УДК 517.929 Вестник СПбГУ. Прикладная математика. Информатика... 2023. Т. 19. Вып. 3
MSC 34K20

Устойчивость системы типа Лурье с асинхронными и синхронными переключениями и постоянными запаздываниями

Н. Р. Андриянова

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Андриянова Н. Р.* Устойчивость системы типа Лурье с асинхронными и синхронными переключениями и постоянными запаздываниями // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2023. Т. 19. Вып. 3. С. 320–336. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.302

Задачи анализа систем с синхронными и асинхронными переключениями активно изучались для линейного случая. В данной работе рассматривается система дифференциально-разностных уравнений с переключениями, у которой правая часть состоит из линейного слагаемого и существенно нелинейной части, содержащей компоненты секторного типа. Такого рода системы относятся к классу систем непрямого регулирования Лурье. Исследуются достаточные условия на параметры системы и закон переключения, гарантирующие асимптотическую устойчивость в случае как синхронного переключения между подсистемами, так и асинхронного, т. е. когда нелинейная запаздывающая часть переключается с задержкой, равной соответствующему запаздыванию. При этом требуется, чтобы устойчивость сохранялась при любых постоянных положительных запаздываниях. Задача решается с помощью подхода Ляпунова — Красовского. Выбран функционал, включающий в себя квадратичную форму и интегралы от нелинейностей. Найдены ограничения, обеспечивающие асимптотическую устойчивость для произвольного закона переключения, которые для асинхронного случая при таком подходе оказываются более слабыми. Получены также ограничения на длины промежутков между переключениями при использовании составных функционалов. Такого типа условия аналогичны для случая синхронных и асинхронных переключений. Теоретические результаты проиллюстрированы на специально подобранном примере.

Ключевые слова: нелинейные системы, асимптотическая устойчивость, синхронные и асинхронные переключения, запаздывания, метод Ляпунова — Красовского.

1. Введение. При анализе механических, энергетических и биологических систем, а также в теории автоматического регулирования встречаются системы с заданным во времени кусочно-постоянным законом переключения между нелинейными подсистемами [1–6]. В последнее время интенсивно развивается теория нелинейных систем с переключениями и запаздываниями [7–11]. Анализ устойчивости таких систем проводится в основном при помощи подходов Разумихина и Ляпунова — Красовского. Используется функционал как общий для всех подсистем, так и составной.

Известно, что и при отсутствии переключений прямой метод Ляпунова, расширенный Н. Н. Красовским на случай наличия запаздываний, требует нестандартного подбора функционалов под конкретные типы систем. Например [12], для особого класса однородных систем предложен подход к построению функционалов, дающих оценку области притяжения и решениям. Достаточные условия асимптотической устойчивости широкого класса нелинейных систем с сосредоточенным запаздыванием получены [13] за счет объединения подходов Ляпунова — Красовского и Разумихина.

Абсолютная устойчивость специального вида гибридных существенно нелинейных систем без запаздываний была изучена в статье [14]. В ней получены условия устойчивости, не зависящие от закона переключений. В работе [1] изучены условия на параметры нелинейной механической системы для обеспечения ее устойчивости и диссипативности. Вопросы асимптотической и равномерной асимптотической устойчивости системы, представленной уравнениями Релея, решались в [2], где было выписано условие на функцию переключения. Задача робастного управления нелинейной системой, описывающей динамику полета самолета с переключениями по высоте полета и структурной неопределенностью, решалась в работе [3]. Полученные достаточные условия устойчивости не зависят от переключений. Проанализирована специальная нелинейная система, для устойчивости которой не потребуется вводить условий на закон переключения [4]. Кроме того, выявленные там результаты продемонстрированы на примере задачи стабилизации реактора с мешалкой, имеющей два режима подачи веществ.

Условие в виде линейных матричных неравенств в задаче робастной устойчивости зашумленной системы с асинхронными переключениями с переменным запаздыванием найдено в [7]. Системы с нелинейностями специального вида и постоянным положительным запаздыванием изучались в работе [8]. Предполагалось, что компоненты нелинейности имеют ограниченные частные производные. Получены условия на асинхронный закон переключения. В случае, когда в нелинейной системе запаздывание при переключениях ограничено, установлена ограниченность решения при условии существования специального вида составного функционала Ляпунова—Красовского [9].

Нелинейные однородные системы с сосредоточенными запаздываниями, синхронными и асинхронными переключениями были рассмотрены в работах [10, 11]. Оказалось, что подход Ляпунова—Красовского для асинхронной системы дал менее жесткие условия, чем в синхронном случае, где подход Разумихина требует более слабых условий для устойчивости. С помощью составных функционалов удалось получить аналогичные условия на синхронный и асинхронный законы переключений при произвольных запаздываниях. В предложенной работе подобные результаты получены в случае, когда в системе присутствуют как нелинейная, так и линейная составляющие.

2. Постановка задачи. Исследуется локальная асимптотическая устойчивость нулевого решения системы

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= B^{\sigma(t)}y(t) + A_1^{\sigma(t)}f(x(t)) + A_2^{\sigma(t)}f(x(t-r)), \\ \dot{y}(t) &= D^{\sigma(t)}y(t) + C_1^{\sigma(t)}f(x(t)) + C_2^{\sigma(t)}f(x(t-h)), \end{aligned} \tag{1}$$

где x — n-мерный вектор; y — ν-мерный вектор; r и h — положительные постоянные запаздывания. Обозначим $\tau = \max\{r, h\}$. Предполагается, что данная система состоит из N подсистем и закона переключений между ними — кусочно-постоянной и непрерывной справа функции $\sigma : [-\tau; +\infty) \to \{1, ..., N\}$. Подсистема с номером $s \in \{1, ..., N\}$ с постоянными матрицами соответствующих размерностей будет иметь вид

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= B^{(s)}y(t) + A_1^{(s)}f(x(t)) + A_2^{(s)}f(x(t-r)), \\ \dot{y}(t) &= D^{(s)}y(t) + C_1^{(s)}f(x(t)) + C_2^{(s)}f(x(t-h)). \end{aligned} \tag{2}$$

Считаем, что за каждый конечный отрезок времени может произойти не более чем конечное число переключений.

Предположение 1. В правой части системы (1) присутствует непрерывная вектор-функция $f(x) = \big(f_1(x_1), ..., f_n(x_n)\big)^T$, у которой каждая компонента есть $f_j(x_j) = x_j^{\mu_j} + g_j(x_j)$ с функциями g_j более высокого порядка, чем $x_j^{\mu_j}$:

$$\lim_{|x_j|\to 0} \frac{g_j(x_j)}{x_j^{\mu_j}} = 0, \quad j = 1, ..., n.$$

Степени $1 < \mu_1 \leqslant ... \leqslant \mu_n$ — рациональные числа с нечетными знаменателями и числителями.

Таким образом, однозначные непрерывные нелинейности аппроксимируются степенными функциями. Подсистема (2) — это система непрямого регулирования типа Лурье, где исходный объект задан линейно через состояние y, а управление выбрано в виде существенно нелинейной функции, что позволяет обеспечивать устойчивость для произвольных запаздываний в регуляторе.

Наряду с системой (1) будет также рассмотрена асинхронная система

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= B^{\sigma(t)} y(t) + A_1^{\sigma(t)} f(x(t)) + A_2^{\sigma(t-r)} f(x(t-r)), \\ \dot{y}(t) &= D^{\sigma(t)} y(t) + C_1^{\sigma(t)} f(x(t)) + C_2^{\sigma(t-h)} f(x(t-h)). \end{aligned} \tag{3}$$

Известно (см. [6] и цитируемые там работы), что задержки при переключении могут возникать, например, при формировании обратной связи или получении информации о моменте смены активной подсистемы для формирования управляющего воздействия.

Обозначим $\hat{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ — вектор решения системы (1) с начальным условием $\hat{x}_{t_0} = \varphi$, где функция φ задана и непрерывна на отрезке $[-\tau;\ 0]$.

3. Случаи стационарной линейной составляющей и закона переключений.

3.1. Асинхронный закон переключений. Положим, что в системе (3) линейная часть не переключается, т. е. имеем систему

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= B y(t) + A_1^{\sigma(t)} f(x(t)) + A_2^{\sigma(t-r)} f(x(t-r)), \\ \dot{y}(t) &= D y(t) + C_1^{\sigma(t)} f(x(t)) + C_2^{\sigma(t-h)} f(x(t-h)). \end{aligned} \tag{4}$$

Теорема 1. *Пусть матрица D гурвицева и существует диагональная положительно определенная матрица $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ такая, что отрицательно определены матрицы $(P^{(s)})^T\Lambda + \Lambda P^{(s)}$, где $P^{(s)} = A_1^{(s)} + A_2^{(s)} - BD^{-1}(C_1^{(s)} + C_2^{(s)})$, $s = 1, ..., N$. Тогда нулевое решение системы (4) равномерно асимптотически устойчиво при произвольных запаздываниях и произвольном асинхронном законе переключений.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В качестве нормы вектора условимся брать евклидову норму, для матрицы — спектральную. Подход к доказательству устойчивости, основанный на построении функционалов полного типа и примененный, в частности, в статье [10], будем распространять на данную задачу. Для этого выберем положительно определенную матрицу Q, чтобы матрица $D^TQ + QD$ была отрицательно определена. Тогда можно построить функционал

$$V(t, x_t, y(t)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int\limits_0^{x_i(t)} \xi^{\mu_i} d\xi + \varepsilon y^T(t) Q y(t) - \tilde{f}^T(x(t)) \Lambda B D^{-1} y(t) +$$

$$+\tilde{f}^T(x(t))\Lambda\int\limits_{t-r}^{t} A_2^{\sigma(\theta)}f(x(\theta))d\theta-\tilde{f}^T(x(t))\Lambda BD^{-1}\int\limits_{t-h}^{t} C_2^{\sigma(\theta)}f(x(\theta))d\theta+$$

$$+\int\limits_{t-h}^{t}\big(\beta_1+\gamma_1(h+\theta-t)\big)\|f(x(\theta))\|^2d\theta+\int\limits_{t-r}^{t}\big(\beta_2+\gamma_2(r+\theta-t)\big)\|f(x(\theta))\|^2d\theta, \qquad (5)$$

коэффициенты β_1,β_2, $\gamma_1,\gamma_2,\varepsilon$ положительны, вектор $\tilde{f}(x)=f(x)-g(x)$. Пользуясь неравенством $XY\leqslant\frac{X^2}{2e}+\frac{eY^2}{2}$ для любой $e>0$, оценим функционал (5):

$$V(t,x_t,y)\geqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i x_i^{\mu_i+1}(t)}{\mu_i+1}+a_1\|y(t)\|^2+a_2\int\limits_{-r}^{0}\|f(x(t+\theta))\|^2d\theta+$$

$$+a_3\int\limits_{-h}^{0}\|f(x(t+\theta))\|^2d\theta\ -a_4\sum x_i^{2\mu_i}(t), \qquad (6)$$

$$a_1=\varepsilon\lambda_{\min}(Q)-\frac{e_1}{2},\quad a_2=\beta_2-\frac{\|\Lambda\|\max_s\|A_2^{(s)}\|}{2e_2},\quad a_3=\beta_1-\frac{\|\Lambda BD^{-1}\|\max_s\|C_2^{(s)}\|}{2e_3},$$
$$a_4=\frac{\|\Lambda BD^{-1}\|^2}{2e_1}+\|\Lambda\|\max_s\|A_2^{(s)}\|\frac{re_2}{2}+\|\Lambda BD^{-1}\|\max_s\|C_2^{(s)}\|\frac{he_3}{2},$$

под $\lambda_{\min}(Q)$ подразумеваем наименьшее собственное число матрицы Q. Наложим условия на положительные коэффициенты e_1,e_2 и e_3:

$$e_1<2\varepsilon\lambda_{\min}(Q),\qquad e_2>\frac{\|\Lambda\|\max_s\|A_2^{(s)}\|}{2\beta_2},\qquad e_3>\frac{\|\Lambda BD^{-1}\|\max_s\|C_2^{(s)}\|}{2\beta_1}.$$

Тогда функционал будет положительно определен в области

$$\big\{x_t\in C[-\tau;0]:\|x(t)\|\leqslant H_1\big\}\times\big\{y(t)\in\mathbb{R}^\nu\big\},\quad H_1<\min_{i\in\{1,\dots,n\}}\Big(\frac{\lambda_i}{a_4(\mu_i+1)}\Big)^{\frac{1}{\mu_i-1}}, \qquad (7)$$

где $C[a;b]$ — класс непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций.

Производная функционала (5) вдоль решений системы (4) имеет вид

$$\dot{V}\big|_{(4)}=\tilde{f}^T(x(t))\Lambda P^{\sigma(t)}f(x(t))+2\varepsilon y^T(t)QC_1^{\sigma(t)}f(x(t))+2\varepsilon y^T(t)QC_2^{\sigma(t-h)}f(x(t-h))+$$

$$+\dot{x}^T(t)\Big(\frac{\partial\tilde{f}(x(t))}{\partial x}\Big)^T\Lambda\Bigg(\int\limits_{t-r}^{t}A_2^{\sigma(\theta)}f(x(\theta))d\theta-BD^{-1}\int\limits_{t-h}^{t}C_2^{\sigma(\theta)}f(x(\theta))d\theta-BD^{-1}y(t)\Bigg)+$$

$$+2\varepsilon y^T(t)QDy(t)-\beta_1\|f(x(t-h))\|^2-\beta_2\|f(x(t-r))\|^2+$$

$$+(\beta_1+\beta_2+\gamma_2r+\gamma_1h)\|f(x(t))\|^2-\gamma_1\int\limits_{t-h}^{t}\|f(x(\theta))\|^2d\theta-\gamma_2\int\limits_{t-r}^{t}\|f(x(\theta))\|^2d\theta.$$

Из определения вектор-функции $g(x)$ следует, что можно выбрать произвольное $0<\overline{\varepsilon}<1$, для которого найдется $\overline{\delta}>0$, такая что $\|g(x)\|\leqslant\overline{\varepsilon}\|\tilde{f}(x)\|$ при $\|x\|\leqslant\overline{\delta}$. Отсюда вытекает, что $\|g(x)\|\leqslant\frac{\overline{\varepsilon}}{1-\overline{\varepsilon}}\|f(x)\|$ в указанной области. В итоге можно выбрать постоянные $\alpha_{01},\alpha_{02},\alpha_{03},\alpha_{04},\alpha_{05}$ и положительные величины e_4,e_5 и e_6, чтобы удовлетворить неравенство

$$\dot V\big|_{(4)} \leqslant -\alpha_1\|y(t)\|^2 - \beta_2\|f(x(t-r))\|^2 - \alpha_2\|f(x(t-h))\|^2 - \alpha_3\|f(x(t))\|^2 +$$

$$+ \max_{i=1,\dots,n} \mu_i x_i^{\mu_i-1}(t)\Big(\alpha_{01}\|y(t)\|^2 + \alpha_{03}\|f(x(t-r))\|^2 + \alpha_{04}\int\limits_{-h}^{0} \|f(x(t+\theta))\|^2 d\theta +$$

$$+ \alpha_{05}\int\limits_{-r}^{0} \|f(x(t+\theta))\|^2 d\theta\Big) - \gamma_1\int\limits_{-h}^{0} \|f(x(t+\theta))\|^2 d\theta - \gamma_2\int\limits_{-r}^{0} \|f(x(t+\theta))\|^2 d\theta +$$

$$+ \left(\max_{i=1,\dots,n} \mu_i x_i^{\mu_i-1}(t)\alpha_{02} + \frac{\overline{\varepsilon}^2 \max_s \|\Lambda P_s\|}{2(1-\overline{\varepsilon})^2 e_6} + \frac{e_6 \max_s \|\Lambda P_s\|}{2}\right)\|f(x(t))\|^2,$$

$$-\frac{\alpha_1}{\varepsilon} = \lambda_{\max}(D^TQ + QD) + \frac{\max_s \|QC_2^{(s)}\|^2}{e_4} + \frac{\max_s \|QC_1^{(s)}\|^2}{e_5}, \quad -\alpha_2 = \varepsilon e_4 - \beta_1,$$

$$-\alpha_3 = \frac{1}{2}\max_s \lambda_{\max}\big(\Lambda P^{(s)} + (P^{(s)})^T\Lambda\big) + \varepsilon e_5 + \beta_1 + \beta_2 + \gamma_1 h + \gamma_2 r,$$

в котором $\lambda_{\max}(\cdot)$ — наибольшее собственное число симметричной матрицы. Параметры e_6 и $\overline{\varepsilon}$ берем достаточно малыми, чтобы $\frac{\overline{\varepsilon}^2 \max_s \|\Lambda P_s\|}{2(1-\overline{\varepsilon})^2 e_6} + \frac{e_6 \max_s \|\Lambda P_s\|}{2} < \frac{\alpha_3}{3}$. Отсюда можно найти величину

$$H_2 = \min\left(\overline{\delta};\ \ \left(\frac{1}{\mu_n}\min\left\{\frac{\alpha_1}{2\alpha_{01}}; \frac{\beta_2}{2\alpha_{03}}; \frac{\alpha_3}{3\alpha_{02}}; \frac{\gamma_1}{2\alpha_{04}}; \frac{\gamma_2}{2\alpha_{05}}\right\}\right)^{\frac{1}{\mu_n - 1}}\right)$$

и получить, что в области $\big\{x_t \in C[-\tau;0] : \|x(t)\| \leqslant H_2\big\} \times \big\{y(t) \in \mathbb{R}^\nu\big\}$ производная имеет верхнюю оценку:

$$\dot V\big|_{(4)} \leqslant -\frac{\alpha_1}{2}\|y(t)\|^2 - \frac{\beta_2}{2}\|f(x(t-r))\|^2 - \alpha_2\|f(x(t-h))\|^2 - \frac{\alpha_3}{3}\|f(x(t))\|^2 -$$
$$- \frac{\gamma_1}{2}\int\limits_{-h}^{0} \|f(x(t+\theta))\|^2 d\theta - \frac{\gamma_2}{2}\int\limits_{-r}^{0} \|f(x(t+\theta))\|^2 d\theta. \tag{8}$$

Выберем коэффициенты $\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, e_4, e_5$ из условий

$$\beta_i < -\frac{1}{10}\max_s \lambda_{\max}\big(\Lambda P^{(s)} + (P^{(s)})^T\Lambda\big), \qquad i = 1, 2,$$

$$\gamma_1 h + \gamma_2 r < -\frac{1}{5}\max_s \lambda_{\max}(\Lambda P^{(s)} + (P^{(s)})^T\Lambda),$$

$$e_4 > \frac{-2\max_s \|QC_2^{(s)}\|^2}{\lambda_{\max}(D^TQ + QD)}, \qquad e_5 > \frac{-2\max_s \|QC_1^{(s)}\|^2}{\lambda_{\max}(D^TQ + QD)}.$$

Далее считаем, что

$$\varepsilon < \min\left(-\frac{1}{10e_5}\max_s \lambda_{\max}(\Lambda P^{(s)} + (P^{(s)})^T\Lambda);\ \frac{\beta_1}{e_4}\right).$$

Тогда получится, что α_1, α_2 и α_3 положительны, и в области $\big\{x_t \in C[-\tau;0] : \|x(t)\| \leqslant \min(H_1, H_2)\big\} \times \big\{y(t) \in \mathbb{R}^\nu\big\}$ исследуемый функционал удовлетворяет условиям теоремы Красовского [15, 16], что и гарантирует равномерную асимптотическую устойчивость при произвольных запаздываниях и асинхронном законе переключений. □

Замечание. Отметим, что для существования Λ из условия теоремы достаточно, чтобы $P^{(s)}$ были метцлеровыми и гурвицевыми [17].

3.2. Синхронный закон переключений. Перейдем к случаю синхронных переключений:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= By(t) + A_1^{\sigma(t)} f(x(t)) + A_2^{\sigma(t)} f(x(t-r)), \\ \dot{y}(t) &= Dy(t) + C_1^{\sigma(t)} f(x(t)) + C_2^{\sigma(t)} f(x(t-h)). \end{aligned} \tag{9}$$

Теорема 2. *Пусть матрица D гурвицева, и существует диагональная положительно определенная матрица $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, для которой будут отрицательно определены матрицы $(P^{(s,p,q)})^T\Lambda + \Lambda P^{(s,p,q)}$, где $P^{(s,p,q)} = A_1^{(s)} + A_2^{(p)} - BD^{-1}(C_1^{(s)} + C_2^{(q)})$, $s, p, q = 1, ..., N$. Тогда нулевое решение системы* (9) *равномерно асимптотически устойчиво при произвольных запаздываниях и произвольном законе переключений.*

Доказательство. Скорректируем функционал (5):

$$\begin{aligned} V(t, x_t, y(t)) &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int_0^{x_i(t)} \xi^{\mu_i} d\xi + \varepsilon y^T(t) Q y(t) - \tilde{f}^T(x(t)) \Lambda B D^{-1} y(t) + \\ &+ \tilde{f}^T(x(t)) \Lambda \int_{t-r}^{t} A_2^{\sigma(\theta+r)} f(x(\theta)) d\theta - \tilde{f}^T(x(t)) \Lambda B D^{-1} \int_{t-h}^{t} C_2^{\sigma(\theta+h)} f(x(\theta)) d\theta + \\ &+ \int_{t-h}^{t} \big(\beta_1 + \gamma_1(h + \theta - t)\big) \|f(x(\theta))\|^2 d\theta + \int_{t-r}^{t} \big(\beta_2 + \gamma_2(r + \theta - t)\big) \|f(x(\theta))\|^2 d\theta. \end{aligned} \tag{10}$$

Его оценка снизу имеет вид (6), и он положительно определен в области (7) при ограничениях на коэффициенты e_1, e_2 и e_3, подобных ранее указанным. Выпишем производную функционала (10):

$$\begin{aligned} \dot{V}\big|_{(9)} &= \tilde{f}^T(x(t)) \Lambda P(t) f(x(t)) + 2\varepsilon y^T(t) Q D y(t) + 2\varepsilon y^T(t) Q C_1^{\sigma(t)} f(x(t)) + \\ &+ \dot{x}^T(t) \left(\frac{\partial \tilde{f}(x(t))}{\partial x} \right)^T \Lambda \left(\int_{t-r}^{t} A_2^{\sigma(\theta+r)} f(x(\theta)) d\theta - B D^{-1} \int_{t-h}^{t} C_2^{\sigma(\theta+h)} f(x(\theta)) d\theta - B D^{-1} y(t) \right) + \\ &+ 2\varepsilon y^T(t) Q C_2^{\sigma(t)} f(x(t-h)) + (\beta_1 + \beta_2 + \gamma_2 r + \gamma_1 h) \|f(x(t))\|^2 - \\ &- \beta_1 \|f(x(t-h))\|^2 - \gamma_1 \int_{t-h}^{t} \|f(x(\theta))\|^2 d\theta - \beta_2 \|f(x(t-r))\|^2 - \gamma_2 \int_{t-r}^{t} \|f(x(\theta))\|^2 d\theta \end{aligned}$$

с матрицей $P(t) = A_1^{\sigma(t)} + A_2^{\sigma(t+r)} - BD^{-1}(C_1^{\sigma(t)} + C_2^{\sigma(t+h)})$. Оценка производной находится так же, как оценка (8), и в соответствующей области производная функционала будет отрицательно определена. □

4. Переключения. Составной функционал.

4.1. Синхронные переключения. Теперь речь будет идти о методе составных функционалов [9], в котором функционалы строятся для каждой подсистемы свои, а затем применяются переключения между ними в соответствии с законом переключения между их подсистемами. Данный метод позволяет судить об устойчивости исходной системы (1) и в случае, когда линейные части тоже переключаются со временем.

Предположение 2. Матрицы $D^{(s)}$ гурвицевы. Матрицы

$$P_s = A_1^{(s)} + A_2^{(s)} - B^{(s)}(D^{(s)})^{-1}(C_1^{(s)} + C_2^{(s)})$$

диагонально устойчивы (т. е. найдутся диагональные положительно определенные матрицы $\Lambda^{(s)}$ такие, что матрицы $P_s^T \Lambda^{(s)} + \Lambda^{(s)} P_s$ отрицательно определены) при всех $s = 1, ..., N$.

Воспользуемся функционалом для подсистемы с номером s:

$$V^{(s)}(x_t, y(t)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(s)} \int\limits_0^{x_i(t)} \xi^{\mu_i} d\xi + \varepsilon_s y^T(t) Q_s y(t) - \tilde{f}^T(x(t)) \Lambda^{(s)} B^{(s)} (D^{(s)})^{-1} y(t) +$$
$$+ \tilde{f}^T(x(t)) \Lambda^{(s)} A_2^{(s)} \int\limits_{-r}^{0} f(x(t+\theta)) d\theta - \tilde{f}^T(x(t)) \Lambda^{(s)} B^{(s)} (D^{(s)})^{-1} C_2^{(s)} \int\limits_{-h}^{0} f(x(t+\theta)) d\theta +$$
$$+ \int\limits_{-h}^{0} (\beta_1^{(s)} + \gamma_1^{(s)}(h+\theta)) \|f(x(t+\theta))\|^2 d\theta + \int\limits_{-r}^{0} (\beta_2^{(s)} + \gamma_2^{(s)}(r+\theta)) \|f(x(t+\theta))\|^2 d\theta, \tag{11}$$

где $\beta_1^{(s)} > 0$; $\beta_2^{(s)} > 0$; $\gamma_1^{(s)} > 0$; $\gamma_2^{(s)} > 0$; положительно определенные матрицы Q_s таковы, что матрицы $(D^{(s)})^T Q_s + Q_s D^{(s)}$ отрицательно определены.

Двусторонняя оценка функционала (11) имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i^{(s)}}{\mu_i + 1} x_i^{\mu_i+1}(t) + a_1^{(s)} \|y(t)\|^2 + a_2^{(s)} \int\limits_{-r}^{0} \|f(x(t+\theta))\|^2 d\theta + a_3^{(s)} \int\limits_{-h}^{0} \|f(x(t+\theta))\|^2 d\theta -$$
$$- a_4^{(s)} \sum x_i^{2\mu_i}(t) \leqslant V^{(s)} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i^{(s)}}{\mu_i + 1} x_i^{\mu_i+1}(t) + b_1^{(s)} \|y(t)\|^2 + b_2^{(s)} \int\limits_{-r}^{0} \|f(x(t+\theta))\|^2 d\theta +$$
$$+ b_3^{(s)} \int\limits_{-h}^{0} \|f(x(t+\theta))\|^2 d\theta + a_4^{(s)} \sum x_i^{2\mu_i}(t)$$

с коэффициентами, зависящими от произвольных положительных чисел $e_1^{(s)}$, $e_2^{(s)}$ и $e_3^{(s)}$:

$$a_1^{(s)} = \varepsilon_s \lambda_{\max}(Q_s) - \frac{e_1^{(s)}}{2}, \ \ a_2^{(s)} = \beta_2^{(s)} - \frac{\|\Lambda^{(s)} A_2^{(s)}\|}{2e_2^{(s)}}, \ \ a_3^{(s)} = \beta_1^{(s)} - \frac{\|\Lambda^{(s)} B^{(s)} (D^{(s)})^{-1} C_2^{(s)}\|}{2e_3^{(s)}},$$

$$a_4^{(s)} = \frac{1}{2e_1^{(s)}} \|\Lambda^{(s)} B^{(s)} (D^{(s)})^{-1}\|^2 + \|\Lambda^{(s)} A_2^{(s)}\| \frac{re_2^{(s)}}{2} + \|\Lambda^{(s)} B^{(s)} (D^{(s)})^{-1} C_2^{(s)}\| \frac{he_3^{(s)}}{2},$$

$$b_1^{(s)} = a_1^{(s)} + e_1^{(s)}, \ b_2^{(s)} = \beta_2^{(s)} + \gamma_2^{(s)} r + \frac{\|\Lambda^{(s)} A_2^{(s)}\|}{2e_2^{(s)}},$$

$$b_3^{(s)} = \beta_1^{(s)} + \gamma_1^{(s)} h + \frac{\|\Lambda^{(s)} B^{(s)} (D^{(s)})^{-1} C_2^{(s)}\|}{2e_3^{(s)}}.$$

Для обеспечения положительной определенности функционала (11) наложим условия на его параметры $\varepsilon_s, \beta_1^{(s)}$ и $\beta_2^{(s)}$:

$$\varepsilon_s > \frac{e_1^{(s)}}{2\lambda_{\min}(Q_s)}, \qquad \beta_2^{(s)} > \frac{\|\Lambda^{(s)} A_2^{(s)}\|}{2e_2^{(s)}}, \qquad \beta_1^{(s)} > \frac{\|\Lambda^{(s)} B^{(s)} (D^{(s)})^{-1} C_2^{(s)}\|}{2e_3^{(s)}}.$$

Выбор величин $e_1^{(s)}$, $e_2^{(s)}$ и $e_3^{(s)}$ будет произведен далее.

Можно определить область, где каждый s-й функционал будет положительно определен:

$$\Big\{x_t \in C[-\tau;0] : \|x(t)\| \leqslant H_1\Big\} \times \Big\{y(t) \in \mathbb{R}^\nu\Big\},$$

где $H_1 < \min_{\substack{s\in\{1,\dots,N\}\\ i\in\{1,\dots,n\}}} \left(\frac{\lambda_i^{(s)}}{a_4^{(s)}(\mu_i+1)}\right)^{\frac{1}{\mu_i-1}}$. В этой области двустороннее неравенство примет вид

$$a_0^{(s)}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\mu_i+1}(t) + a_1^{(s)}\|y(t)\|^2 + a_2^{(s)}\int_{-r}^{0}\|f(x(t+\theta))\|^2 d\theta + a_3^{(s)}\int_{-h}^{0}\|f(x(t+\theta))\|^2 d\theta \leqslant$$
$$\leqslant V^{(s)}(x_t, y(t)) \leqslant \tag{12}$$
$$\leqslant b_0^{(s)}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\mu_i+1}(t) + b_1^{(s)}\|y(t)\|^2 + b_2^{(s)}\int_{-r}^{0}\|f(x(t+\theta))\|^2 d\theta + b_3^{(s)}\int_{-h}^{0}\|f(x(t+\theta))\|^2 d\theta,$$

$$a_0^{(s)} = \min_i \frac{\lambda_i^{(s)}}{\mu_i+1}\left(1 - \frac{a_4^{(s)}(\mu_i+1)}{\lambda_i^{(s)}} H_1^{\mu_i-1}\right), \quad b_0^{(s)} = \max_i \frac{\lambda_i^{(s)}}{\mu_i+1}\left(1 + \frac{a_4^{(s)}(\mu_i+1)}{\lambda_i^{(s)}} H_1^{\mu_i-1}\right).$$

Введя общий коэффициент $c = \max_{s,k\in\{1,\dots,N\}} \max_{i=0,..,3} \frac{b_i^{(s)}}{a_i^{(k)}}$, получаем неравенства $V^{(s)}(x_t, y) \leqslant cV^{(k)}(x_t, y)$.

Производная s-го функционала из семейства (11) в силу s-й подсистемы

$$\dot V^{(s)} = \varepsilon_s y^T(t)((D^{(s)})^T Q_s + Q_s D^{(s)})y(t) + 2\varepsilon_s f^T(x(t))(C_1^{(s)} + C_2^{(s)})^T Q_s y(t) +$$
$$+ \tilde f^T(x(t))\Lambda^{(s)} P_s f(x(t)) - 2\varepsilon_s y^T(t) Q_s C_2^{(s)}\Big(f(x(t)) - f(x(t-h))\Big) +$$
$$+ \dot x^T(t)\left(\frac{\partial \tilde f(x(t))}{\partial x}\right)^T \Lambda^{(s)}\left(A_2^{(s)}\int_{-r}^{0} f(x(t+\theta))d\theta - B^{(s)}(D^{(s)})^{-1}C_2^{(s)}\int_{-h}^{0} f(x(t+\theta))d\theta -\right.$$
$$\left. - B^{(s)}(D^{(s)})^{-1}y(t)\right) + (\beta_1^{(s)} + \gamma_1^{(s)}h)\|f(x(t))\|^2 +$$
$$+ (\beta_2^{(s)} + \gamma_2^{(s)}r)\|f(x(t))\|^2 - \beta_1^{(s)}\|f(x(t-h))\|^2 -$$
$$- \gamma_1^{(s)}\int_{-h}^{0}\|f(x(t+\theta))\|^2 d\theta - \beta_2^{(s)}\|f(x(t-r))\|^2 - \gamma_2^{(s)}\int_{-r}^{0}\|f(x(t+\theta))\|^2 d\theta$$

оценивается с использованием неравенства треугольника с произвольными $e_4^{(s)} > 0$ и $e_5^{(s)} > 0$:

$$\dot V^{(s)} \leqslant \varepsilon_s\left(\lambda_{\max}((D^{(s)})^T Q_s + Q_s D^{(s)}) + \frac{\|Q_s C_2^{(s)}\|^2}{2e_4^{(s)}} + \frac{\|Q_s C_1^{(s)}\|^2}{2e_5^{(s)}}\right)\|y(t)\|^2 +$$

$$
\begin{gathered}
+\left(\frac{\varepsilon_s e_4^{(s)}}{2}-\beta_1^{(s)}\right)\|f(x(t-h))\|^2-\beta_2^{(s)}\|f(x(t-r))\|^2+ \\
+\left[\frac{1}{2}\lambda_{\max}(\Lambda^{(s)}P_s+P_s^T\Lambda^{(s)})+\varepsilon_s\frac{e_5^{(s)}}{2}+\beta_1^{(s)}+\beta_2^{(s)}+\gamma_1^{(s)}h+\gamma_2^{(s)}r\right]\|f(x(t))\|^2- \\
-\gamma_1^{(s)}\int_{-h}^{0}\|f(x(t+\theta))\|^2d\theta-\gamma_2^{(s)}\int_{-r}^{0}\|f(x(t+\theta))\|^2d\theta+F^{(s)}(x_t,y(t)),
\end{gathered}
\tag{13}
$$

где

$$
\begin{gathered}
F^{(s)}(x_t,y(t))=\dot{x}^T(t)\left(\frac{\partial\tilde{f}(x(t))}{\partial x}\right)^T\Lambda^{(s)}\left(A_2^{(s)}\int_{-r}^{0}f(x(t+\theta))d\theta-\right. \\
\left.-B^{(s)}(D^{(s)})^{-1}C_2^{(s)}\int_{-h}^{0}f(x(t+\theta))d\theta-B^{(s)}(D^{(s)})^{-1}y(t)\right)-g^T\Lambda^{(s)}P_sf(x(t)).
\end{gathered}
\tag{14}
$$

Вводим обозначения для коэффициентов

$$
-\frac{\alpha_1^{(s)}}{\varepsilon_s}=\lambda_{\max}((D^{(s)})^TQ_s+Q_sD^{(s)})+\frac{\|Q_sC_2^{(s)}\|^2}{2e_4^{(s)}}+\frac{\|Q_sC_1^{(s)}\|^2}{2e_5^{(s)}},\quad -\alpha_2^{(s)}=\frac{\varepsilon_s e_4^{(s)}}{2}-\beta_1^{(s)},
$$

$$
-\alpha_3^{(s)}=\frac{1}{2}\lambda_{\max}(\Lambda^{(s)}P_s+P_s^T\Lambda^{(s)})+\varepsilon_s\frac{e_5^{(s)}}{2}+\beta_1^{(s)}+\beta_2^{(s)}+\gamma_1^{(s)}h+\gamma_2^{(s)}r.
$$

Выберем параметры $e_4^{(s)}, e_5^{(s)}$, чтобы

$$
e_4^{(s)}>\frac{\|Q_sC_2^{(s)}\|^2}{-\lambda_{\max}((D^{(s)})^TQ_s+Q_sD^{(s)})},\quad e_5^{(s)}>\frac{\|Q_sC_1^{(s)}\|^2}{-\lambda_{\max}((D^{(s)})^TQ_s+Q_sD^{(s)})}.
$$

Фиксируем положительные $\beta_1^{(s)}$ и $\beta_2^{(s)}$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$
\beta_1^{(s)}<-\frac{1}{12}\lambda_{\max}(\Lambda^{(s)}P_s+P_s^T\Lambda^{(s)}),\quad \beta_2^{(s)}<-\frac{1}{12}\lambda_{\max}(\Lambda^{(s)}P_s+P_s^T\Lambda^{(s)}),
$$

а также положительные $\gamma_1^{(s)}$ и $\gamma_2^{(s)}$, чтобы

$$
\gamma_1^{(s)}h+\gamma_2^{(s)}r<-\frac{1}{6}\lambda_{\max}(\Lambda^{(s)}P_s+P_s^T\Lambda^{(s)}).
$$

Положим, что ε_s — положительные величины, удовлетворяющие неравенствам

$$
\frac{\varepsilon_s e_5^{(s)}}{2}<-\frac{1}{6}\lambda_{\max}(\Lambda^{(s)}P_s+P_s^T\Lambda^{(s)}),\quad \beta_1^{(s)}>\frac{\varepsilon_s e_4^{(s)}}{2}.
$$

Находим оставшиеся положительные числа $e_1^{(s)}$, $e_2^{(s)}$ и $e_3^{(s)}$ из следующих условий:

$$
e_1^{(s)}<2\varepsilon_s\lambda_{\min}(Q_s),\quad e_2^{(s)}>\frac{\|\Lambda^{(s)}A_2^{(s)}\|}{2\beta_2^{(s)}},\quad e_3^{(s)}>\frac{\|\Lambda^{(s)}B^{(s)}(D^{(s)})^{-1}C_2^{(s)}\|}{2\beta_1^{(s)}}.
$$

Для функционала (14) можно выбрать $e_6^{(s)} > 0$ и положительные постоянные $\alpha_{0i}^{(s)},\ i = \overline{1,5}$, чтобы оценить ее сверху выражением

$$\frac{\|\Lambda^{(s)}P_s\|}{2e_6^{(s)}}\|g(t)\|^2 +$$
$$+\ \frac{e_6^{(s)}\|\Lambda^{(s)}P_s\|}{2}\|f(x(t))\|^2 \max_{i=1,\dots,n}\mu_i x_i^{\mu_i-1}(t)\|\Lambda^{(s)}\|\Big(\alpha_{01}^{(s)}\|y(t)\|^2 + \alpha_{02}^{(s)}\|f(x(t))\|^2 +$$
$$+\ \alpha_{03}^{(s)}\|f(x(t-r))\|^2 + \alpha_{04}^{(s)}\int\limits_{-h}^{0}\|f(x(t+\theta))\|^2 d\theta + \alpha_{05}^{(s)}\int\limits_{-r}^{0}\|f(x(t+\theta))\|^2 d\theta\Big).$$

Из определения вектор-функции $g(x)$ выберем произвольное положительное $\overline{\varepsilon} < 1$, для которого найдется $\overline{\delta} > 0$ такая, что $\|g(x)\| \leqslant \frac{\overline{\varepsilon}}{1-\overline{\varepsilon}}\|f(x)\|$ при $\|x\| \leqslant \overline{\delta}$. Параметры $e_6^{(s)}$ и $\overline{\varepsilon}$ берем достаточно малыми, чтобы было выполнено условие $\frac{\overline{\varepsilon}^2\|\Lambda^{(s)}P_s\|}{2(1-\overline{\varepsilon})^2 e_6^{(s)}} + \frac{e_6^{(s)}\|\Lambda^{(s)}P_s\|}{2} < \frac{\alpha_3^{(s)}}{3}$. В итоге можно получить область отрицательной определенности функционала $\big\{x_t \in C[-\tau;0] : \|x(t)\| \leqslant H_2\big\} \times \big\{y(t) \in \mathbb{R}^{\nu}\big\}$, где

$$H_2 = \min\left(\overline{\delta};\ \ \Big(\frac{1}{\mu_n}\min\Big\{\frac{\alpha_1^{(s)}}{2\alpha_{01}^{(s)}}; \frac{\beta_2^{(s)}}{2\alpha_{03}^{(s)}}; \frac{\alpha_3^{(s)}}{3\alpha_{02}^{(s)}}; \frac{\gamma_1^{(s)}}{2\alpha_{04}^{(s)}}; \frac{\gamma_2^{(s)}}{2\alpha_{05}^{(s)}}\Big\}\Big)^{\frac{1}{\mu_n-1}}\right).$$

Оценка производной функционала (13) в найденной области примет вид

$$\dot V^{(s)} \leqslant -\frac{\alpha_1^{(s)}}{2}\|y(t)\|^2 - \frac{\beta_2^{(s)}}{2}\|f(x(t-r))\|^2 - \frac{\alpha_3^{(s)}}{3}\|f(x(t))\|^2 -$$
$$-\ \frac{\gamma_1^{(s)}}{2}\int\limits_{-h}^{0}\|f(x(t+\theta))\|^2 d\theta - \frac{\gamma_2^{(s)}}{2}\int\limits_{-r}^{0}\|f(x(t+\theta))\|^2 d\theta.$$

Введем вектор

$$z = \Big(x_1^{\mu_1+1}(t), \dots, x_n^{\mu_n+1}(t), \|y(t)\|^2, \int\limits_{-r}^{0}\|f(x(t+\theta))\|^2 d\theta, \int\limits_{-h}^{0}\|f(x(t+\theta))\|^2 d\theta\Big)^T.$$

Тогда найдется постоянная $\varkappa_1^{(s)} = \max_{\|z\|=1}\Big(b_0^{(s)}\sum_{i=1}^n |z_i| + b_1^{(s)}|z_{n+1}| + b_2^{(s)}|z_{n+2}| + b_3^{(s)}|z_{n+3}|\Big)$, с помощью которой по свойству однородных функций можно продолжить правую часть неравенства (12) и так оценить функционал: $V^{(s)}(x_t, y) \leqslant \varkappa_1^{(s)}\|z\|$. Оценку производной функционала в области, заданной неравенством $\|y\| + \|x_t\|_\tau \leqslant H := \min\{H_1, H_2\}$, в новых обозначениях запишем таким образом:

$$\dot V^{(s)} \leqslant -\varkappa_2^{(s)}\|z\|^{\rho+1},$$

здесь $\varkappa_2^{(s)} = \min_{\|z\|=1}\Big(d_0^{(s)}\sum_{i=1}^n |z_i|^{\rho+1} + d_1^{(s)}|z_{n+1}|^{\rho+1} + d_2^{(s)}|z_{n+2}|^{\rho+1} + d_3^{(s)}|z_{n+3}|^{\rho+1}\Big)$, $\rho = \frac{\mu_n-1}{\mu_n+1}$, коэффициенты $d_0^{(s)} = \frac{\alpha_3^{(s)}}{3}\min_i H^{(\mu_i+1)\left(\frac{2\mu_i}{\mu_i+1}-(\rho+1)\right)}$, $d_2^{(s)} =$

$\frac{\gamma_2^{(s)}}{2}\Big(r\sup_{\|x\|\leqslant H}\|f(x)\|\Big)^{-\rho}$, $d_1^{(s)} = \frac{\alpha_1^{(s)}}{2}H^{-2\rho}$, $d_3^{(s)} = \frac{\gamma_1^{(s)}}{2}\Big(h\sup_{\|x\|\leqslant H}\|f(x)\|\Big)^{-\rho}$. Тогда при $b=\min_s \frac{\varkappa_2^{(s)}}{(\varkappa_1^{(s)})^{\rho+1}}$ получим дифференциальное неравенство

$$\dot V^{(s)} \leqslant -b\Big(V^{(s)}\Big)^{\rho+1}. \tag{15}$$

Чтобы решение $\hat x(t)$ существовало, достаточно, чтобы правая часть системы была непрерывна на каждом из промежутков между объединением точек переключения и точек, кратных r и h, а решение продолжимо на нем (обозначим такие промежутки $[t_0+T_k;\ t_0+T_{k+1})$, $k=0,1,...$). Первое, очевидно, выполнено, второе будет показано за счет того факта, что решение, выходящее из некоторого компакта $\|\varphi\|_\tau = \sup_{\theta\in[0;\tau]}\|\varphi(\theta)\| \leqslant \Delta$, остается в области $G=\{\hat x:\ \|\hat x\|\leqslant H\}$ на протяжении времени $[0;\ \infty)$.

Дифференциальное неравенство (15) может быть проинтегрировано на промежутке $[t_0;\theta_m)$:

$$\big(V^{\sigma(\theta_{m-1})}(\hat x_t)\big)^{-\rho} \geqslant \big(V^{\sigma(\theta_{m-1})}(\varphi)\big)^{-\rho} + b\rho(t-t_0),$$

а в промежутках между переключениями $t\in[\theta_{m+k-1};\theta_{m+k})$, $k=1,2,...$:

$$\begin{gathered}\big(V^{\sigma(\theta_{m+k-1})}(\hat x_t)\big)^{-\rho} \geqslant \big(V^{\sigma(\theta_{m+k-1})}(\hat x_{\theta_{m+k-1}})\big)^{-\rho} + b\rho(t-\theta_{m+k-1}) \geqslant\\ \geqslant c^{-\rho}\big(V^{\sigma(\theta_{m+k-2})}(\hat x_{\theta_{m+k-1}})\big)^{-\rho} + b\rho(t-\theta_{m+k-1}) \geqslant ... \geqslant\\ \geqslant c^{-k\rho}\big(V^{\sigma(\theta_{m-1})}(\varphi)\big)^{-\rho} + b\rho\Big((t-\theta_{m+k-1}) + \Psi(m,k) + c^{-k\rho}(\theta_m-t_0)\Big),\end{gathered}$$

где

$$\Psi(m,k)=\sum_{i=1}^{k-1} c^{-(k-i)\rho}(\theta_{m+i}-\theta_{m+i-1}). \tag{16}$$

Оценка (12), полученная для области $\{(x_t,y): \|x\|\leqslant H_1\}$, будет работать в более узкой области G, где определен s-й функционал со свойствами, гарантирующими устойчивость подсистеме. Выпишем эту оценку:

$$\begin{gathered}\overline{c_1}\|\hat x(t)\|^{\mu_n+1} + a_2^{(s)}\int_{-r}^{0}\|f(x(t+\theta))\|^2 d\theta + a_3^{(s)}\int_{-h}^{0}\|f(x(t+\theta))\|^2 d\theta \leqslant V^{(s)}(\hat x_t) \leqslant\\ \leqslant \overline{c_2}\|\hat x(t)\|^2 + b_2^{(s)}\int_{-r}^{0}\|f(x(t+\theta))\|^2 d\theta + b_3^{(s)}\int_{-h}^{0}\|f(x(t+\theta))\|^2 d\theta,\end{gathered}$$

здесь положительные коэффициенты $\overline{c_1}$ и $\overline{c_2}$ могут быть найдены по свойствам однородных функций. Отсюда оценим норму решения при $t\in[t_0;\theta_m)$:

$$\begin{gathered}\|\hat x(t)\| \leqslant \overline{c_1}^{-\frac{1}{\mu_n+1}}\Big(V^{(s)}(\hat x_t)\Big)^{\frac{1}{\mu_n+1}} \leqslant \overline{c_1}^{-\frac{1}{\mu_n+1}}\left(\Big(\big(V^{\sigma(\theta_{m-1})}(\varphi)\big)^{-\rho} + b\rho(t-t_0)\Big)^{-\frac{1}{\rho}}\right)^{\frac{1}{\mu_n+1}} \leqslant\\ \leqslant \overline{c_1}^{-\frac{1}{\mu_n+1}} \times \Bigg(\Big(\overline{c_2}\|\varphi\|_\tau^2 + b_2^{(s)}\int_{-r}^{0}\|f(\varphi(\theta))\|^2 d\theta + b_3^{(s)}\int_{-h}^{0}\|f(\varphi(\theta))\|^2 d\theta\Big)^{-\rho} +\\ + b\rho(t-t_0)\Bigg)^{-\frac{1}{\mu_n-1}},\end{gathered}$$

а при $t \in [\theta_{m+k-1};\theta_{m+k})$ —

$$\|\hat{x}(t)\| \leqslant \overline{c_1}^{-\frac{1}{\mu_n+1}}\Big[c^{-k\rho}\big(V^{\sigma(\theta_{m-1})}(\varphi)\big)^{-\rho}+$$

$$+\,b\rho\Big((t-\theta_{m+k-1})+\Psi(m,k)+c^{-k\rho}(\theta_m-t_0)\Big)\Big]^{-\frac{1}{\rho(\mu_n+1)}} \leqslant$$

$$\leqslant \overline{c_1}^{-\frac{1}{\mu_n+1}}\bigg(c^{-k\rho}\Big(\overline{c_2}\|\varphi\|_\tau^2+b_2^{(s)}\int\limits_{-r}^{0}\|f(\varphi(\theta))\|^2d\theta+b_3^{(s)}\int\limits_{-h}^{0}\|f(\varphi(\theta))\|^2d\theta\Big)^{-\rho}+$$

$$+\,b\rho\Big((t-\theta_{m+k-1})+\Psi(m,k)+c^{-k\rho}(\theta_m-t_0)\Big)\bigg)^{-\frac{1}{\mu_n-1}}.$$

Покажем, что решение не будет выходить из области G. Произвольным образом берем положительную $\varepsilon \leqslant H$. Если выполнено условие $\Psi(m,k)\to\infty$ при $k\to\infty$, то существует k_0 такое, что для $k \geqslant k_0$ имеет место неравенство $\Psi(m,k) > \frac{1}{b\rho}\Big(\varepsilon\overline{c_1}^{\frac{1}{\mu_n+1}}\Big)^{1-\mu_n} = E(\varepsilon)$. Если $k \geqslant k_0$, то за счет указанного выше неравенства имеет место оценка $\|\hat{x}(t)\| < \varepsilon$. В противном случае, если $k < k_0$, то с учетом возможности оценить интегралы от квадратов норм нелинейностей по свойству однородных функций некоторой величиной $\overline{c_3}\|\varphi\|_\tau^2$ получим, что

$$\|\hat{x}(t)\| \leqslant \overline{c_1}^{-\frac{1}{\mu_n+1}}\bigg(c^{-k\rho}\Big[\overline{c_4}\|\varphi\|_\tau^2\Big]^{-\rho}\bigg)^{-\frac{1}{\mu_n-1}}, \quad \overline{c_4}=\overline{c_2}+\overline{c_3},$$

а значит, найдется $\delta = c^{-\frac{k_0}{2}}\varepsilon^{\frac{\mu_n+1}{2}}\Big(\frac{\overline{c_1}}{\overline{c_3}}\Big)^{\frac{1}{2}}$ такое, что для начальных функций $\|\varphi\|_\tau < \delta$ решение будет оставаться в области G при $t \geqslant t_0$.

Если $\Psi(m,k)\to\infty$ при $k\to\infty$ равномерно по m, то по величине E можно найти k_0 такое, что для любых m и $k \geqslant k_0$ выполнено $\Psi(m,k) > E(\varepsilon)$, а значит, и $\|x(t)\| < \varepsilon$. А при $k < k_0$ подойдет найденное выше δ, очевидно, не зависящее от t_0 и m, чтобы решение на любом промежутке между переключениями было меньше ε. Показана равномерная устойчивость. Для равномерной асимптотической устойчивости остается предъявить $T > 0$, чтобы

$$\sup_{\theta\in[-\tau;0]}\|\hat{x}(\theta+t_0+T)\| \leqslant \sup_{\theta\in[-\tau;0]}\overline{c_1}^{-\frac{1}{\mu_n+1}}\bigg(c^{-k\rho}\Big(\overline{c_2}\|\varphi\|_\tau^2+b_2^{(s)}\int\limits_{-r}^{0}\|f(\varphi(\theta))\|^2d\theta\,+$$

$$+\,b_3^{(s)}\int\limits_{-h}^{0}\|f(\varphi(\theta))\|^2d\theta\Big)^{-\rho}+b\rho\Big((\theta+t_0+T-\theta_{m+k-1})+\Psi(m,k)+c^{-k\rho}(\theta_m-t_0)\Big)\bigg)^{-\frac{1}{\mu_n-1}} < \delta.$$

Из равномерного стремления функции Ψ к бесконечности найдется k_1 такое, что для всех m и $k \geqslant k_1$ выполняется $\Psi(m,k) > E(\delta)$, откуда непосредственно следует требуемое. Когда $k < k_1$,

$$\sup_{\theta\in[-\tau;0]}\|\hat{x}(\theta+t_0+T)\| \leqslant \overline{c_1}^{-\frac{1}{\mu_n+1}}\sup_{\theta\in[-\tau;0]}\bigg(b\rho\Big(c^{-k_1\rho}(\theta+T)\Big)\bigg)^{-\frac{1}{\mu_n-1}}.$$

Значит, достаточно выбрать $T > \frac{c^{k_1 \rho}}{b\rho}\left(\delta \overline{c_1}^{\frac{1}{\mu_n+1}}\right)^{1-\mu_n} + \tau$, что доказывает следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть выполнены предположения 1 и 2. Нулевое решение системы* (1) *будет асимптотически устойчивым для фиксированных положительных запаздываний r и h, если функция, определенная по формуле* (16), *обладает свойством $\Psi(m,k) \to \infty$ при $k \to \infty$. Если $\Psi(m,k) \to \infty$ равномерно по m с ростом k, то нулевое решение системы* (1) *будет равномерно асимптотически устойчивым.*

4.2. Асинхронные переключения. Для асинхронной системы (3) возьмем функционал с сохранением использованных ранее обозначений:

$$V^{(s)}(t, x_t, y(t)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(s)} \int_0^{x_i(t)} \xi^{\mu_i} d\xi + \varepsilon_s y^T(t) Q_s y(t) - \tilde{f}^T(x(t)) \Lambda^{(s)} B^{(s)} (D^{(s)})^{-1} y(t) +$$

$$+ \tilde{f}^T(x(t)) \Lambda^{(s)} \int_{-r}^{0} A_2^{\sigma(t+\theta)} f(x(t+\theta)) d\theta -$$

$$- \tilde{f}^T(x(t)) \Lambda^{(s)} B^{(s)} (D^{(s)})^{-1} \int_{-h}^{0} C_2^{\sigma(t+\theta)} f(x(t+\theta)) d\theta +$$

$$+ \int_{-h}^{0} (\beta_1^{(s)} + \gamma_1^{(s)}(h+\theta)) \|f(x(t+\theta))\|^2 d\theta + \int_{-r}^{0} (\beta_2^{(s)} + \gamma_2^{(s)}(r+\theta)) \|f(x(t+\theta))\|^2 d\theta,$$

для которого производная вдоль решения s-й подсистемы (2) имеет вид

$$\dot{V}^{(s)} = \tilde{f}^T(x(t)) \Lambda^{(s)} P_s f(x(t)) + \varepsilon_s y^T(t) Q_s \dot{y}(t) + (\beta_1^{(s)} + \gamma_1^{(s)} h + \beta_2^{(s)} +$$

$$+ \gamma_2^{(s)} r) \|f(x(t))\|^2 + \dot{x}^T(t) \left(\frac{\partial \tilde{f}(x(t))}{\partial x}\right)^T \Lambda^{(s)} \left(\int_{-r}^{0} A_2^{\sigma(t+\theta)} f(x(t+\theta)) d\theta -\right.$$

$$\left. - B^{(s)} (D^{(s)})^{-1} \int_{-h}^{0} C_2^{\sigma(t+\theta)} f(x(t+\theta)) d\theta - B^{(s)} (D^{(s)})^{-1} y(t) \right) -$$

$$- \beta_1^{(s)} \|f(x(t-h))\|^2 - \gamma_1^{(s)} \int_{-h}^{0} \|f(x(t+\theta))\|^2 d\theta -$$

$$- \beta_2^{(s)} \|f(x(t-r))\|^2 - \gamma_2^{(s)} \int_{-r}^{0} \|f(x(t+\theta))\|^2 d\theta.$$

Переходя к неравенствам, аналогичным (16), находим постоянную c. Тогда по аналогии с теоремой 3 доказывается следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть выполнены предположения 1 и 2. Нулевое решение системы* (3) *будет асимптотически устойчивым для фиксированных положительных запаздываний r и h, если функция $\Psi(m,k) \to \infty$ при $k \to \infty$. Если $\Psi(m,k) \to \infty$ равномерно по m при возрастании k, то нулевое решение системы* (3) *будет равномерно асимптотически устойчивым.*

5. Численное моделирование. Выбраны параметры системы (1), состоящей из двух подсистем ($N = 2$) размерностей $n = 2,\ \nu = 2$. В качестве запаздываний взяты $r = 0.1,\ h = 0.3$. Начальная вектор-функция решения φ постоянная на промежутке $[-0.3; 0]$ и равна вектору $(-0.2, 0.2, 0, -0.1)^T$, $\mu_1 = 5/3$, $\mu_2 = 7/3$,

$$B^{(1)} = B^{(2)} = \begin{pmatrix} 2.5 & 1 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix}, \quad D^{(1)} = D^{(2)} = \begin{pmatrix} -3.5 & -1 \\ 4 & 0.5, \end{pmatrix},$$

$$A_1^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 & 1.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad A_2^{(1)} = \begin{pmatrix} -1.5 & 1 \\ 0.5 & -1 \end{pmatrix}, \quad C_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 0.5 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad C_2^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 & -0.5 \\ 0.5 & 2.5 \end{pmatrix},$$

$$A_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.5 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2^{(2)} = \begin{pmatrix} -2.5 & 0.5 \\ -1 & 1.5 \end{pmatrix}, \quad C_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2.5 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad C_2^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0.5 & -1.5 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что для данных параметров предположение 2 выполнено и работает теорема 1 с общей матрицей $\Lambda = \begin{pmatrix} 0.4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Однако нарушено условие теоремы 2 для синхронных переключений, так как для матрицы $P^{(1,1,2)} = A_1^{(1)} + A_2^{(1)} - BD^{-1}(C_1^{(1)} + C_2^{(2)}) = \dfrac{1}{18}\begin{pmatrix} 25 & 26 \\ -37 & 13 \end{pmatrix}$ не существует общей $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda > 0$, ввиду того, что невозможно матрице $(P^{(1,1,2)})^T\Lambda + \Lambda P^{(1,1,2)} = \dfrac{1}{18}\begin{pmatrix} 50\lambda & 26\lambda - 37 \\ 26\lambda - 37 & 26 \end{pmatrix}$ обеспечить отрицательную определенность.

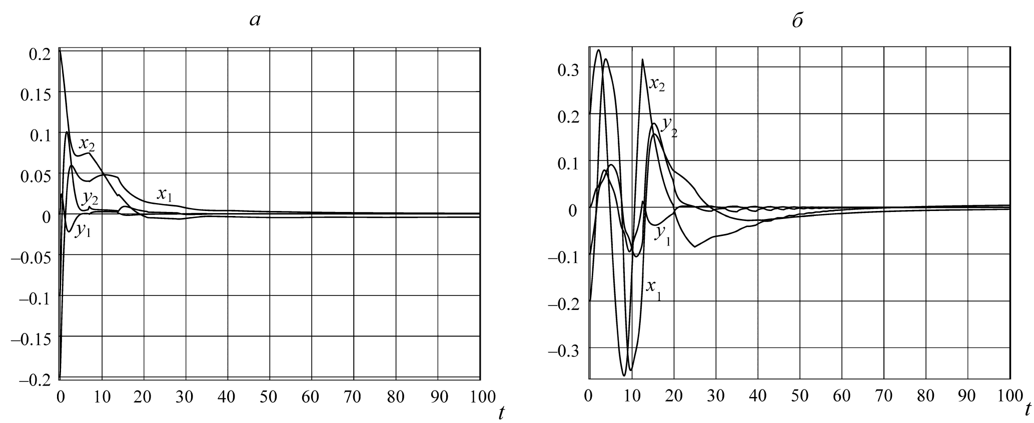

Рисунок. Компоненты решения при асинхронных (*а*) и синхронных (*б*) переключениях

Таким образом, в асинхронном случае можно гарантировать асимптотическую устойчивость при любом законе переключения. При моделировании (рисунок, *а*) переключения происходят попеременно с шагом 7, начиная с первой подсистемы. Для синхронных переключений функционала вида (10) построить не удастся, зато можно воспользоваться методом составных функционалов. Выбор произведем по формуле (11). Для демонстрации асимптотической устойчивости (рисунок, *б*) переключения совершались в моменты $7\log_7 n$, $n = 1, 2, ...$, что согласуется с теоремой 3. Численное моделирование проводилось с помощью метода Рунге—Кутты 4-го порядка с шагом 0.001.

6. Заключение. Изучена локальная асимптотическая устойчивость нулевого решения для специальной системы класса Лурье с запаздывающим аргументом при синхронных и асинхронных переключениях. При применении метода функционалов Ляпунова — Красовского в асинхронном случае потребовались менее строгие условия равномерной асимптотической устойчивости при произвольных переключениях, чем в синхронном случае. Метод составных функционалов позволяет получить одинаковое условие на выбор закона переключения, гарантирующего устойчивость вне зависимости от величины запаздываний.

Литература

1. *Мурзинов И. Е.* Построение общей функции Ляпунова для семейства механических систем с одной степенью свободы // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. Сер. 10. 2013. Вып. 4. С. 49–57.

2. *Лакрисенко П. А.* Об устойчивости положений равновесия нелинейных гибридных механических систем // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. Сер. 10. 2015. Вып. 3. С. 116–125.

3. *Jin Y., Fu J., Zhang Y. M., Jing Y.* Fault-tolerant control of a class of switched nonlinear systems with application to flight control // International Conference on Intelligent Robotics and Applications. Berlin; Heidelberg: Springer, 2012. P. 453–462.

4. *Niu B., Zhao X., Fan X., Cheng Y.* A new control method for state-constrained nonlinear switched systems with application to chemical process // International Journal of Control. 2015. Vol. 88. N 9. P. 1693–1701.

5. *Li C., Huang T.* Exponential stability of time-switched two-subsystem nonlinear systems with application to intermittent control // Journal of Inequalities and Applications. 2009. Vol. 2009. P. 1–23.

6. *Aleksandrov A. Y., Stepenko N. A.* Stability analysis of gyroscopic systems with delay under synchronous and asynchronous switching // Journal of Applied and Computational Mechanics. 2022. Vol. 8. N 3. P. 1113–1119.

7. *Cheng J., Zhu H., Zhong S., Zhang Y.* Robust stability of switched delay systems with average dwell time under asynchronous switching // Journal of Applied Mathematics. 2012. Vol. 2012. https://doi.org/10.1155/2012/956370

8. *Zong G., Wang R., Zheng W. X., Hou L.* Finite-time stabilization for a class of switched time-delay systems under asynchronous switching // Applied Mathematics and Computation. 2013. Vol. 219. N 11. P. 5757–5771.

9. *Gao L., Wang D.* Input-to-state stability and integral input-to-state stability for impulsive switched systems with time-delay under asynchronous switching // Nonlinear Analysis: Hybrid Systems. 2016. Vol. 20. P. 55–71.

10. *Aleksandrov A., Andriyanova N., Efimov D.* Stability analysis of Persidskii time-delay systems with synchronous and asynchronous switching // International Journal of Robust and Nonlinear Control. 2022. Vol. 32. N 6. P. 3266–3280.

11. *Aleksandrov A., Efimov D.* Stability analysis of switched homogeneous time-delay systems under synchronous and asynchronous commutation // Nonlinear Analysis: Hybrid Systems. 2021. Vol. 42. P. 101090.

12. *Александрова И. В., Жабко А. П.* Функционалы Ляпунова — Красовского для однородных систем с несколькими запаздываниями // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2021. Т. 17. Вып. 2. С. 183–195. https://doi.org/10.21638/11701/spbul0.2021.208

13. *Kuptsova S. E., Kuptsov S. Yu.* Research of the asymptotic equilibrium of time-delay systems by junction of Lyapunov — Krasovskii and Razumikhin approaches // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2022. Т. 18. Вып. 2. С. 198–208. https://doi.org/10.21638/11701/spbul0.2022.201

14. *Александров А. Ю., Платонов А. В., Чен Я.* К вопросу об абсолютной устойчивости нелинейных систем с переключениями // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. Сер. 10. 2008. Вып. 2. С. 119–133.

15. *Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971. 296 с.

16. *Krasovskii N. N.* Stability of motion. Applications of Lyapunov's second method to differential systems and equations with delay. Stanford: Stanford University Press, 1963. 188 p.

17. *Kaszkurewicz E., Bhaya A.* Matrix diagonal stability in systems and computation. Boston, MA: Birkhauser, 1999. 352 p.

Статья поступила в редакцию 20 января 2023 г.
Статья принята к печати 8 июня 2023 г.

Контактная информация:

Андриянова Наталья Романовна — аспирант; st040174@student.spbu.ru

Stability of Lurie-type systems with asynchronous and synchronous switching and constant delays

N. R. Andriyanova

St. Petersburg State University,
7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Andriyanova N. R. Stability of Lurie-type systems with asynchronous and synchronous switching and constant delays. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2023, vol. 19, iss. 3, pp. 320–336.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.302 (In Russian)

The problems of analysis for systems with synchronous and asynchronous switching have been actively studied for the linear case. In this paper, a switched system of difference-differential equations, in which the right-hand side consists of a linear term and an essentially nonlinear part containing sector-type components is considered. This kind of systems belongs to the class of Lurie indirect control systems. Sufficient conditions on the system parameters and the switching law are investigated for asymptotic stability to be guaranteed both in the case of synchronous switching between subsystems and in asynchronous one. In the latter case it is supposed that the nonlinear delayed part switches with a lag equal to the corresponding delay. It is required that stability should be preserved for any constant positive delays. The problem is solved using the Lyapunov — Krasovsky approach. The functional is chosen that includes a quadratic form and integrals of nonlinearities. Restrictions that ensure asymptotic stability for an arbitrary switching law are found. With such an approach for the asynchronous case these conditions turn out to be less restrictive. By using multiple functionals the restrictions on the lengths of intervals between switchings are also obtained. This type of conditions are similar for both cases of synchronous and asynchronous switching. Theoretical results are demonstrated by a specially selected example.

Keywords: nonlinear systems, asymptotic stability, synchronous and asynchronous switching, delays, Lyapunov — Krasovskii method.

References

1. Murzinov I. E. Postroenie obshchei funktsii Liapunova dlia semeistva mekhanicheskikh sistem s odnoi stepen'iu svobody [On construction of common Lyapunov function for a family of mechanical systems with one degree of freedom]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes. Series 10*, 2013, iss. 4, pp. 49–57. (In Russian)

2. Lakrisenko P. A. Ob ustoichivosti polozhenii ravnovesiia nelineinykh gibridnykh mekhanicheskikh sistem [On the stability of the equilibrium positions of nonlinear mechanical hybrid system]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes. Series 10*, 2015, iss. 3, pp. 116–125. (In Russian)

3. Jin Y., Fu J., Zhang Y. M., Jing Y. Fault-tolerant control of a class of switched nonlinear systems with application to flight control. *International Conference on Intelligent Robotics and Applications.* Berlin, Heidelberg, Springer Publ., 2012, pp. 453–462.

4. Niu B., Zhao X., Fan X., Cheng Y. A new control method for state-constrained nonlinear switched systems with application to chemical process. *International Journal of Control*, 2015, vol. 88, iss. 9, pp. 1693–1701.

5. Li C., Huang T. Exponential stability of time-switched two-subsystem nonlinear systems with application to intermittent control. *Journal of Inequalities and Applications*, 2009, vol. 2009, pp. 1–23.

6. Aleksandrov A. Y., Stepenko N. A. Stability analysis of gyroscopic systems with delay under synchronous and asynchronous switching. *Journal of Applied and Computational Mechanics*, 2022, vol. 8, no. 3, pp. 1113–1119.

7. Cheng J., Zhu H., Zhong S., Zhang Y. Robust stability of switched delay systems with average dwell time under asynchronous switching. *Journal of Applied Mathematics*, 2012, vol. 2012. https://doi.org/10.1155/2012/956370

8. Zong G., Wang R., Zheng W. X., Hou L. Finite-time stabilization for a class of switched time-delay systems under asynchronous switching. *Applied Mathematics and Computation*, 2013, vol. 219, no. 11, pp. 5757–5771.

9. Gao L., Wang D. Input-to-state stability and integral input-to-state stability for impulsive switched systems with time-delay under asynchronous switching. *Nonlinear Analy- sis: Hybrid Systems*, 2016, vol. 20, pp. 55–71.

10. Aleksandrov A., Andriyanova N., Efimov D. Stability analysis of Persidskii time-delay systems with synchronous and asynchronous switching. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2022, vol. 32, no. 6, pp. 3266–3280.

11. Aleksandrov A., Efimov D. Stability analysis of switched homogeneous time-delay systems under synchronous and asynchronous commutation. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2021, vol. 42, p. 101090.

12. Alexandrova I. V., Zhabko A. P. Funktsionaly Liapunova — Krasovskogo dlia odnorodnykh sistem s neskol'kimi zapazdyvaniiami [Lyapunov — Krasovskii functionals for homogeneous systems with multiple delays]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2021, vol. 17, iss. 2, pp. 183–195. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.208 (In Russian)

13. Kuptsova S. E., Kuptsov S. Yu. Research of the asymptotic equilibrium of time-delay systems by junction of Lyapunov — Krasovskii and Razumikhin approaches. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2022, vol. 18, iss. 2, pp. 198–208. https://doi.org/10.21638/11701/spbul0.2022.201

14. Aleksandrov A. Yu., Platonov A. V., Chen Y. K voprosu ob absoliutnoi ustoichivosti nelineinykh sistem s perekliucheniiami [On the absolute stability of nonlinear switched systems]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes. Series 10*, 2008, iss. 2, pp. 119–133. (In Russian)

15. El'sgol'ts L. E., Norkin S. B. *Vvedenie v teoriiu differentsial'nykh uravnenii s otkloniaiushchimsia argumentum* [*Introduction to the theory and application of differential equations with deviating arguments*]. Moscow, Nauka Publ., 1971, 296 p. (In Russian)

16. Krasovskii N. N. *Stability of motion. Applications of Lyapunov's second method to differential systems and equations with delay.* Stanford, Stanford University Press, 1963, 188 p.

17. Kaszkurewicz E., Bhaya A. *Matrix diagonal stability in systems and computation.* Boston, MA, Birkhauser Publ., 1999, 352 p.

Received: January 20, 2023.
Accepted: June 8, 2023.

Author's information:

Natalya R. Andriyanova — Postgraduate Student; st040174@student.spbu.ru