ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 517.972.5
MSC 65K10

Метод поиска оптимальной по стоимости траектории дороги на поверхности местности*

М. Э. Аббасов[1,2], *А. С. Шарлай*[1,3]

[1] Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9
[2] Институт проблем машиноведения Российской академии наук, Российская Федерация, 199178, Санкт-Петербург, Большой проспект В. О., 61
[3] Военный институт (железнодорожных войск и военных сообщений) Военной академии материально-технического обеспечения имени генерала армии А. В. Хрулёва, Российская Федерация, 198504, Санкт-Петербург, Петергоф, ул. Суворовская, 1

Для цитирования: *Аббасов М. Э., Шарлай А. С.* Метод поиска оптимальной по стоимости траектории дороги на поверхности местности // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2023. Т. 19. Вып. 2. С. 139–147. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.201

Исследуется метод поиска оптимальной по стоимости строительства траектории дороги, соединяющей две точки на заданном рельефе местности. Рассматриваются ситуации, когда стоимость доставки материалов является постоянной величиной, а также приводится более общая постановка задачи, при которой стоимость доставки зависит от координаты точки. В каждом случае строится интегральный функционал стоимости, аргументом в котором выступает функция, описывающая траекторию пути. Для нахождения приближенного решения используется метод Ритца. Это решение задается аналитически, в виде тригонометрического полинома, что повышает удобство обработки и дальнейшего изучения полученных результатов по сравнению с численным решением необходимых условий экстремума исследуемого функционала. Также обсуждаются вопросы сходимости, приводятся иллюстративные примеры.

Ключевые слова: вариационное исчисление, оптимизация, метод Ритца, тригонометрический полином.

1. Введение. В работе [1] рассмотрена задача поиска оптимальной в смысле затрат на строительство траектории дороги, соединяющей две заданные точки. Предложенный подход использует вариационные идеи. Он приводит к интегродиффе-

* Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00027, https://rscf.ru/project/23-21-00027/

ренциальному уравнению, представляющему собой условие минимума функционала стоимости. Этому уравнению с необходимостью удовлетворяет дважды непрерывно дифференцируемая оптимальная траектория. Для решения данного уравнения в [1] использовался численный метод, базирующийся на аппроксимации искомой функции и ее производных алгебраическими полиномами. Из-за увеличения вычислительной погрешности с ростом степени полинома [2] такой подход становится практически неприменимым для поиска решения с высокой степенью точности. В настоящей работе для нахождения минимума функционала стоимости рассматривается метод Ритца [3] и показывается, как с его помощью может быть решена задача в более общей постановке.

Работа имеет следующую структуру. В п. 2 приводится математическая постановка задачи. В п. 3 обсуждается применение метода Ритца к рассматриваемой задаче, выводится система для нахождения коэффициентов разложения, обсуждаются вопросы сходимости, описывается более общая постановка задачи и дается метод ее решения. В п. 4 представлены численные примеры. Заключительные выводы сделаны в п. 5.

2. Постановка задачи и вспомогательные сведения. Пусть необходимо связать дорогой два заданных пункта так, чтобы стоимость ее строительства с учетом рельефа местности была наименьшей. Без ограничения общности считается, что начальная точка находится в начале координат, а конечная имеет координаты $(l, 0)$. Предполагается, что величина количества материалов, требующихся для строительства единицы длины пути, является постоянной, а их доставка к текущей точке строительства осуществляется из начального пункта по уже готовому участку дороги. Вводятся следующие обозначения: $\beta(x, y)$ — функция с непрерывными частными производными, которая показывает цену укладки единицы длины пути в точке (x, y), $\alpha = \mathrm{const}$ — цена доставки, приходящейся на единицу длины пути (от начальной точки), объема строительных материалов, необходимых для укладки единицы длины дороги.

Пусть $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям

$$y(0) = y(l) = 0.$$

Любую такую кривую будем называть допустимой. Стоимость строительства пути, определяемого функцией $y(x)$, выражается с помощью интегрального функционала

$$I(y) = \int\limits_0^l \alpha\sqrt{1 + y'^2(x)} \int\limits_0^x \sqrt{1 + y'^2(\xi)}\, d\xi\, dx + \int\limits_0^l \beta(x, y)\sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx, \tag{1}$$

который можно упростить с помощью следующей леммы.

Лемма. *Для произвольной функции $f(x) \in C[0, l]$ справедливо равенство*

$$\int\limits_0^l f(x) \int\limits_0^x f(\xi)\, d\xi\, dx = \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^l f(x)\, dx\right)^2.$$

Таким образом, функционал (1) может быть записан в виде

$$I(y) = \frac{\alpha}{2}\left(\int\limits_0^l \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx\right)^2 + \int\limits_0^l \beta(x, y)\sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx. \tag{2}$$

В предположении, что существует дважды непрерывно дифференцируемая допустимая кривая $y_*(x)$, доставляющая минимум функционалу (2), может быть получено [4–7] необходимое условие минимума.

Теорема. *Для того чтобы допустимая кривая* $y_*(x) \in C^2[0,l]$ *доставляла минимум функционалу* (2), *необходимо, чтобы она удовлетворяла равенству*

$$\frac{y_*''(x)}{1+{y_*'}^2(x)}\left(\alpha\int\limits_0^l\sqrt{1+{y_*'}^2(x)}\,dx+\beta(x,y_*(x))\right)+ \\ +y_*'(x)\frac{\partial\beta(x,y_*(x))}{\partial x}-\frac{\partial\beta(x,y_*(x))}{\partial y}=0. \tag{3}$$

В [1] был предложен численный метод решения интегродифференциального уравнения (3), основанный на полиномиальной аппроксимации вторых производных искомой функции. В данной работе рассматривается иной подход, не требующий решения уравнения (3).

3. Построение приближенного решения. Коротко приведем вначале идею метода Ритца в общем виде [3], а далее конкретизируем ее для исследуемой задачи.

Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$I(y)=\int\limits_0^l F(x,y,y')\,dx,$$

где F — непрерывная функция своих аргументов, а $y\in C^1[0,l]$ при условии

$$y(0)=y(l)=0. \tag{4}$$

Пусть

$$\phi(x,a_1,\dots,a_n),\quad n=1,2,\dots, \tag{5}$$

последовательность n-параметрических семейств функций, каждое из которых шире предыдущего за счет добавления дополнительного параметра, и при всех значениях параметров выполнены условия (4). Для каждого семейства можно поставить задачу минимизации функции n аргументов

$$I(a_1,\dots,a_n)=\int\limits_0^l F(x,\phi(x,a_1,\dots,a_n),\phi'(x,a_1,\dots,a_n))\,dx, \tag{6}$$

которая сводится к решению системы уравнений

$$\frac{\partial I}{\partial a_i}=0,\quad i=1,\dots,n. \tag{7}$$

Обозначим $\overline{a}_1,\dots,\overline{a}_n$ оптимальный набор параметров, а $\overline{y}_n=\phi(x,\overline{a}_1,\dots,\overline{a}_n)$ — соответствующую функцию семейства. В силу расширения класса допустимых функций с ростом n последовательность $\{I(\overline{y}_n)\}_{n=1}^{\infty}$ является монотонно убывающей:

$$I(\overline{y}_1)\geqslant I(\overline{y}_2)\geqslant\dots\ .$$

Если множество функций, образующих рассматриваемую систему семейств (5), является плотным в множестве функций из $C^1[0,l]$, для которых выполнены условия (4) (см. [2, 8]), то получим, что

$$\lim_{n\to\infty} I(a_n) = I(y^*), \tag{8}$$

где y^* — функция, доставляющая минимум функционалу I. Действительно, пусть любую непрерывно дифференцируемую функцию y, определенную на $[0,l]$ и обращающуюся в нуль на концах этого отрезка, можно сколь угодно точно аппроксимировать в норме пространства $C^1[0,l]$ функцией, принадлежащей одному из семейств. Тогда для любого $\delta > 0$ можно подобрать n и $y_n^* = \phi(x, a_1^*, \ldots, a_n^*)$ так, чтобы было справедливо неравенство

$$\|y^* - y_n^*\|_{C^1[0,l]} \leqslant \delta.$$

Вследствие непрерывности F для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что при

$$\|y^* - y_n^*\|_{C^1[0,l]} \leqslant \delta$$

выполняется неравенство

$$I(y_n^*) - I(y^*) \leqslant \varepsilon.$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ верна цепочка неравенств

$$I(y^*) \leqslant I(\overline{y}_n) \leqslant I(y_n^*) \leqslant I(y^*) + \varepsilon,$$

откуда в силу произвольности выбора ε следует (8).

Опираясь на теорему Вейерштрасса об аппроксимации тригонометрическим многочленом, можно показать, что требуемому свойству плотности, а также граничным условиям (4) будет удовлетворять, в частности, система

$$\phi(x, a_1, \ldots, a_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k \sin \frac{\pi k}{l} x, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Пусть n — фиксированное число. Введем обозначение для вектора коэффициентов $a = (a_1, \ldots, a_n)^T$, а также производных функции ϕ:

$$\phi_x(x,a) = \frac{\partial \phi(x,a)}{\partial x} = \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\pi k}{l} \cos \frac{\pi k}{l} x,$$

$$\phi_{a_k}(x,a) = \frac{\partial \phi(x,a)}{\partial a_k} = \sin \frac{\pi k}{l} x, \quad \phi_{x a_k}(x,a) = \frac{\partial^2 \phi(x,a)}{\partial x \partial a_k} = \frac{\pi k}{l} \cos \frac{\pi k}{l} x, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Функционал (6) для выбранной системы функций запишется следующим образом:

$$I(a) = \frac{\alpha}{2} \left(\int_0^l \sqrt{1 + \phi_x^2(x,a)}\, dx \right)^2 + \int_0^l \beta(x, \phi(x,a)) \sqrt{1 + \phi_x^2(x,a)}\, dx,$$

а условия экстремума (7) сведутся к системе нелинейных алгебраических уравнений относительно $a_1, \dots, a_n$

$$\frac{\partial I(a)}{\partial a_k} = \alpha \left(\int\limits_0^l \sqrt{1+\phi_x^2(x,a)}\,dx \right) \int\limits_0^l \frac{\phi_{xa_k}(x,a)\phi_x(x,a)}{\sqrt{1+\phi_x^2(x,a)}}\,dx + \\ + \int\limits_0^l \frac{\partial \beta(x,\phi(x,a))}{\partial y} \phi_{xa_k}(x,a)\sqrt{1+\phi_x^2(x,a)}\,dx + \\ + \int\limits_0^l \beta(x,\phi(x,a)) \frac{\phi_{xa_k}(x,a)\phi_x(x,a)}{\sqrt{1+\phi_x^2(x,a)}}\,dx = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Найдя решение $\overline{a} = (\overline{a}_1, \dots, \overline{a}_n)^T$ этой системы, получим приближенное решение $\phi_x(x, \overline{a})$ исходной задачи.

Рассматриваемый подход позволяет находить приближенное решение и для задачи, сформулированной в более общем виде, а именно для ситуации, когда цена доставки α не является постоянной, а изменяется от точки к точке в силу различных условий строительства. Например, на твердых грунтах для прокладки дороги может потребоваться меньшее количество материалов, чем на болотистой местности. В этом случае для выбранной системы функций интегральный функционал стоимости будет иметь вид

$$I(a) = \int\limits_0^l \alpha(x,\phi(x,a))\sqrt{1+\phi_x^2(x,a)} \int\limits_0^x \sqrt{1+\phi_\xi^2(\xi,a)}\,d\xi\,dx + \\ + \int\limits_0^l \beta(x,\phi(x,a))\sqrt{1+\phi_x^2(x,a)}\,dx,$$

что приводит к следующей системе нелинейных алгебраических уравнений для поиска $a_1, \dots, a_n$:

$$\frac{\partial I(a)}{\partial a_k} = \int\limits_0^l \frac{\partial \alpha(x,\phi(x,a))}{\partial y} \phi_{xa_k}(x,a)\sqrt{1+\phi_x^2(x,a)} \int\limits_0^x \sqrt{1+\phi_\xi^2(\xi,a)}\,d\xi\,dx + \\ + \int\limits_0^l \alpha(x,\phi(x,a)) \frac{\phi_{xa_k}(x,a)\phi_x(x,a)}{\sqrt{1+\phi_x^2(x,a)}} \int\limits_0^x \sqrt{1+\phi_\xi^2(\xi,a)}\,d\xi\,dx + \\ + \int\limits_0^l \alpha(x,\phi(x,a))\sqrt{1+\phi_x^2(x,a)} \int\limits_0^x \frac{\phi_{\xi a_k}(\xi,a)\phi_\xi(\xi,a)}{\sqrt{1+\phi_\xi^2(\xi,a)}}\,d\xi\,dx + \\ + \int\limits_0^l \frac{\partial \beta(x,\phi(x,a))}{\partial y} \phi_{xa_k}(x,a)\sqrt{1+\phi_x^2(x,a)}\,dx + \\ + \int\limits_0^l \beta(x,\phi(x,a)) \frac{\phi_{xa_k}(x,a)\phi_x(x,a)}{\sqrt{1+\phi_x^2(x,a)}}\,dx = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Заметим наконец, что при ненулевых граничных условиях можно рассмотреть систему функций

$$\phi(x, a_1, \ldots, a_n) = y(0) + \frac{y(l) - y(0)}{l} x + \sum_{k=1}^{n} a_k \sin \frac{\pi k}{l} x, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{9}$$

В этом случае в приведенных выше рассуждениях изменится лишь выражение для $\phi_x(x, a)$:

$$\phi_x(x, a) = \frac{y(l) - y(0)}{l} + \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\pi k}{l} \cos \frac{\pi k}{l} x,$$

остальное же останется без изменений.

Отметим, что метод Ритца является мощным инструментом решения прикладных задач, который используется множеством исследователей [9–12].

4. Примеры и численная реализация.

Пример 1. Рассмотрим задачу, в которой $\alpha = 0.1$, $l = 1$, $\beta(x, y) = 1 + \sin 5x \cdot \sin y$, а граничные условия имеют вид $y(0) = 0$, $y(l) = 1$. Для удобства восприятия результатов будем считать, что функция $\beta(x, y)$ определяет поверхность местности, т. е. стоимость укладки дорожного покрытия прямо пропорциональна высоте точки над плоскостью Oxy. Используя математический пакет MatLab, при $n = 5$ были получены следующие результаты: $\overline{a} = (-0.31397, 0.07367, -0.03138, 0.01212, -0.00396)^T$. На найденном приближенном решении, которое задается в виде (9), имеем $I(a) = 1.279$. Применение алгоритма, описанного в [1] и основанного на аппроксимации искомой кривой алгебраическим полиномом степени m, для $m = 25$ приводит к решению, на котором функционал равен 1.325. На рис. 1 на поверхности $z = \beta(x, y)$ белым цветом выделена траектория, построенная с помощью метода Ритца ($n = 5$), черным — решение, полученное алгоритмом из [1] ($m = 25$).

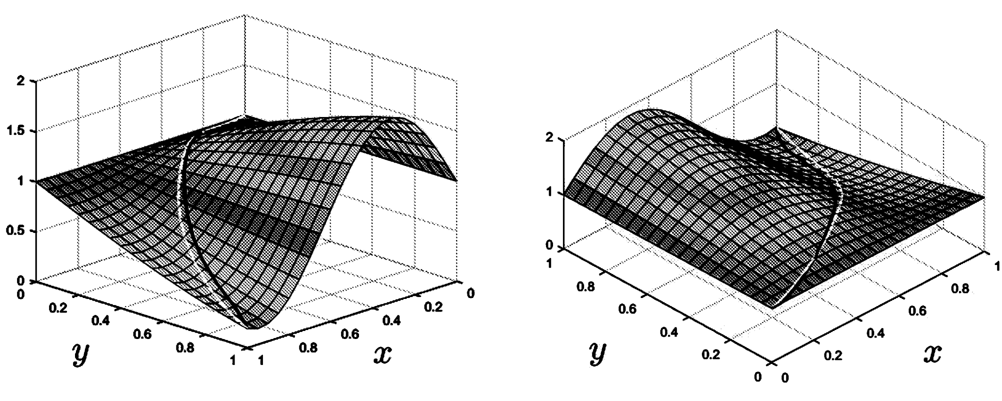

Рис. 1. Вид из конечной (слева) и начальной (справа) точек на полученные траектории

Пример 2. Пусть $l = 1$, $\alpha(x, y) = \cos^2 5x \cdot \cos^2 y$, $\beta(x, y) = 1 + \sin 5x \cdot \sin y$, граничные условия имеют вид $y(0) = 0$, $y(l) = 1$.

Используя математический пакет MatLab, при $n = 5$ получаем следующие результаты: $\overline{a} = (-0.32611, 0.11689, -0.0671, 0.03071, -0.01276)^T$. На найденном приближенном решении, которое задается в виде (9), имеем $I(a) = 1.44536$. Построенное решение показано на рис. 2.

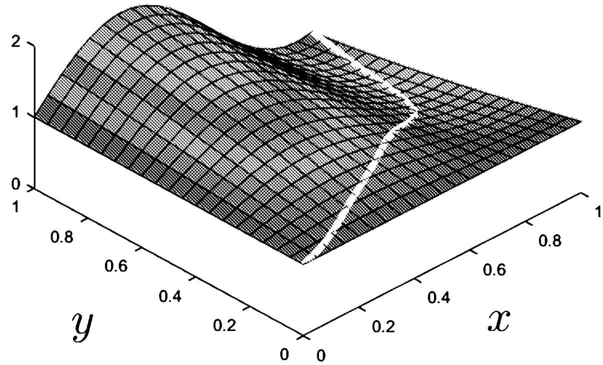

Рис. 2. Решение в примере 2, изображенное на поверхности $z = \beta(x, y)$

5. Заключение. В работе предложен приближенный метод поиска оптимальной по стоимости строительства траектории дороги. Предполагается, что цена доставки за единицу длины пути объема строительных материалов, необходимых для укладки единицы длины дороги, является величиной постоянной, а цена укладки единицы длины пути задана функцией $\beta(x, y)$, имеющей непрерывные частные производные.

Рассмотренный подход к решению задачи позволяет получать результат в виде тригонометрического полинома, который при уже относительно небольшом количестве слагаемых (в примере 1 их было 5) дает результаты лучше, чем решение (см. [1]), основанное на аппроксимации искомой функции алгебраическим полиномом высокой степени (в примере 1 данная степень равнялась 25). При этом сходимость предложенного алгоритма вытекает из сходимости метода Ритца.

Литература

1. *Аббасов М. Э., Шарлай А. С.* Метод получения оптимальной по стоимости строительства траектории дороги на рельефе местности // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2021. Т. 17. Вып. 1. С. 4–12. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.101

2. *Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М.* Численные методы. М.: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2008. 636 с.

3. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. Л.: Физматиз, 1962. 708 с.

4. *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. 424 с.

5. *Люстерник Л. А., Лаврентьев М. А.* Курс вариационного исчисления. М.: Гос. объед. науч.-технич. изд-во, 1938. 192 с.

6. *Mordukhovich B. S.* Variational analysis and generalized differentiation II. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2006. 610 p.

7. *Rindler F.* Calculus of variations. Switzerland; Cham: Springer International Publishing, 2018. 444 p.

8. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980. 495 с.

9. *Nemat A., Yousefi S. A.* A numerical method for solving fractional optimal control problems using Ritz method // ASME. J. Comput. Nonlinear Dynam. 2016. Vol. 11(5). N 051015.

10. *Ali A. M., Jasim M. H., Al-Kasob B. D. H.* Low velocity impact study of a sandwich beams using Ritz method and finite element modelling // Journal of Engineering, Design and Technology. 2022. https://doi.org/10.1108/JEDT-10-2021-0584

11. *Lytvyn O. M., Lytvyn O. O., Tomanova I. S.* Solving the biharmonic plate bending problem by the Ritz method using explicit formulas for splines of degree 5 // Cybern Syst. Anal. 2018. Vol. 54. P. 944–947.

12. *Xue J., Wang Y.* Free vibration analysis of a flat stiffened plate with side crack through the Ritz method // Arch. Appl. Mech. 2019. Vol. 89. P. 2089–2102.

Статья поступила в редакцию 22 ноября 2022 г.
Статья принята к печати 25 апреля 2023 г.

Контактная информация:

Аббасов Меджид Эльхан оглы — д-р физ.-мат. наук, доц.; m.abbasov@spbu.ru

Шарлай Артем Сергеевич — sharlayar@mail.ru

Method for finding the cost-optimal road trajectory on the surface of the terrain*

M. E. Abbasov[1,2], *A. S. Sharlay*[1,3]

[1] St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation
[2] Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences, 61, Bolshoy pr. V.O., St. Petersburg, 199178, Russian Federation
[3] Military Academy of Logistics (VAMTO named after A. V. Hrulev), 1, Suvorovskaya ul., Peterhof, St. Petersburg, 198504, Russian Federation

For citation: Abbasov M. E., Sharlay A. S. Method for finding the cost-optimal road trajectory on the surface of the terrain. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2023, vol. 19, iss. 2, pp. 139–147.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.201 (In Russian)

The paper studies a method for finding the cost-optimal trajectory of a road connecting two points on a given terrain. Situations are considered when the cost of delivery of materials is a constant value, as well as a more general formulation of the problem, in which the cost of delivery depends on the coordinate of a point. In each case, an integral functional is constructed cost, the argument in which is a function that describes the trajectory of the path. The Ritz method is used to find an approximate solution. It is set analytically, in the form of a trigonometric polynomial, which increases the convenience of processing and further research of the results obtained in comparison with the numerical solution of the necessary conditions for the extremum of the investigated functional. The paper also discusses the problem of convergence. Illustrative examples are given.

Keywords: calculus of variations, optimization, Ritz method, trigonometric polynomial.

References

1. Abbasov M. E., Sharlay A. S. Metod polucheniia optimal'noi po stoimosti stroitel'stva traektorii dorogi na rel'efe mestnosti [Searching for the cost-optimal road trajectory on the relief of the terrain]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2021, vol. 17, iss. 1, pp. 4–12. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.101 (In Russian)

2. Bahvalov N. S, Zhidkov N. P., Kobelkov G. M. *Chislennye metody* [*Numerical methods*]. Moscow, BINOM, Laboratoriia znanii Publ., 2008, 636 p. (In Russian)

3. Kantorovich L. V., Krylov V. I. *Priblizhennye metody vysshego analiza* [*Approximate methods of higher analysis*]. Leningrad, Fizmatiz Publ., 1962, 708 p. (In Russian)

4. Elsgolc L. E. *Differentsial'nye uravneniia i variatsionnoe ischislenie* [*Differential equations and calculus of variations*]. Moscow, Nauka Publ., 1969, 424 p. (In Russian)

5. Lyusternik L. A., Lavrentev M. A. *Kurs variatsionnogo ischisleniia* [*Course of calculus of variations*]. Moscow, State United Scientific and Technical Publishing House, 1938, 192 p. (In Russian)

* This research was supported by the Russian Science Foundation, project N 23-21-00027; https://rscf.ru/project/23-21-00027/

6. Mordukhovich B. S. *Variational analysis and generalized differentiation II.* Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag Publ., 2006, 610 p.

7. Rindler F. *Calculus of variations.* Switzerland; Cham, Springer International Publ., 2018, 444 p.

8. Trenogin V. A. *Funktsional'nyi analiz* [*Functional analysis*]. Moscow, Nauka Publ., 1980, 495 p. (In Russian)

9. Nemat A., Yousefi S. A. A numerical method for solving fractional optimal control problems using Ritz method. *ASME. J. Comput. Nonlinear Dynam.*, 2016, vol. 11(5), no. 051015.

10. Ali A. M., Jasim M. H., Al-Kasob B. D. H. Low velocity impact study of a sandwich beams using Ritz method and finite element modelling. *Journal of Engineering, Design and Technology*, 2022. https://doi.org/10.1108/JEDT-10-2021-0584

11. Lytvyn O. M., Lytvyn O. O., Tomanova I. S. Solving the biharmonic plate bending problem by the Ritz method using explicit formulas for splines of degree 5. *Cybern Syst. Anal.*, 2018, vol. 54, pp. 944–947.

12. Xue J., Wang Y. Free vibration analysis of a flat stiffened plate with side crack through the Ritz method. *Arch. Appl. Mech.*, 2019, vol. 89, pp. 2089–2102.

Received: November 22, 2022.
Accepted: April 25, 2023.

Authors' information:

Majid E. Abbasov — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Associate Professor; m.abbasov@spbu.ru

Artyom S. Sharlay — sharlayar@mail.ru