relation between information theory and search theory // The maximum entropy formalism. Cambridge: MIT Press, 1978. P. 339–402.

Статья поступила в редакцию 29 апреля 2023 г.
Статья принята к печати 8 июня 2023 г.

Контактная информация:

Прокаев Александр Николаевич — д-р техн. наук, доц.; prokaev@bk.ru

Theoretical foundation for solving search problems by the method of maximum entropy

A. N. Prokaev

St. Petersburg federal Research Center of the Russian Academy of Sciences —
Hi Tech Research and Development Office Ltd,
39, 14$^{\text{th}}$ line of Vasilyevsky Island, St. Petersburg, 199178, Russian Federation

For citation: Prokaev A. N. Theoretical foundation for solving search problems by the method of maximum entropy. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2023, vol. 19, iss. 3, pp. 348–368.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.304 (In Russian)

The traditional problem of search theory is to develop a search plan for a physical object in the sea or on land. Known algorithms for the optimal distribution of search resources mainly use the exponential detection function. If we consider the search problem more broadly — as a problem of searching for various information, then the detection function can differ significantly from the exponential one. In this case, the solutions obtained using traditional algorithms may be correct from the point of view of mathematics, but unacceptable from the point of view of logic. In this paper, this problem is solved on the basis of the maximum entropy principle. The theorems are proved, as well as their consequences for four types of detection functions, which make it possible to create algorithms for solving various search problems based on the principle of maximum entropy.

Keywords: information theory, search theory, uniformly optimal search plan, detection function, maximum entropy principle.

References

1. Ackoff R. L., Sasieni M. W. *Fundamentals of operations research.* New York, John Wiley & Sons, Inc. Publ., 1967, 455 p. (Rus. ed.: Ackoff R. L., Sasieni M. W. Osnovi issledovaniya operatsiy. Moscow, Mir Publ., 1971, 533 p.)

2. Ahlswede R., Wegener I. *Suchprobleme* (eng. *Search Problems*). Stuttgart, Teubner Verlag Publ., 1979, 273 p. (Rus. ed.: Ahlswede R., Wegener I. Zadachi poiska. Moscow, Mir Publ., 1982, 367 p.)

3. *Information theory, combinatorics, and search theory: In memory of Rudolf Ahlswede.* Eds by H. Aydinian, F. Cicalese, C. Deppe. Vol. 7777 of Lecture Notes in Computer Science. Cambrige, Springer Publ., 2013, 773 p. https:// doi.org/10.1007/978-3-642-36899-8

4. Jaynes E. T. Entropy and search theory. *Maximum-entropy and Bayesian methods in inverse problems. Fundamental theories of physics.* Dordrecht, Netherlands, Springer Publ., 1985, vol. 14, pp. 1–18.

5. Prokaev A. N. Printsip maksimuma entropii v teorii poiska [The maximum entropy principle in search theory]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes,* 2023, vol. 19, iss. 1, pp. 27–42. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.103 (In Russian)

6. Stone L. D., Royset J. O., Washburn A. R. *Optimal search for moving targets.* Switzerland, Springer Publ., 2016, 312 p. (International Series in Operations Research & Management Science no. 237). https:// doi.org/10.1007/978-3-319-26899-6_1

7. Prokaev A. N. *Search efforts optimal distribution based on the posteriori entropy analysis.* Research: Online publication, February 20, 2016. https://doi.org/10.13140/RG.2.1.1446.1209/1. Available at: https: //www.researchgate.net/publication/295254267_Search_Efforts_Optimal_Distribution _Based_ on_the_Posteriori_Entropy_Analysis?channel=doilinkId=56c89bbd08ae5488f0d6f43fshowFulltext=true (accessed: April 19, 2023).

8. Pierce J. G. A new look at the relation between information theory and search theory. *The Maximum Entropy Formalism.* Cambridge, MIT Press, 1978, pp. 339–402.

Received: April 29, 2023.
Accepted: June 8, 2023.

Author's information:

Aleksandr N. Prokaev — Dr. Sci. in Technics, Associate Professor; prokaev@bk.ru