ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977
MSC 34H05

Управление и возмущение в задаче Штурма — Лиувилля с разрывной нелинейностью*

О. В. Басков, Д. К. Потапов

Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация,
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Басков О. В., Потапов Д. К.* Управление и возмущение в задаче Штурма — Лиувилля с разрывной нелинейностью // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2023. Т. 19. Вып. 2. С. 275–282. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.212

Рассматривается задача Штурма — Лиувилля с разрывной нелинейностью, управлением и возмущением. Полученные ранее результаты для уравнений со спектральным параметром и разрывным оператором применяются к исследуемой задаче. Вариационным методом устанавливаются теоремы о существовании решений задачи Штурма — Лиувилля с разрывной нелинейностью и задачи оптимального управления, топологических свойствах множества допустимых пар «управление — состояние». В качестве приложения приводится одномерный аналог модели Гольдштика отрывных течений несжимаемой жидкости с управлением и возмущением.

Ключевые слова: задача Штурма — Лиувилля, разрывная нелинейность, задачи управления, вариационный метод, модель Гольдштика.

1. Введение. Постановка задачи. Уравнения с разрывными правыми частями возникают при анализе многих задач оптимального управления, разрывных систем управления. Задачи управления системами со спектральным параметром и разрывными правыми частями рассматривались в работах [1–7] в общей постановке, а также для задач, порожденных эллиптическими операторами. В настоящей статье исследуются задачи управления для обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями. Отметим работу [8], посвященную задачам оптимального управления системами обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями.

* Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00069, https://rscf.ru/project/23-21-00069/

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2023

Проблема существования решений задачи Штурма—Лиувилля с разрывной нелинейностью изучалась в [9–15]. Данная статья является развитием этих исследований, поскольку в задачу дополнительно вводятся управление и возмущение. Кроме того, в отличие от работ других авторов, в ней ослаблены ограничения на множество точек разрыва нелинейности.

Пусть $-\infty < a < b < +\infty$. На отрезке $[a, b]$ рассматривается задача Штурма — Лиувилля с управлением и возмущением следующего вида:

$$Lu(x) \equiv -(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) = \lambda g(x, u(x)) + Bv(x) + Dw(x), \quad x \in (a, b), \tag{1}$$

$$u(a) = u(b) = 0. \tag{2}$$

Здесь $p \in C_{1,\alpha}([a, b])$, $q \in C_{0,\alpha}([a, b])$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$; λ — положительный параметр; функция $g : (a, b) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ суперпозиционно измерима, для почти всех $x \in (a, b)$ сечение $g(x, \cdot)$ имеет на $\mathbb{R}$ разрывы только первого рода, $g(x, u) \in [g_-(x, u), g_+(x, u)]$ для любого $u \in \mathbb{R}$, $g_-(x, u) = \varliminf\limits_{\eta \to u} g(x, \eta)$, $g_+(x, u) = \varlimsup\limits_{\eta \to u} g(x, \eta)$ и $|g(x, u)| \leqslant \beta(x)$ для любого $u \in \mathbb{R}$, где $\beta \in L_q((a, b))$, $q > 1$; оператор $B : U \to L_q((a, b))$ линейный и ограниченный, U — банахово пространство управлений, функция $v(x)$ в уравнении (1) играет роль управления, управление $v \in U_{ad} \subset U$, U_{ad} — множество всех допустимых управлений для системы (1), (2); оператор $D : W \to L_q((a, b))$ линейный и ограниченный, W — банахово пространство возмущений, функция $w(x)$ в уравнении (1) играет роль возмущения, возмущение $w \in W$.

Допускается, что для некоторых $v \in U_{ad}$, $w \in W$ у задачи (1), (2) либо нет решений, либо она имеет более одного решения, т. е. возможен сингулярный случай [16].

2. Теоретические результаты. Для дальнейших рассуждений потребуется следующее определение.

Определение 1. *Обобщенным решением* задачи (1), (2) при фиксированных управлении v и возмущении w называется функция $u \in W_q^2((a, b)) \bigcap \mathring{W}_q^1((a, b))$, удовлетворяющая для почти всех $x \in (a, b)$ включению

$$Lu(x) - Bv(x) - Dw(x) \in \lambda[g_-(x, u(x)), g_+(x, u(x))].$$

Отметим, что определение обобщенного решения для уравнений с разрывными нелинейностями вполне адекватно для прикладных задач [17].

Пусть функциональное пространство $X = H_\circ^1((a, b))$, а функционалы

$$J_1(u) = \frac{1}{2} \int\limits_a^b p(x)(u'(x))^2 dx + \frac{1}{2} \int\limits_a^b q(x)u^2(x)dx, \quad J_2(u) = \int\limits_a^b dx \int\limits_0^{u(x)} g(x, s)ds.$$

Применение общего результата из работы [4] к задаче (1), (2) дает теорему о существовании решений.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия*:

1) *существует $\gamma > 0$, для которого $J_1(u) \geqslant \gamma ||u||^2$ для любого $u \in X$;*

2) *для почти всех $x \in (a, b)$ справедливы соотношения $g(x, 0) = 0$ и $|g(x, u)| \leqslant \beta(x)$ для любого $u \in \mathbb{R}$, где $\beta \in L_q((a, b))$, $q > 1$;*

3) *найдется $u_0 \in X$, для которого $J_2(u_0) > 0$;*

4) *оператор $B : U \to L_q((a, b))$ линейный и ограниченный, пространство управлений U банахово, множество допустимых управлений $U_{ad} \subset U$ непусто*;

5) *оператор* $D : W \to L_q((a, b))$ *линейный и ограниченный, пространство возмущений* W *банахово.*

Тогда для любых $v \in U_{ad}$, $w \in W$ *существует обобщенное решение рассматриваемой задачи* (1), (2).

Доказательство. Теорема 1 доказывается вариационным методом. Оно сводится к проверке выполнения условий теоремы 1 из работы [4]. Выполнение условий 1), 2) теоремы 1 из [4] в задачах на собственные значения для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями установлено в работе [18]. Для задачи (1), (2) такие условия проверяются аналогично. Условия 5), 6) теоремы 1 из [4] идентичны условиям 4), 5) доказываемой теоремы. Тем самым выполнены условия 1), 2), 5), 6) теоремы 1 из [4]. Поэтому для любых управления $v \in U_{ad}$ и возмущения $w \in W$ существует обобщенное решение соответствующего операторного уравнения, а значит, и краевой задачи (1), (2). Теорема 1 доказана.

Далее положим $w(x) \equiv 0$, т. е. исключим возмущение w из уравнения (1).

Определение 2. Упорядоченная пара $(\hat{v}, \hat{u})$ называется *допустимой парой «управление — состояние»* для системы (1), (2), если $\hat{v} \in U_{ad}$, а $\hat{u}$ — обобщенное решение задачи (1), (2) при $v = \hat{v}$.

На множестве D всех допустимых пар «управление — состояние» для системы (1), (2) определена функция стоимости

$$J(v, u) = ||u - u_0||_Z^l + \delta ||v||_U^\mu, \tag{3}$$

где Z — функциональное банахово пространство, в которое пространство X непрерывно вложено; $u_0 \in Z$; l, δ, μ — положительные постоянные; $||\cdot||_Y$ — норма в пространстве Y. Ставится задача о нахождении пары $(w, z) \in D$ такой, что

$$J(w, z) = \inf_D J(v, u). \tag{4}$$

Определение 3. Пара $(w, z) \in D$, удовлетворяющая (4), называется *оптимальной.*

Таким образом, рассматривается также вопрос о существовании решения задачи оптимального управления (4). Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и дополнительно пространство управлений* U *рефлексивное, множество допустимых управлений* $U_{ad} \subset U$ *слабо замкнуто, пространство* X *непрерывно вкладывается в пространство* Z *из* (3). *Тогда для любого* $v \in U_{ad}$ *существует обобщенное решение задачи* (1), (2), *множество* D *всех допустимых пар «управление — состояние» для системы* (1), (2) *непусто и слабо замкнуто, задача оптимального управления* (4) *имеет решение.*

Доказательство. Теорема 2 доказывается также вариационным методом. Оно сводится к проверке выполнения условий теоремы 1 из работы [1]. Выполнение условий 1), 2) такой теоремы для соответствующих эллиптических краевых задач с разрывными нелинейностями установлено в работе [18]. Как отмечалось выше, для задачи (1), (2) эти условия проверяются аналогично. Условие 3) теоремы 1 из [1] идентично условиям теорем 1, 2 данной работы. Таким образом, все условия теоремы 1 из [1] выполнены, потому справедливо утверждение данной теоремы, а значит, и доказываемой теоремы. Теорема 2 доказана.

Для $v \in U_{ad}$ обозначим через Vv множество обобщенных решений задачи (1), (2). Справедлива также следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2 и дополнительно последовательность* $\{v_n\} \subset U_{ad}$ *слабо сходится к* v *в* U. *Тогда, если* $u_n \in Vv_n$, *то из последо-*

вательности $\{u_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{u_{n_k}\}$, которая сильно сходится к $u \in Vv$ в X_1, где X_1 — некоторое вещественное банахово пространство, в которое пространство X компактно вложено. Если Vv состоит из единственной функции u, то $u_n \to u$ в X_1.

Доказательство. Ввиду идентичности условий теоремы 2 из работы [1] и доказываемой теоремы имеет место утверждение теоремы 2 из [1], а следовательно, и справедливо утверждение теоремы 3. Теорема 3 доказана.

3. Приложения. В качестве приложения установленных теорем рассмотрим одномерный аналог математической модели Гольдштика отрывных течений несжимаемой жидкости (см. [19, 20]).

Одномерная задача Гольдштика имеет вид

$$-u'' = \omega g(x, u(x)), \quad x \in (0,1), \tag{5}$$

$$u(0) = u(1) = 0, \tag{6}$$

где параметр $\omega > 0$ — завихренность, а нелинейность

$$g(x,u) = \begin{cases} -1, & \text{если } u < x-1, \\ 0, & \text{если } u \geqslant x-1. \end{cases}$$

Аналитически задача (5), (6) была решена в [19].

Введем в данную задачу управление и возмущение. Имеем краевую задачу

$$-u'' = \omega g(x, u(x)) + Bv(x) + Dw(x), \quad x \in (0,1), \tag{7}$$

$$u(0) = u(1) = 0, \tag{8}$$

где оператор $B : U \to L_q((0,1))$ линейный и ограниченный, U — рефлексивное банахово пространство управлений, $q > 1$; управление $v \in U_{ad} \subset U$; U_{ad} — множество всех допустимых управлений для системы (7), (8) непусто и слабо замкнуто; пространство $H^1_\circ((0,1))$ непрерывно вложено в пространство Z из (3); последовательность $\{v_n\} \subset U_{ad}$ слабо сходится к v в U; оператор $D : W \to L_q((0,1))$ линейный и ограниченный, W — банахово пространство возмущений, возмущение $w \in W$.

Для задачи (7), (8) выполнены условия теорем 1–3 данной статьи. Поэтому утверждения доказанных теорем справедливы для одномерной задачи Гольдштика с управлением и возмущением.

Далее положим $B = -D$ и равные тождественному оператору I, т. е. $Bv = v$, $Dw = -w$. Оператор I линейный и ограниченный. В [19] установлено, что одним из решений задачи (5), (6) при $\omega \geqslant 8$ является функция

$$u_0(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{x_0}\right)x, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant x_0, \\ \frac{\omega}{2}\left(x - x_0 + \frac{2}{\omega}\right)(x-1), & \text{если } x_0 \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

в которой $x_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{8}{\omega}}$. Поставим следующую задачу: при малом постоянном возмущении $w > 0$ найти такое постоянное управление $v \in [0, w]$, чтобы решение краевой задачи (7), (8) при $B = -D = I$ доставляло минимум функционалу $J(u,v) = J_1 + \delta_0 J_2$, где

$$J_1 = \int_0^1 (u(x) - u_0(x))^2 dx, \quad J_2 = v^2, \quad \delta_0 \geqslant 0.$$

В этой задаче требования теорем были выполнены. Оптимальное управление существует для любого неотрицательного δ_0. При каждом постоянном $v \in [0, w]$ решение задачи (7), (8) с $B = -D = I$ дается формулой

$$u(x) = \begin{cases} \frac{w-v}{2} x(x - x_1) + \left(1 - \frac{1}{x_1}\right) x, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant x_1, \\ \frac{w-v+\omega}{2} \left(x - x_1 + \frac{2}{w-v+\omega}\right)(x - 1), & \text{если } x_1 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Здесь $x_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{w-v}{\omega}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\left(1 + \frac{w-v}{\omega}\right)^2 - \frac{8}{\omega}}$, $0 \leqslant w \leqslant 2$.

На рисунке изображено множество возможных векторов (J_1, J_2), достижимых при различных допустимых управлениях $v \in [0, w]$, построенное для $\omega = 9$ и $w = 0.125$.

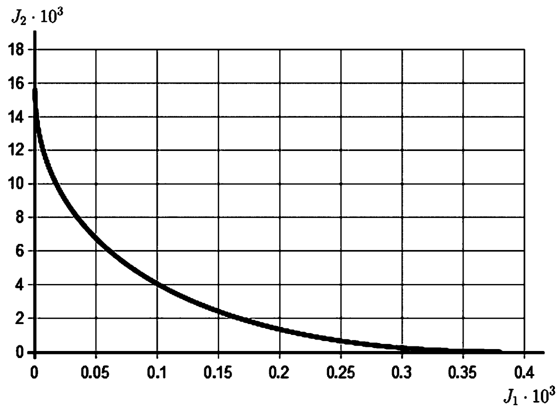

Рисунок. Достижимые значения функционалов

С точки зрения двухкритериальной задачи минимизации J_1 и J_2 каждый возможный вектор оптимален по Парето. Поскольку оба функционала выпуклые, то каждое парето-оптимальное управление можно найти при некотором $\delta_0 \geqslant 0$ минимизацией линейной комбинации $J_1 + \delta_0 J_2$, которая и есть $J(u, v)$.

Таким образом, полученные теоремы проиллюстрированы прикладной задачей.

Литература

1. *Потапов Д. К.* Управление спектральными задачами для уравнений с разрывными операторами // Труды Ин-та математики и механики Уральского отделения РАН. 2011. Т. 17. № 1. С. 190–200.

2. *Потапов Д. К.* О разрешимости задачи управления для одного класса уравнений с разрывными операторами и спектральным параметром // Вестник Воронежского государственного университета. Сер. Системный анализ и информационные технологии. 2011. № 2. С. 36–39.

3. *Потапов Д. К.* Задачи управления системами эллиптического типа высокого порядка со спектральным параметром, внешним возмущением и разрывной нелинейностью // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2012. Т. 8. № 1. С. 55–57.

4. *Потапов Д. К.* Задачи управления для уравнений со спектральным параметром и разрывным оператором при наличии возмущений // Журн. Сиб. федерального университета. Сер. Математика и физика. 2012. Т. 5. Вып. 2. С. 239–245.

5. *Потапов Д. К.* О существовании решения задачи управления с возмущением для одного класса уравнений со спектральным параметром и разрывным оператором // Вестник Воронежского государственного университета. Сер. Системный анализ и информационные технологии. 2012. № 1. С. 12–15.

6. *Потапов Д. К.* О связи управления и состояния в спектральных задачах для уравнений с разрывными операторами // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2013. Т. 9. № 5–1. С. 104–105.

7. *Потапов Д. К.* Оптимальное управление распределенными системами эллиптического типа высокого порядка со спектральным параметром и разрывной нелинейностью // Известия РАН. Теория и системы управления. 2013. № 2. С. 19–24.

8. *Будак Б. М., Беркович Е. М.* О задачах оптимального управления для дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями // Журн. вычислит. математики и матем. физики. 1971. Т. 11. № 1. С. 51–64.

9. *Carl S., Heikkila S.* On the existence of minimal and maximal solutions of discontinuous functional Sturm — Liouville boundary value problems // J. Inequal. Appl. 2005. N 4. P. 403–412.

10. *Bonanno G., Bisci G. M.* Infinitely many solutions for a boundary value problem with discontinuous nonlinearities // Bound. Value Probl. 2009. Art. ID 670675. 20 p.

11. *Bonanno G., Buccellato S. M.* Two point boundary value problems for the Sturm — Liouville equation with highly discontinuous nonlinearities // Taiwanese J. Math. 2010. Vol. 14. N 5. P. 2059–2072.

12. *Потапов Д. К.* Задача Штурма — Лиувилля с разрывной нелинейностью // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50. № 9. С. 1284–1286.

13. *Потапов Д. К.* Существование решений, оценки дифференциального оператора и «разделяющее» множество в краевой задаче для дифференциального уравнения второго порядка с разрывной нелинейностью // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51. № 7. С. 970–974.

14. *Bonanno G., D'Agui G., Winkert P.* Sturm — Liouville equations involving discontinuous nonlinearities // Minimax Theory Appl. 2016. Vol. 1. N 1. P. 125–143.

15. *Павленко В. Н., Постникова Е. Ю.* Задача Штурма — Лиувилля для уравнения с разрывной нелинейностью // Челябинск. физ.-матем. журн. 2019. Т. 4. Вып. 2. С. 142–154.

16. *Лионс Ж.-Л.* Управление сингулярными распределенными системами / пер. с франц. А. И. Штерна. М.: Наука, 1987. 368 с.

17. *Chang K.-C.* Free boundary problems and the set-valued mappings // Journal of Differential Equations. 1983. Vol. 49. N 1. P. 1–28.

18. *Павленко В. Н., Потапов Д. К.* О существовании луча собственных значений для уравнений с разрывными операторами // Сиб. матем. журн. 2001. Т. 42. № 4. С. 911–919.

19. *Потапов Д. К.* Математическая модель отрывных течений несжимаемой жидкости // Известия РАЕН. Сер. Математика. Математическое моделирование. Информатика и управление. 2004. Т. 8. № 3–4. С. 163–170.

20. *Потапов Д. К.* Непрерывная аппроксимация одномерного аналога модели Гольдштика отрывных течений несжимаемой жидкости // Сиб. журн. вычисл. математики. 2011. Т. 14. № 3. С. 291–296.

Статья поступила в редакцию 16 января 2023 г.
Статья принята к печати 25 апреля 2023 г.

Контактная информация:

Басков Олег Владимирович — канд. физ.-мат. наук, доц.; o.baskov@spbu.ru

Потапов Дмитрий Константинович — канд. физ.-мат. наук, доц.; d.potapov@spbu.ru

Control and perturbation in Sturm — Liouville's problem with discontinuous nonlinearity*

O. V. Baskov, D. K. Potapov

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Baskov O. V., Potapov D. K. Control and perturbation in Sturm — Liouville's problem with discontinuous nonlinearity. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2023, vol. 19, iss. 2, pp. 275–282.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.212 (In Russian)

* This research was funded by Russian Science Foundation (project N 23-21-00069), https://rscf.ru/en/project/23-21-00069/

We consider the Sturm — Liouville problem with discontinuous nonlinearity, control and perturbation. Previously obtained results for equations with a spectral parameter and a discontinuous operator are applied to this problem. By the variational method, we have established theorems on the existence of solutions to the Sturm — Liouville problem with discontinuous nonlinearity and to the optimal control problem, as well as on topological properties of the set of the acceptable “control — state” pairs. A one-dimensional analog of the Gol’dshtik model for separated flows of an incompressible fluid with control and perturbation is given as an application.

Keywords: Sturm — Liouville’s problem, discontinuous nonlinearity, control problems, variational method, Gol’dshtik’s model.

References

1. Potapov D. K. Upravlenie spektral’nymi zadachami dlia uravnenii s razryvnymi operatorami [Control of spectral problems for equations with discontinuous operators]. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki Ural’skogo otdeleniia RAN* [*Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics (Supplementary issues)*], 2011, vol. 17, no. 1, pp. 190–200. (In Russian)

2. Potapov D. K. O razreshimosti zadachi upravleniia dlia odnogo klassa uravnenii s razryvnymi operatorami i spektral’nym parametrom [On resolvability of a control problem for one class of equations with discontinuous operators and a spectral parameter]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriia Sistemnyi analiz i informatsionnye tekhnologii* [*Proceedings of Voronezh State University. Series Systems Analysis and Information Technologies*], 2011, no. 2, pp. 36–39. (In Russian)

3. Potapov D. K. Zadachi upravleniia sistemami ellipticheskogo tipa vysokogo poriadka so spektral’nym parametrom, vneshnim vozmushcheniem i razryvnoi nelineinost’iu [Control problems for higher-order systems of elliptic type with a spectral parameter, an external perturbation, and a discontinuous nonlinearity]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta* [*Bulletin of Voronezh State Technical University*], 2012, vol. 8, no. 1, pp. 55–57. (In Russian)

4. Potapov D. K. Zadachi upravleniia dlia uravnenii so spektral’nym parametrom i razryvnym operatorom pri nalichii vozmushchenii [Control problems for equations with a spectral parameter and a discontinuous operator under perturbations]. *Zhurnal Sibirskogo federal’nogo universiteta. Seriia Matematika i fizika* [*Journal of Siberian Federal University. Series Mathematics and Physics*], 2012, vol. 5, iss. 2, pp. 239–245. (In Russian)

5. Potapov D. K. O sushchestvovanii resheniia zadachi upravleniia s vozmushcheniem dlia odnogo klassa uravnenii so spektral’nym parametrom i razryvnym operatorom [Existence of solution to control problems with perturbations for a class of equations with spectral parameter and discontinuous operator]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriia Sistemnyi analiz i informatsionnye tekhnologii* [*Proceedings of Voronezh State University. Series Systems Analysis and Information Technologies*], 2012, no. 1, pp. 12–15. (In Russian)

6. Potapov D. K. O sviazi upravleniia i sostoianiia v spektral’nykh zadachakh dlia uravnenii s razryvnymi operatorami [On dependence between control and state in spectral problems for equations with discontinuous operators]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta* [*Bulletin of Voronezh State Technical University*], 2013, vol. 9, no. 5–1, pp. 104–105. (In Russian)

7. Potapov D. K. Optimal’noe upravlenie raspredelennymi sistemami ellipticheskogo tipa vysokogo poriadka so spektral’nym parametrom i razryvnoi nelineinost’iu [Optimal control of higher order elliptic distributed systems with a spectral parameter and discontinuous nonlinearity]. *Izvestiia RAN. Teoriia i sistemy upravleniia* [*Journal of Computer and Systems Sciences International*], 2013, no. 2, pp. 19–24. (In Russian)

8. Budak B. M., Berkovich E. M. O zadachakh optimal’nogo upravleniia dlia differentsial’nykh uravnenii s razryvnymi pravymi chastiami [Optimal control problems for differential equations with discontinuous right sides]. *Zhurnal vychislitel’noi matematiki i matematicheskoi fiziki* [*USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*], 1971, vol. 11, no. 1, pp. 51–64. (In Russian)

9. Carl S., Heikkila S. On the existence of minimal and maximal solutions of discontinuous functional Sturm — Liouville boundary value problems. *J. Inequal. Appl.*, 2005, no. 4, pp. 403–412.

10. Bonanno G., Bisci G. M. Infinitely many solutions for a boundary value problem with discontinuous nonlinearities. *Bound. Value Probl.*, 2009, Art. ID 670675, 20 p.

11. Bonanno G., Buccellato S. M. Two point boundary value problems for the Sturm — Liouville equation with highly discontinuous nonlinearities. *Taiwanese J. Math.*, 2010, vol. 14, no. 5, pp. 2059–2072.

12. Potapov D. K. Zadacha Shturma — Liuvillia s razryvnoi nelineinost'iu [Sturm — Liouville's problem with discontinuous nonlinearity]. *Differentsial'nie uravneniia* [*Differential Equations*], 2014, vol. 50, no. 9, pp. 1284–1286. (In Russian)

13. Potapov D. K. Sushchestvovanie reshenii, otsenki differentsial'nogo operatora i "razdeliaiushchee" mnozhestvo v kraevoi zadache dlia differentsial'nogo uravneniia vtorogo poriadka s razryvnoi nelineinost'iu [Existence of solutions, estimates for the differential operator, and a "separating" set in a boundary value problem for a second-order differential equation with a discontinuous nonlinearity]. *Differentsial'nie uravneniia* [*Differential Equations*], 2015, vol. 51, no. 7, pp. 970–974. (In Russian)

14. Bonanno G., D'Agui G., Winkert P. Sturm — Liouville equations involving discontinuous nonlinearities. *Minimax Theory Appl.*, 2016, vol. 1, no. 1, pp. 125–143.

15. Pavlenko V. N., Postnikova E. Yu. Zadacha Shturma — Liuvillia dlia uravneniia s razryvnoi nelineinost'iu [Sturm — Liouville problem for an equation with a discontinuous nonlinearity]. *Cheliabinskii fiziko-matematicheskii zhurnal* [*Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal*], 2019, vol. 4, iss. 2, pp. 142–154. (In Russian)

16. Lions Zh.-L. *Upravlenie singuliarnymi raspredelennymi sistemami* [*Control of distributed singular system*]. Moscow, Nauka Publ., 1987, 368 p. (In Russian)

17. Chang K.-C. Free boundary problems and the set-valued mappings. *Journal of Differential Equations*, 1983, vol. 49, no. 1, pp. 1–28.

18. Pavlenko V. N., Potapov D. K. O sushchestvovanii lucha sobstvennykh znachenii dlia uravnenii s razryvnymi operatorami [Existence of a ray of eigenvalue for equations with discontinuous operators]. *Sibirskii matematicheskii zhurnal* [*Siberian Mathematical Journal*], 2001, vol. 42, no. 4, pp. 911–919. (In Russian)

19. Potapov D. K. Matematicheskaia model' otryvnykh techenii neszhimaemoi zhidkosti [Mathematical model for separated flows of incompressible fluid]. *Izvestiia RAEN. Seriia Matematika. Matematicheskoe modelirovanie. Informatika i upravlenie* [*Proceedings of RANS. Series Mathematics. Mathematical Modeling. Informatics and Control*], 2004, vol. 8, no. 3–4, pp. 163–170. (In Russian)

20. Potapov D. K. Nepreryvnaia approksimatsiia odnomernogo analoga modeli Gol'dshtika otryvnykh techenii neszhimaemoi zhidkosti [Continuous approximations for a 1D analog of the Gol'dshtik model for separated flows of an incompressible fluid]. *Sibirskii zhurnal vychislitel'noi matematiki* [*Numerical Analysis and Applications*], 2011, vol. 14, no. 3, pp. 291–296. (In Russian)

Received: January 16, 2023.
Accepted: April 25, 2023.

Authors' information:

Oleg V. Baskov — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor; o.baskov@spbu.ru

Dmitriy K. Potapov — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor; d.potapov@spbu.ru