УДК 517.929 Вестник СПбГУ. Прикладная математика. Информатика... 2023. Т. 19. Вып. 2
MSC 93D09

Метод Разумихина в обобщенной задаче Мышкиса для систем с распределенным запаздыванием*

А. В. Егоров

Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация,
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Егоров А. В.* Метод Разумихина в обобщенной задаче Мышкиса для систем с распределенным запаздыванием // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2023. Т. 19. Вып. 2. С. 148–161. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.202

В статье представлены достаточные условия разрешимости обобщенной задачи Мышкиса для системы уравнений с распределенным переменным запаздыванием и постоянным ядром. Получены условия на ядро, при выполнении которых система будет равномерно устойчива при любом допустимом запаздывании. Под допустимым запаздыванием понимается кусочно-непрерывная функция, ограниченная сверху по величине и скорости роста. На примере двух систем показано, как можно проверить найденные условия на практике.

Ключевые слова: система с запаздыванием, устойчивость, распределенное запаздывание, обобщенная задача Мышкиса, метод Разумихина.

1. Введение. В статье рассматривается система дифференциальных уравнений с распределенным ограниченным запаздыванием, зависящим от времени. Продолжается разработка идеи применения модифицированного метода функций Разумихина для решения обобщенной задачи Мышкиса.

Под обобщенной задачей Мышкиса мы понимаем задачу определения параметров системы, при которых равномерная устойчивость наблюдается для любых запаздываний из заданного ограниченного множества пространства кусочно-непрерывных функций. Можно сказать, что решается задача исследования робастной устойчивости, где параметры варьируются в пределах бесконечномерных множеств.

Для простейшего скалярного уравнения

$$\dot{x}(t) = -bx(t - \tau(t)) \tag{1}$$

в работе А. Д. Мышкиса [1] был получен весьма любопытный результат: в случае, когда $bh \in [0, 3/2]$, при любом запаздывании τ, для которого

$$0 \leqslant \tau(t) \leqslant h \ \text{ при всех } t, \tag{2}$$

все решения уравнения (1) ограничены, что, учитывая линейность, можно трактовать как устойчивость по Ляпунову. Равномерная устойчивость при указанных условиях доказана в работе [2].

Кроме того, в [1] показано, что при $bh < 3/2$ уравнение асимптотически устойчиво, а при $bh > 3/2$ найдется запаздывание, ограниченное константой h, для ко-

* Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 21-71-00052).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2023

торого уравнение неустойчиво. Таким образом, $3/2$ является точной верхней границей множества, которое мы называем множеством разрешимости задачи Мышкиса. В иностранной литературе (см., например, [3]) данная теорема называется *3/2 stability theorem*.

Теорема Мышкиса была замечена далеко не сразу, но с 1970-х годов стали появляться статьи с обобщениями этого красивого и нетривиального результата. В частности, нелинейное уравнение с переменным запаздыванием было исследовано в [2], уравнение с зависящим от времени параметром b рассмотрено в [3], случай, когда кроме запаздывающего члена в уравнении присутствует слагаемое без запаздывания, представлен в [4], уравнению с несколькими сосредоточенными запаздываниями посвящены работы [5, 6], а случаю распределенного запаздывания — статья [7].

Во всех перечисленных работах, как и в статье Мышкиса [1], исследовались скалярные уравнения с вещественными коэффициентами. Нашей целью с самого начала было изучение систем из нескольких уравнений. При внимательном рассмотрении мы пришли к выводу, что методы, представленные в перечисленных выше статьях, не годятся для такого исследования, поэтому был разработан новый подход на основе метода функций Разумихина.

Сначала метод был успешно применен для системы из двух вещественных уравнений, соответствующей скалярному уравнению (1) с комплексным коэффициентом b [8] (это еще один случай, для которого прежние методы не работали). Позже подход был распространен на системы с произвольным числом уравнений и системы, в которых присутствуют как запаздывающий член, так и слагаемое без запаздывания [9, 10]. Однако до настоящего времени мы рассматривали только случай сосредоточенного запаздывания, в этой статье представленный метод будет впервые применен для системы с распределенным запаздыванием.

Стоит сказать, что предложенный подход имеет ряд ограничений. Во-первых, пока не удалось показать ни в одном из рассмотренных случаев, что полученная оценка области разрешимости задачи Мышкиса является точной, как в случае с теоремой о трех вторых. К сожалению, разработанный нами метод не позволяет доказывать обратные утверждения об устойчивости, и эта проблема пока не решена. Во-вторых, метод требует от запаздывания не только ограниченности по величине, но и ограниченности скорости роста единицей. Стоит отметить, однако, что скорость убывания запаздывания может быть любой, в том числе и бесконечной, т. е. запаздывание может иметь скачки вниз, но не может иметь скачков вверх. В-третьих, прямая проверка условий из представленных нами теорем в общем случае является довольно непростой задачей, так как они выражены в терминах пустоты некоторых множеств, описываемых невыпуклыми системами неравенств. Для того чтобы обойти эту сложность, для систем с сосредоточенными запаздываниями будут предложены некоторые аналитические процедуры, а также метод, позволяющий свести проблему к нескольким задачам выпуклого квадратичного программирования, которые, однако, вносят некоторый консерватизм в результаты.

Отметим, что для решения обобщенной задачи Мышкиса может быть также использован метод функционалов Ляпунова—Красовского (для систем с точечным запаздыванием см. [11–13]), но при его применении от запаздывания требуется непрерывная дифференцируемость, а метод функций Разумихина, как правило, не нуждается в этом ограничении. Стоит сказать, что запаздывание, выбранное Мышкисом для доказательства неустойчивости уравнения (1) при $bh > 3/2$, есть разрывная функция со скачками вниз.

В настоящей работе рассмотрена система уравнений с распределенным запаздыванием, ядром которого является постоянная матрица. Получены достаточные условия разрешимости обобщенной задачи Мышкиса в терминах пустоты множества решений некоторой системы неравенств. Отдельно исследован частный случай скалярного уравнения с вещественным коэффициентом, для которого найдены явные условия разрешимости обобщенной задачи Мышкиса, которые позволили сравнить представленный нами результат с известным условием [7]. Кроме того, на примере системы из двух уравнений показано, как установленные достаточные условия могут быть проверены на практике.

В статье используются следующие обозначения. Для векторов применяется евклидова норма $\|\cdot\|$, для матриц — индуцированная ею норма. Симметризованная версия для квадратной вещественной матрицы A обозначается через

$$A^H = \frac{A^T + A}{2}.$$

Пространство непрерывных функций со значениями в $\mathbb{R}^n$, заданных на отрезке $[\alpha, \beta]$, обозначается $\mathbf{C}^{(0)}([\alpha, \beta], \mathbb{R}^n)$.

2. Система с распределенным запаздыванием. Рассмотрим систему

$$\dot{x}(t) = A \int\limits_{-\tau(t)}^{0} x(t+s)\,ds, \tag{3}$$

в которой $x(t) \in \mathbb{R}^n$ для всех t, запаздывание τ подчиняется условию (2). Если масштабировать время, то систему (3) можно свести к случаю $h = 1$. И действительно, легко показать, что следующая система эквивалентна исходной в смысле устойчивости:

$$\dot{y}(t) = h^2 A \int\limits_{-\tilde{\tau}(t)}^{0} y(t+s)\,ds,$$

где для всех t

$$\tilde{\tau}(t) = \frac{\tau(ht)}{h} \in [0, 1].$$

Поэтому далее, не уменьшая общности, будем считать, что запаздывание в системе (3) ограничено единицей. Добавив к этому условию требование ограниченности скорости роста запаздывания, которое необходимо в силу особенностей применяемого нами метода, сформулируем строгое определение допустимого запаздывания.

Определение 1. Кусочно-непрерывную функцию $\tau(t)$, $t \in [-1, \infty)$, будем называть *допустимым запаздыванием*, если она удовлетворяет таким условиям:

1) ограниченность по величине:

$$0 \leqslant \tau(t) \leqslant 1, \quad t \geqslant -1;$$

2) ограниченность скорости роста:

$$\frac{\tau(t_2) - \tau(t_1)}{t_2 - t_1} \leqslant 1, \quad t_2 > t_1 \geqslant -1.$$

В качестве начальных будем рассматривать непрерывные функции, заданные на отрезке $[-1, 0]$, начальный момент времени для определенности будем считать неотрицательным. Через $x(t, t_0, \varphi)$ обозначим решение системы (3), удовлетворяющее начальному условию

$$x(t, t_0, \varphi) = \varphi(t - t_0), \quad t \in [t_0 - h, t_0].$$

Определение 2. Систему (3) с допустимым запаздыванием τ будем называть *равномерно устойчивой*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое что $\|x(t, t_0, \varphi)\| < \varepsilon$ для всех $t_0 \geqslant 0$, t_0 и всех начальных функций φ, удовлетворяющих условию $\sup_{\theta \in [-1,0]} \|\varphi(\theta)\| < \delta$.

Теперь сформулируем основное определение.

Определение 3. Будем говорить, что матрица A *решает обобщенную задачу Мышкиса* для системы (3), если система с этой матрицей равномерно устойчива при любом допустимом запаздывании.

3. Метод Разумихина. В классической формулировке метод Разумихина требует для равномерной устойчивости системы существования положительно определенной функции v, производная которой в силу системы неположительна на всех непрерывных функциях из множества

$$\big\{v(\varphi(\theta)) < v(\varphi(0)),\ \theta \in [-1, 0]\big\}.$$

Применим модификацию этой теоремы. Идея заключается во введении искусственного запаздывания $N > 1$. При этом на интервале $[-N, -N+1]$ задаются произвольные начальные функции, а на интервале $(-N+1, 0]$ они доопределяются с помощью уравнения (3). Ниже приведена строгая формулировка этой модификации теоремы Разумихина. Результат базируется на теореме со с. 255 книги [14]. Мы адаптировали ее для случая нестационарной системы, взяв в качестве функции Разумихина простейшую положительно определенную функцию $\|\cdot\|^2$. Воспользовавшись линейностью системы, ограничимся нормированными функциями.

Теорема 1. *Система* (3) *с допустимым запаздыванием равномерно устойчива, если существует* $N > 1$ *такое, что для любого* $t \geqslant 0$ *и любой функции* $\varphi \in \mathcal{X}_{t,N}$

$$\varphi^T(0) A \int\limits_{-\tau(t)}^{0} \varphi(s)\, ds \leqslant 0. \tag{4}$$

Здесь

$$\mathcal{X}_{t,N} = \left\{ \varphi \in \mathbf{C}^{(0)}([-N, 0], \mathbb{R}^n) \,\middle|\, \|\varphi(0)\| = 1, \ \ \|\varphi(\theta)\| < 1,\, \theta \in [-N, 0), \right.$$
$$\left. \frac{d}{d\theta}\varphi(\theta) = A \int\limits_{\theta - \tau(t+\theta)}^{\theta} \varphi(s)\, ds,\, \theta \in (-N+1, 0) \right\}.$$

Далее будем использовать эту теорему при $N = 3$.

4. Вспомогательные результаты. Чтобы применить модифицированную теорему Разумихина для построения достаточных условий разрешимости обобщенной задачи Мышкиса, введем два вспомогательных результата.

Сначала построим оценку сверху для выражения в левой части неравенства (4).

Лемма 1. *Пусть τ — допустимое запаздывание. Для любого $t \geqslant 0$ на множестве $\mathcal{X}_{t,3}$ выполнено неравенство*

$$\varphi^T(0)A \int\limits_{-\tau(t)}^{0} \varphi(s)\,ds \leqslant \tau(t)\,\varphi^T(0)A^H\varphi(0) + \frac{\tau^2(t)\|A^2\|}{2} -$$

$$-\frac{\tau^3(t)\|A^3\|}{2} \int\limits_{0}^{1} \left(1-s^2\right) \max\left\{0,\ x_\varphi^{(1)} + \tau(t)(s-1),\ y_{\varphi,t}^{(1)} - \tau(t)s\right\} ds,$$

где

$$x_\varphi^{(1)} = \frac{\|A^2\| + \varphi^T(0)(A^2)^H\varphi(0)}{\|A^3\|}, \quad y_{\varphi,t}^{(1)} = \frac{\|A^2\| + \varphi^T(0)A^2\varphi(-\tau(t))}{\|A^3\|}.$$

Доказательство. Зафиксируем $t \geqslant 0$. Если $\tau(t) = 0$, результат очевиден. Рассмотрим случай $\tau(t) > 0$. Проинтегрируем равенство

$$\frac{d}{d\theta}\varphi(\theta) = A \int\limits_{\theta-\tau(t+\theta)}^{\theta} \varphi(s)\,ds \tag{5}$$

из определения множества $\mathcal{X}_{t,N}$ на интервале от ξ до 0, где ξ — некоторая точка из отрезка $[-\tau(t), 0]$:

$$\varphi(0) - \varphi(\xi) = A \int\limits_{\xi}^{0} \int\limits_{\theta-\tau(t+\theta)}^{\theta} \varphi(s)\,ds\,d\theta. \tag{6}$$

Отсюда после домножения слева на $\varphi^T(0)A$, симметризации первого слагаемого и интегрирования на интервале $[-\tau(t), 0]$ получаем равенство

$$\int\limits_{-\tau(t)}^{0} \varphi^T(0)A\varphi(\xi)\,d\xi = \tau(t)\,\varphi^T(0)A^H\varphi(0) - \varphi^T(0)A^2 \int\limits_{-\tau(t)}^{0} \int\limits_{\xi}^{0} \int\limits_{\theta-\tau(t+\theta)}^{\theta} \varphi(s)\,ds\,d\theta\,d\xi.$$

Изменение порядка интегрирования в последнем его слагаемом приводит к формуле

$$\int\limits_{-\tau(t)}^{0} \varphi^T(0)A\varphi(\xi)\,d\xi = \tau(t)\,\varphi^T(0)A^H\varphi(0) - \int\limits_{-\tau(t)}^{0} (\theta+\tau(t)) \int\limits_{\theta-\tau(t+\theta)}^{\theta} \varphi^T(0)A^2\varphi(s)\,ds\,d\theta. \tag{7}$$

Чтобы получить оценку сверху, нужно оценить снизу произведение $\varphi^T(0)A^2\varphi(s)$ для $s \in [-2, 0]$. Сделаем это тремя способами, а после соберем из трех оценок наилучшую.

Оценка 1. Простейшее неравенство можно получить из условия $\|\varphi(\theta)\| < \|\varphi(0)\|$, $\theta \in [-3, 0)$, из определения множества $\mathcal{X}_{t,3}$:

$$\varphi^T(0)A^2\varphi(s) \geqslant -\|\varphi(0)\|\|A^2\|\|\varphi(s)\| > -\|A^2\|.$$

Оценка 2. Из равенства (6) получаем

$$\varphi^T(0)A^2\varphi(s) = \varphi^T(0)(A^2)^H\varphi(0) - \varphi^T(0)A^3 \int\limits_{s}^{0} \int\limits_{\theta-\tau(t+\theta)}^{\theta} \varphi(\eta)\,d\eta\,d\theta \geqslant \varphi^T(0)(A^2)^H\varphi(0) -$$

$$-\|A^3\|\int\limits_{s}^{0}\int\limits_{\theta-\tau(t+\theta)}^{\theta}\|\varphi(\eta)\|\,d\eta\,d\theta > \varphi^T(0)(A^2)^H\varphi(0)-\|A^3\|\int\limits_{s}^{0}\tau(t+\theta)\,d\theta.$$

Так как допустимое запаздывание ограничено единицей, имеем неравенство

$$\varphi^T(0)A^2\varphi(s) > \varphi^T(0)(A^2)^H\varphi(0)+s\|A^3\| = -\|A^2\|+\left(x_{\varphi}^{(1)}+s\right)\|A^3\|.$$

Оценка 3. Проинтегрируем равенство (5) на интервале от $-\tau(t)$ до s и применим процедуру, аналогичную той, что и при построении оценки 2. Однако стоит учесть, что значение s может быть как больше, так и меньше, чем $-\tau(t)$:

$$\varphi^T(0)A^2\varphi(s) = \varphi^T(0)A^2\varphi(-\tau(t))+\varphi^T(0)A^3\int\limits_{-\tau(t)}^{s}\int\limits_{\theta-\tau(t+\theta)}^{\theta}\varphi(\eta)\,d\eta\,d\theta >$$

$$> \varphi^T(0)A^2\varphi(-\tau(t))-\|A^3\|\left|\int\limits_{-\tau(t)}^{s}\tau(t+\theta)\,d\theta\right| \geqslant -\|A^2\|+\left(y_{\varphi,t}^{(1)}-|s+\tau(t)|\right)\|A^3\|.$$

Невозможно однозначно сказать, какая из трех оценок лучше, поэтому объединим их в одну:

$$\varphi^T(0)A^2\varphi(s) > -\|A^2\|+\|A^3\|\max\left\{0,\ x_{\varphi}^{(1)}+s,\ y_{\varphi,t}^{(1)}-|s+\tau(t)|\right\}.$$

В итоге из формулы (7) выводим неравенство

$$\varphi^T(0)A\int\limits_{-\tau(t)}^{0}\varphi(\xi)\,d\xi \leqslant \tau(t)\,\varphi^T(0)A^H\varphi(0)+\|A^2\|\int\limits_{-\tau(t)}^{0}(\theta+\tau(t))\tau(t+\theta)\,d\theta -$$

$$-\|A^3\|\int\limits_{-\tau(t)}^{0}(\theta+\tau(t))\int\limits_{\theta-\tau(t+\theta)}^{\theta}\max\left\{0,\ x_{\varphi}^{(1)}+s,\ y_{\varphi,t}^{(1)}-|s+\tau(t)|\right\}ds\,d\theta.$$

Заметим, что по второму условию из определения допустимого запаздывания $\theta-\tau(t+\theta)\leqslant-\tau(t)$. Так как выражение в последнем интеграле полученной выше оценки неотрицательно, можно заменить нижний предел интегрирования $\theta-\tau(t+\theta)$ на $-\tau(t)$:

$$\varphi^T(0)A\int\limits_{-\tau(t)}^{0}\varphi(\xi)\,d\xi \leqslant \tau(t)\,\varphi^T(0)A^H\varphi(0)+\|A^2\|\int\limits_{0}^{\tau(t)}\theta\,d\theta -$$

$$-\|A^3\|\int\limits_{-\tau(t)}^{0}(\theta+\tau(t))\int\limits_{-\tau(t)}^{\theta}\max\left\{0,\ x_{\varphi}^{(1)}+s,\ y_{\varphi,t}^{(1)}-|s+\tau(t)|\right\}ds\,d\theta.$$

После изменения порядка интегрирования и простейших преобразований получим неравенство

$$\varphi^T(0)A\int\limits_{-\tau(t)}^{0}\varphi(\xi)\,d\xi \leqslant \tau(t)\,\varphi^T(0)A^H\varphi(0)+\frac{\tau^2(t)\|A^2\|}{2}-$$

$$-\|A^3\| \int\limits_0^{\tau(t)} \theta \int\limits_{-\tau(t)}^{\theta-\tau(t)} \max\Big\{0,\ x_\varphi^{(1)}+s,\ y_{\varphi,t}^{(1)}-|s+\tau(t)|\Big\}\, ds\, d\theta \leqslant \tau(t)\,\varphi^T(0)A^H\varphi(0)+$$

$$+\frac{\tau^2(t)\|A^2\|}{2}-\|A^3\| \int\limits_0^{\tau(t)} \frac{\tau^2(t)-s^2}{2} \max\Big\{0,\ x_\varphi^{(1)}+s-\tau(t),\ y_{\varphi,t}^{(1)}-s\Big\}\, ds,$$

которое преобразуется к искомому с помощью замены переменной интегрирования. □

Можно заметить, что полученная оценка монотонна по $x_\varphi^{(1)}$ и $y_{\varphi,t}^{(1)}$. Так как необходимо ориентироваться на худший возможный случай, можно взять наименьшие значения для $x_\varphi^{(1)}$ и $y_{\varphi,t}^{(1)}$, т. е. $x_\varphi^{(1)}=y_{\varphi,t}^{(1)}=0$. Но если хотим получить менее консервативный результат, можно вывести некоторое ограничение на $\varphi(0)$ и $\varphi(-\tau(t))$, которые задают $x_\varphi^{(1)}$ и $y_{\varphi,t}^{(1)}$.

Лемма 2. *Пусть τ — допустимое запаздывание. Для любого $t \geqslant 0$, такого что $\tau(t)>0$, на множестве $\mathcal{X}_{t,3}$ выполнено неравенство*

$$\varphi^T(0)\varphi(-\tau(t)) > 1-\tau(t)\|A\|+$$

$$+\tau^2(t)\|A^2\| \int\limits_0^1 (1-s)\max\Big\{0,\ x_\varphi^{(2)}+\tau(t)(s-1),\ y_{\varphi,t}^{(2)}-\tau(t)s\Big\}\, ds,$$

где

$$x_\varphi^{(2)}=\frac{\|A\|-\varphi^T(0)A^H\varphi(0)}{\|A^2\|},\quad y_{\varphi,t}^{(2)}=\frac{\|A\|-\varphi^T(0)A\varphi(-\tau(t))}{\|A^2\|}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из формулы (6) получаем равенство

$$\varphi^T(0)\varphi(-\tau(t)) = 1-\int\limits_{-\tau(t)}^{0}\ \int\limits_{\theta-\tau(t+\theta)}^{\theta} \varphi^T(0)A\varphi(s)\, ds\, d\theta. \tag{8}$$

Так как требуется оценка снизу, оценим произведение $\varphi^T(0)A\varphi(s)$ сверху при $s \in [-2,0]$. Воспользуемся подходом из доказательства леммы 1.

Оценка 1:

$$\varphi^T(0)A\varphi(s) < \|A\|.$$

Оценка 2:

$$\varphi^T(0)A\varphi(s) = \varphi^T(0)A^H\varphi(0)-\varphi^T(0)A^2 \int\limits_s^0\ \int\limits_{\theta-\tau(t+\theta)}^{\theta} \varphi(\eta)\, d\eta\, d\theta <$$

$$< \varphi^T(0)A^H\varphi(0)-s\|A^2\| = \|A\|+\varphi^T(0)A^H\varphi(0)-\|A\|-s\|A^2\|.$$

Оценка 3:

$$\varphi^T(0)A\varphi(s) = \varphi^T(0)A\varphi(-\tau(t))+\varphi^T(0)A^2 \int\limits_{-\tau(t)}^{s}\ \int\limits_{\theta-\tau(t+\theta)}^{\theta} \varphi(\eta)\, d\eta\, d\theta <$$

$$< \varphi^T(0)A\varphi(-\tau(t))+\|A^2\|\,|s+\tau(t)| = \|A\|+\varphi^T(0)A\varphi(-\tau(t))-\|A\|+|s+\tau(t)|\,\|A^2\|.$$

Из полученных трех оценок составляем одну:

$$\varphi^T(0)A\varphi(s) < \|A\| - \|A^2\| \max\left\{0,\ x_\varphi^{(2)} + s,\ y_{\varphi,t}^{(2)} - |s+\tau(t)|\right\}.$$

Подставив ее в уравнение (8), получим неравенство

$$\varphi^T(0)\varphi(-\tau(t)) = 1 - \int\limits_{-\tau(t)}^{0} \int\limits_{\theta-\tau(t+\theta)}^{\theta} \varphi^T(0)A\varphi(s)\,ds\,d\theta >$$

$$> 1 - \|A\| \int\limits_{-\tau(t)}^{0} \tau(t+\theta)\,d\theta + \|A^2\| \int\limits_{-\tau(t)}^{0} \int\limits_{\theta-\tau(t+\theta)}^{\theta} \max\left\{0,\ x_\varphi^{(2)} + s,\ y_{\varphi,t}^{(2)} - |s+\tau(t)|\right\} ds\,d\theta.$$

Так как $\theta + \tau(t) \leqslant \tau(t+\theta) \leqslant 1$,

$$\varphi^T(0)\varphi(-\tau(t)) >$$

$$> 1 - \tau(t)\|A\| + \|A^2\| \int\limits_{-\tau(t)}^{0} \int\limits_{-\tau(t)}^{\theta} \max\left\{0,\ x_\varphi^{(2)} + s,\ y_{\varphi,t}^{(2)} - |s+\tau(t)|\right\} ds\,d\theta =$$

$$= 1 - \tau(t)\|A\| - \|A^2\| \int\limits_{-\tau(t)}^{0} s\,\max\left\{0,\ x_\varphi^{(2)} + s,\ y_{\varphi,t}^{(2)} - s - \tau(t)\right\} ds.$$

Замена переменной интегрирования s на $\tau(t)(s-1)$ приводит к требуемому неравенству. □

5. Основной результат.

Теорема 2. *Матрица A решает обобщенную задачу Мышкиса, если множество решений $(\tau,\gamma,\mu) \in (0,1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ следующей системы неравенств пусто*:

$$\begin{cases} \gamma^T\gamma = 1, \\ \mu^T\mu < 1, \\ 2\gamma^T A^H\gamma + \tau\|A^2\| - \tau^2\|A^3\| \int\limits_0^1 (1-s^2)\max\left\{0,\ x_\gamma^{(1)} + \tau(s-1),\ y_{\gamma,\mu}^{(1)} - \tau s\right\} ds > 0, \\ \gamma^T\mu - 1 + \tau\|A\| - \tau^2\|A^2\| \int\limits_0^1 (1-s)\,\max\left\{0,\ x_\varphi^{(2)} + \tau(s-1),\ y_{\varphi,t}^{(2)} - \tau s\right\} ds > 0, \end{cases} \tag{9}$$

где

$$x_\gamma^{(1)} = \frac{\|A^2\| + \gamma^T(A^2)^H\gamma}{\|A^3\|}, \quad y_{\gamma,\mu}^{(1)} = \frac{\|A^2\| + \gamma^T A^2\mu}{\|A^3\|},$$
$$x_\gamma^{(2)} = \frac{\|A\| - \gamma^T A^H\gamma}{\|A^2\|}, \qquad y_{\gamma,\mu}^{(2)} = \frac{\|A\| - \gamma^T A\mu}{\|A^2\|}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим произвольное допустимое запаздывание τ. Покажем, что пустота множества решений системы неравенств приводит к выполнению условий теоремы 1 при $N = 3$. Предположим от противного, что существуют $t \geqslant 0$ и $\varphi \in \mathcal{X}_{t,3}$ такие, что

$$\varphi^T(0)A \int\limits_{-\tau(t)}^{0} \varphi(s)\,ds > 0,$$

ясно при этом, что $\tau(t) > 0$. По лемме 1 это означает, что

$$2\varphi^T(0)A^H\varphi(0) + \tau(t)\|A^2\| -$$
$$- \tau^2(t)\|A^3\| \int\limits_0^1 \left(1 - s^2\right) \max\left\{0,\ x_\varphi^{(1)} + \tau(t)(s-1),\ y_{\varphi,t}^{(1)} - \tau(t)s\right\} ds > 0,$$

а следовательно, третье неравенство в системе (9) выполнено для $\tau = \tau(t)$, $\gamma = \varphi(0)$, $\mu = \varphi(-\tau(t))$.

Так как $\varphi \in \mathcal{X}_{t,3}$, по лемме 2 получаем четвертое неравенство в системе (9) при тех же τ, γ и μ. Первые два неравенства являются прямым следствием из определения множества $\mathcal{X}_{t,3}$.

Таким образом, система (9) имеет по крайней мере одно решение. □

Покажем на примерах, как условия полученной теоремы могут быть проверены на практике.

6. Скалярное уравнение. Рассмотрим простейший вариант системы (3) — скалярное уравнение

$$\dot{x}(t) = a \int\limits_{-\tau(t)}^{0} x(t+s)\,ds, \tag{10}$$

где $a \in \mathbb{R}$. В работе [7] было показано, что обобщенная задача Мышкиса разрешима тогда и только тогда, когда $a \in [-4, 0]$. Применим к этому уравнению для сравнения полученное достаточное условие.

В скалярном случае система из теоремы 2 принимает вид

$$\begin{cases} |\gamma| = 1, \\ |\mu| < 1, \\ 2a + \tau a^2 - \tau^2|a|^3 \int\limits_0^1 (1-s^2)\max\left\{0,\ \dfrac{2}{|a|} + \tau(s-1),\ \dfrac{1+\gamma\mu}{|a|} - \tau s\right\} ds > 0, \\ \gamma\mu - 1 + \tau|a| - \tau^2 a^2 \int\limits_0^1 (1-s)\max\left\{0,\ \dfrac{1}{|a|} - \dfrac{1}{a} + \tau(s-1),\ \dfrac{1}{|a|} - \dfrac{\gamma\mu}{a} - \tau s\right\} ds > 0. \end{cases}$$

Ясно, что при положительном a она точно имеет решения, где значение τ взято достаточно малым, а $\gamma\mu$ близким к единице. При $a = 0$ система решений не имеет. Остается рассмотреть случай $a < 0$. Учитывая, что знак γ не влияет на разрешимость системы, положим $\gamma = 1$. Получаем упрощенную систему:

$$\begin{cases} |\mu| < 1, \\ 2 + \tau a + \tau^2 a^2 \int\limits_0^1 (1-s^2)\max\left\{0,\ \dfrac{2}{|a|} + \tau(s-1),\ \dfrac{1+\mu}{|a|} - \tau s\right\} ds < 0, \\ 1 - \mu + \tau a + \tau^2 a^2 \int\limits_0^1 (1-s)\max\left\{0,\ \dfrac{2}{|a|} + \tau(s-1),\ \dfrac{1+\mu}{|a|} - \tau s\right\} ds < 0. \end{cases} \tag{11}$$

Очевидно, что в рассматриваемом случае выражение в левой части второго неравенства всегда превосходит выражение в левой части третьего неравенства. А заметив, что левая часть второго неравенства не убывает с увеличением μ, придем к выводу, что система (11) эквивалентна в смысле разрешимости неравенству

$$2+\tau a+\tau^2 a^2\int\limits_0^1(1-s^2)\max\left\{0,\ \frac{2}{|a|}+\tau(s-1),\ -\tau s\right\}ds<0.$$

Упростим подынтегральное выражение за счет того, что третий член в скобках неположителен, и сделаем замену переменной интегрирования:

$$2+\tau a+\tau^2 a^2\int\limits_0^1 s(2-s)\max\left\{0,\ \frac{2}{|a|}-\tau s\right\}ds<0.$$

Если $a\geqslant -2$, то неравенство неразрешимо, так как все слагаемые в левой части неотрицательны. Предположим теперь, что $a<-2$, и рассмотрим следующие случаи: 1) $\tau\in(0,2/|a|]$; 2) $\tau\in(2/|a|,1]$.

В первом случае получаем кубическое неравенство относительно τ:

$$2+\tau a-\frac{4}{3}\tau^2 a-\frac{5}{12}\tau^3 a^2<0.$$

Простое исследование показывает, что при $a<-2$ левая часть монотонно убывает по τ и достигает наименьшего значения $2/|a|$ в точке $\tau=2/|a|$. Таким образом, неравенство не имеет решений.

В случае $\tau\in(2/|a|,1]$ имеем неравенство

$$2+\tau a-\frac{8}{3a}-\frac{4}{3\tau a^2}<0,$$

левая часть которого монотонно убывает на указанном интервале. Следовательно, в качестве «наихудшего» τ нужно взять 1. После домножения на $3a^2$ приходим к неравенству

$$3a^3+6a^2-8a-4<0.$$

Если найти наименьший корень полинома $3a^3+6a^2-8a-4$, то это будет наименьшее значение параметра a, при котором система из теоремы 2 не имеет решений. Таким образом, заключаем, что $a\in[-2.785,0]$ решает обобщенную задачу Мышкиса.

Этот результат существенно слабее, чем точная оценка, полученная детальным исследованием поведения решений уравнения в работе [7], но она лучше, чем можно было определить, например, стандартным преобразованием уравнения (10) к виду

$$\dot{x}(t)=a\tau(t)x(t)-a\int\limits_{-\tau(t)}^{0}\int\limits_{t+s}^{t}\dot{x}(\xi)\,d\xi\,ds\ =$$

$$=a\tau(t)x(t)-a^2\int\limits_{-\tau(t)}^{0}\int\limits_{t+s}^{t}\int\limits_{-\tau(\xi)}^{0}x(\xi+\eta)\,d\eta\,d\xi\,ds$$

и применением классического метода Разумихина с квадратичной функцией. Легко проверить, что этот подход приведет к оценке $a\in[-2,0]$.

7. Система из двух уравнений. Рассмотрим систему из двух уравнений, соответствующую скалярному уравнению с комплексным коэффициентом:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \int\limits_{-\tau(t)}^{0} x(t+s)\, ds, \tag{12}$$

в котором $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$. В этом случае

$$\|A^k\| = \|A\|^k = \sqrt{(\alpha^2+\beta^2)^k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$
$$\gamma^T A^H \gamma = \alpha, \qquad \gamma^T (A^2)^H \gamma = \alpha^2 - \beta^2,$$
$$\gamma^T A\mu = \alpha p + \beta q, \quad \gamma^T A^2 \mu = (\alpha^2 - \beta^2)p + 2\alpha\beta q.$$

Здесь

$$p = \gamma^T \mu, \quad q = \gamma^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mu.$$

Заметим, что $\|\mu\|^2 = p^2 + q^2$. Таким образом, мы исключили векторные переменные μ и γ, заменив их скалярными переменными p и q:

$$\begin{cases} p^2 + q^2 < 1, \\ \dfrac{2\alpha}{\|A\|} + \tau\|A\| - \tau^2\|A\|^2 \int\limits_0^1 (1-s^2) \max\left\{0,\ \dfrac{2\alpha^2}{\|A\|^3} + \tau(s-1),\ y^{(1)}_{p,q} - \tau s\right\} ds > 0, \\ p - 1 + \tau\|A\| - \tau^2\|A\|^2 \int\limits_0^1 (1-s) \max\left\{0,\ \dfrac{\|A\|-\alpha}{\|A\|^2} + \tau(s-1),\ y^{(2)}_{p,q} - \tau s\right\} ds > 0, \end{cases} \tag{13}$$

где

$$y^{(1)}_{p,q} = \frac{1}{\|A\|} + \frac{(\alpha^2-\beta^2)p + 2\alpha\beta q}{\|A\|^3}, \quad y^{(2)}_{p,q} = \frac{1}{\|A\|} - \frac{\alpha p + \beta q}{\|A\|^2}.$$

Сразу можно заметить, что при $\alpha > 0$ система разрешима, и далее рассматривать только случай $\alpha \leqslant 0$.

Учитывая, что $\beta > 0$, при $q \leqslant 0$ с ростом $|q|$ множество решений системы (13) монотонно сжимается. Потому достаточно рассмотреть $q \in [0, 1)$. Можно произвести замену $q = \sqrt{d^2 - p^2}$, $d \in [0, 1)$. При этом с ростом d значения $y^{(1)}_{p,\sqrt{d^2-p^2}}$ и $y^{(2)}_{p,\sqrt{d^2-p^2}}$ убывают, а следовательно, множество решений системы (13) расширяется. Таким образом, достаточно рассмотреть случай $d = 1$, $q = \sqrt{1-p^2}$, отказавшись от первого неравенства в системе. Остается исследовать систему с двумя параметрами $p \in (-1, 1)$ и $\tau \in (0, 1]$:

$$\begin{cases} \dfrac{2\alpha}{\|A\|} + \tau\|A\| - \tau^2\|A\|^2 \int\limits_0^1 (1-s^2) \max\left\{0,\ \dfrac{2\alpha^2}{\|A\|^3} + \tau(s-1),\ y^{(1)}_{p} - \tau s\right\} ds > 0, \\ p - 1 + \tau\|A\| - \tau^2\|A\|^2 \int\limits_0^1 (1-s) \max\left\{0,\ \dfrac{\|A\|-\alpha}{\|A\|^2} + \tau(s-1),\ y^{(2)}_{p} - \tau s\right\} ds > 0, \end{cases}$$

в которой $y^{(k)}_p = y^{(k)}_{p,\sqrt{1-p^2}}$, $k = 1, 2$.

Далее можно заметить, что при $p \leqslant \alpha/\|A\|$ с увеличением значения p множество решений системы расширяется, поэтому есть смысл рассматривать только $p \geqslant \alpha/\|A\|$.

Дальнейшая аналитическая проверка условий затруднена, хотя присутствие в системе всего двух ограниченных параметров p и τ позволяет использовать методы трехмерной визуализации при конкретных заданных значениях α и β.

Кроме того, можно несколько ослабить условия, т. е. построить более простую систему, содержащую все решения исходной. Например, можно положить $y_p^{(2)} = 0$ или под знаками интегралов взять вместо τ единицу (в этом случае получим два выпуклых квадратных неравенства относительно τ, такую систему можно легко свести к системе из двух неравенств, содержащей только параметр p).

Наиболее простые условия будем иметь, если положим $y_p^{(1)} = 0$. Тогда система сведется к одному неравенству с одним параметром τ:

$$\frac{2\alpha}{\|A\|} + \tau\|A\| - \tau^2\|A\|^2 \int\limits_0^1 (1 - s^2) \max\left\{0,\ \frac{2\alpha^2}{\|A\|^3} + \tau(s-1)\right\} ds > 0.$$

Проверка этого условия не представляет сложности, так как, если вычислить интеграл явно, задача сведется к паре полиномиальных неравенств не выше третьей степени (одно для случая $\tau > 2\alpha^2/\|A\|^3$, а другое для случая $\tau \leqslant 2\alpha^2/\|A\|^3$).

В частности, при $\beta = 0.5$ параметр α такой, что матрица

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

решает обобщенную задачу Мышкиса для системы (12), может быть выбран из отрезка $[-2.649, -0.134]$.

Полученный результат можно сравнить, например, с теоремой о равномерной экспоненциальной устойчивости из работы [15], где изучается скалярное уравнение с комплексным параметром. При $\beta = 0.5$ представленное там условие принимает вид $\alpha \in [-1.866, -0.134]$. Отметим, что при постоянном запаздывании, равном 1, система (12) устойчива при $\alpha \in [-4.221, -0.131]$.

8. Заключение. Представлены достаточные условия разрешимости обобщенной задачи Мышкиса для системы с распределенным запаздыванием. Условия выражены в терминах пустоты множества решений некоторой системы неравенств. Для двух частных случаев произведена проверка этих условий.

В дальнейшем хотелось бы улучшить результат, так как, например, для скалярного уравнения полученная оценка области разрешимости обобщенной задачи Мышкиса достаточно далека от точной, тогда как для систем с сосредоточенным запаздыванием, которые были рассмотрены ранее, оценки близки, а в некоторых случаях даже совпадают. Другая проблема, которую предстоит решить, — автоматизация проверки найденных условий. Опять же, для систем с сосредоточенным запаздыванием удалось свести задачу к набору задач выпуклого программирования, а для системы с распределенным запаздыванием — пока нет.

Литература

1. *Мышкис А. Д.* О решениях линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка устойчивого типа с запаздывающим аргументом // Математический сборник. 1951. Вып. 28. № 3. С. 641–658.

2. *Yorke J. A.* Asymptotic stability for one dimensional differential-delay equations // Journal of Differential Equations. 1970. Vol. 7. P. 189–202.

3. *Yoneyama T.* The 3/2 stability theorem for one-dimensional delay-differential equations with unbounded delay // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1992. Vol. 165. P. 133–143.

4. *Amemiya T.* On the delay-independent stability of a delayed differential equation of 1^{st} order // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1989. Vol. 142. P. 13–25.

5. *Малыгина В. В.* Об устойчивости решений некоторых линейных дифференциальных уравнений с последействием // Известия высших учебных заведений. Математика. 1993. Вып. 5. С. 72–85.

6. *Krisztin T.* On stability properties for one-dimensional functional differential equations // Funkcialaj Ekvacioj. 1991. Vol. 34. P. 241–256.

7. *Малыгина В. В.* О точных границах области устойчивости линейных дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием // Известия высших учебных заведений. Математика. 2008. Вып. 52. № 7. С. 15–23.

8. *Egorov A.* On the stability analysis of equations with bounded time-varying delay // 15^{th} IFAC Workshop on Time Delay Systems. Sinaia, Romania, 2019. P. 85–90.

9. *Egorov A.* The generalized Myshkis problem for a linear time-delay system with time-varying delay // Stability and Control Processes (SCP 2020), Lecture Notes in Control and Information Sciences — Proceedings / eds.: N. Smirnov, A. Golovkina. Cham, Switzerland: Springer, 2022. P. 223–231.

10. *Egorov A.* Robust stability analysis of time-varying delay systems // 17^{th} IFAC Workshop on Time Delay Systems. Montreal, Canada, 2022. P. 210–215.

11. *Fridman E.* An improved stabilization method for linear time-delay systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 2002. Vol. 47. N 11. P. 1931–1937.

12. *Wu M., He Y., She J.-H., Liu G.-P.* Delay-dependent criteria for robust stability of time-varying delay systems // Automatica. 2004. Vol. 40. P. 1435–1439.

13. *Zhang C.-K., He Y., Jiang L., Wu M., Zeng H.-B.* Stability analysis of systems with time-varying delay via relaxed integral inequalities // Systems & Control Letters. 2016. Vol. 92. P. 52–61.

14. *Kolmanovskii V., Myshkis A.* Introduction to the theory and applications of functional differential equations. Dordrecht, Netherlands: Springer Science + Business Media, 1999. 648 p.

15. *Сабатулина Т. Л.* Об экспоненциальной устойчивости дифференциального уравнения с комплексным коэффициентом и переменным распределенным запаздыванием // Теория управления и математическое моделирование. Ижевск, 2022. С. 119–121.

Статья поступила в редакцию 20 марта 2023 г.
Статья принята к печати 25 апреля 2023 г.

Контактная информация:

Егоров Алексей Валерьевич — канд. физ.-мат. наук, доц.; alexey.egorov@spbu.ru

Razumikhin approach in the generalized Myshkis problem for systems with distributed delay*

A. V. Egorov

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg,
199034, Russian Federation

For citation: Egorov A. V. Razumikhin approach in the generalized Myshkis problem for systems with distributed delay. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2023, vol. 19, iss. 2, pp. 148–161.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.202 (In Russian)

The paper gives sufficient conditions for the solvability of the generalized Myshkis problem for a system of equations with a distributed time-varying delay and a constant kernel. Conditions on the kernel which guarantee the uniform stability of the system for any admissible delay are obtained. The admissible delay in this paper is a piecewise continuous function bounded from above in magnitude and growth rate. The applicability of the obtained conditions is illustrated by two examples.

Keywords: time-delay system, stability, distributed delay, generalized Myshkis problem, Razumikhin approach.

* This research was supported by the Russian Science Foundation (project N 21-71-00052).

References

1. Myshkis A. D. O resheniiakh lineinykh odnorodnykh differentsial'nykh uravnenii pervogo poriadka ustoichivogo tipa s zapazdyvaiushchim argumentom [On solutions of linear homogeneous differential equations of the first order of stable type with a retarded argument]. *Matematicheskii sbornik* [*Mathematical Collection*], 1951, iss. 28, no. 3, pp. 641–658. (In Russian)

2. Yorke J. A. Asymptotic stability for one dimensional differential-delay equations. *Journal of Differential Equations*, 1970, vol. 7, pp. 189–202.

3. Yoneyama T. The 3/2 stability theorem for one-dimensional delay-differential equations with unbounded delay. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1992, vol. 165, pp. 133–143.

4. Amemiya T. On the delay-independent stability of a delayed differential equation of 1st order. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1989, vol. 142, pp. 13–25.

5. Malygina V. V. Ob ustoichivosti reshenii nekotorykh lineinykh differentsial'nykh uravnenii s posledeistviem [On stability of solutions of some linear differential equations with aftereffect]. *Izvestiia vysshikh uchebnykh zavedenii. Matematika* [*Russian Mathematics*], 1993, iss. 5, pp. 72–85. (In Russian)

6. Krisztin T. On stability properties for one-dimensional functional differential equations. *Funkcialaj Ekvacioj*, 1991, vol. 34, pp. 241–256.

7. Malygina V. V. O tochnykh granitsakh oblasti ustoichivosti lineinykh differentsial'nykh uravnenii s raspredelennym zapazdyvaniem [On the exact boundaries of the stability domain of linear differential equations with distributed delay]. *Izvestiia vysshikh uchebnykh zavedenii. Matematika* [*Russian Mathematics*], 2008, iss. 52, no. 7, pp. 15–23. (In Russian)

8. Egorov A. On the stability analysis of equations with bounded time-varying delay. *15th IFAC Workshop on Time Delay Systems*. Sinaia, Romania, 2019, pp. 85–90.

9. Egorov A. The generalized Myshkis problem for a linear time-delay system with time-varying delay. *Stability and Control Processes (SCP 2020), Lecture Notes in Control and Information Sciences — Proceedings*. Eds N. Smirnov, A. Golovkina. Cham, Switzerland, Springer Publ., 2022, pp. 223–231.

10. Egorov A. Robust stability analysis of time-varying delay systems. *17th IFAC Workshop on Time Delay Systems*. Montreal, Canada, 2022, pp. 210–215.

11. Fridman E. An improved stabilization method for linear time-delay systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, vol. 47, no. 11, pp. 1931–1937.

12. Wu M., He Y., She J.-H., Liu G.-P. Delay-dependent criteria for robust stability of time-varying delay systems. *Automatica*, 2004, vol. 40, pp. 1435–1439.

13. Zhang C.-K., He Y., Jiang L., Wu M., Zeng H.-B. Stability analysis of systems with time-varying delay via relaxed integral inequalities. *Systems & Control Letters*, 2016, vol. 92, pp. 52–61.

14. Kolmanovskii V., Myshkis A. *Introduction to the theory and applications of functional differential equations*. Dordrecht, Netherlands, Springer Science + Business Media Publ., 1999, 648 p.

15. Sabatulina T. L. Ob eksponentsial'noi ustoichivosti differentsial'nogo uravneniia s kompleksnym koeffitsientom i peremennym raspredelennym zapazdyvaniem [On the exponential stability of a differential equation with complex coefficient and time-varying distributed delay]. *Teoriia upravleniia i matematicheskoe modelirovanie* [*Theory of management and mathematical modeling*]. Izhevsk, 2022, pp. 119–121. (In Russian)

Received: March 20, 2023.
Accepted: April 25, 2023.

Author's information:

Alexey V. Egorov — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor; alexey.egorov@spbu.ru