УДК 517.977.1 Вестник СПбГУ. Прикладная математика. Информатика... 2023. Т. 19. Вып. 1
MSC 49M

Метод решения задачи оптимального управления в форме Майера с квазидифференцируемым функционалом при наличии фазовых ограничений*

А. В. Фоминых, В. В. Карелин, Л. Н. Полякова

Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация,
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Фоминых А. В., Карелин В. В., Полякова Л. Н.* Метод решения задачи оптимального управления в форме Майера с квазидифференцируемым функционалом при наличии фазовых ограничений // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2023. Т. 19. Вып. 1. С. 120–134.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.110

Рассматривается задача оптимального управления объектом, описываемым системой обыкновенных дифференциальных уравнений с непрерывно дифференцируемой правой частью и негладким (а лишь квазидифференцируемым) функционалом качества. Изучается задача в форме Майера как со свободным, так и с частично закрепленным правым концом. Допустимыми считаются кусочно-непрерывные и ограниченные управления, лежащие в каждый момент времени в некотором параллелепипеде. На фазовые координаты и управления также накладываются смешанные поточечные ограничения. Учет фазовых ограничений происходит за счет введения в систему новых переменных с известными краевыми условиями. Производятся стандартные дискретизация исходной системы и параметризация управления, приводятся теоремы о сходимости решения полученной дискретной системы к искомому решению непрерывной задачи. Для исследования такой дискретной системы применяются аппарат квазидифференциального исчисления и метод квазидифференциального спуска. Приведены примеры, иллюстрирующие работу алгоритма.

Ключевые слова: оптимальное управление, задача Майера, негладкая оптимизация, квазидифференциал, фазовые ограничения.

1. Введение. Задачам оптимального управления при наличии фазовых ограничений посвящено большое количество публикаций (см., например, [1–8]). Однако, как правило, в литературе рассматриваются задачи, в которых целевой функционал является непрерывно дифференцируемой функцией. Это условие используется либо непосредственно, для вычисления градиента целевой функции по управлению, либо косвенно — для обоснования того или иного численного метода. В литературе изучались и случаи негладкого целевого функционала [9–12]. Но в основном методы этих статей заключались либо в приеме «сглаживания», либо применялись достаточно сложные в реализации вычислительные техники.

В настоящей статье минимизируемый функционал предполагается негладким, а лишь квазидифференцируемым. Квазидифференциал является удобным инструментом недифференцируемой оптимизации. Для него разработано богатое исчисление [13], в терминах квазидифференциала формулируются условия экстремума в конструктивной форме, позволяющей построить численный метод решения задач неглад-

* Основные результаты статьи (п. 3–6) получены А. В. Фоминых, работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 21-71-00021).

кого анализа. Класс квазидифференцируемых функций достаточно широк, в частности к нему относятся все функции, представляющие собой суперпозицию конечного числа максимумов и минимумов непрерывно дифференцируемых функций.

Для решения поставленной задачи используется комбинация метода параметризации управления [14] и аппарата квазидифференциального исчисления. Для снятия фазовых ограничений применяется идея введения дополнительных переменных, которые должны удовлетворять системе дифференциальных уравнений специального вида. Эта техника неоднократно описывалась в литературе [1, 15]. Различные негладкие задачи вариационного исчисления и оптимального управления решались в научной школе В. Ф. Демьянова (см., например, статьи [16–19]).

2. Постановка задачи. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \tag{1}$$

с начальным условием

$$x(0) = x_0. \tag{2}$$

В формуле (1) $f(x, u, t)$ — заданная n-мерная вектор-функция, $t \in [0, T]$, $T > 0$ — заданный конечный момент времени, $x(t)$ — n-мерная непрерывная вектор-функция фазовых координат, является кусочно непрерывно дифференцируемой с ограниченной на своей области определения $[0, T]$ производной, $u(t)$ — m-мерная вектор-функция управлений, которая предполагается кусочно непрерывной и ограниченной на $[0, T]$. Вектор-функция $f(x, u, t)$ и ее частные производные $\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial x}$ и $\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u}$ считаются непрерывными по совокупности переменных. Заметим, что на самом деле можно принять, что эти функции $\left(f(x, u, t), \frac{\partial f(x,u,t)}{\partial x} \text{ и } \frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u}\right)$ лишь кусочно-непрерывны по $t \in [0, T]$ и ограничены при каждой фиксированной паре переменных (x, u) (см. пример 1). В формуле (2) $x_0 \in R^n$ — заданный вектор.

Наложим на правые части рассматриваемой системы стандартное для теории оптимального управления условие роста [20]: существует такое число C, что для всех $(x, u, t) \in R^n \times U \times [0, T]$ (множество управлений U вводится ниже) выполняется неравенство $||f(x, u, t)|| \leqslant C(1 + ||x||)$. Заметим, что данное условие можно заменить на предположение равномерной (по управлению $u \in U$) ограниченности решений системы (1), (2) (предполагая, что для каждого допустимого управления существует единственное решение (1), (2)). Это следует из доказательства соответствующих необходимых результатов в [1, 14].

Примем, что некоторые координаты объекта системы (1), (2) в конечный момент времени фиксированы, т. е. наложим дополнительное ограничение

$$x_i(T) = x_{T_i}, \quad i \in J_T \subset \{1, \ldots, n\}, \tag{3}$$

где числа x_{T_i}, $i = \overline{1, n_T}$, заданы и $n_T = |J_T|$. При этом индексное множество J_T может быть пустым (в таком случае имеем задачу со свободным правым концом).

Примем в статье следующие обозначения: $C_n[0, T]$ означает пространство непрерывных на $[0, T]$ n-мерных вектор-функций; $P_n[0, T]$ — пространство кусочно-непрерывных и ограниченных на $[0, T]$ n-мерных вектор-функций. Обозначим $\mathrm{co}P$ выпуклую оболочку множества P, а через $\mathrm{int}\,P$ — множество его внутренних точек. Наконец, $o(\alpha)$ таково, что $o(\alpha)/\alpha \to 0,\ \alpha \to 0$. Пусть P, Q — некоторые подмножества конечномерного пространства, $\mu \in R$, тогда под $P + Q$, μP будем понимать сумму множеств и умножение множества на число по Минковскому соответственно.

Если $t_0 \in [0, T)$ есть точка разрыва $u(t)$, тогда для определенности полагаем $u(t_0) = \lim\limits_{t \downarrow t_0} u(t)$. В точке T положим $u(T) = \lim\limits_{t \uparrow T} u(t)$. Аналогично считаем, что $\dot{x}(t_0)$ есть правосторонняя производная вектор-функции $x(t)$ в точке t_0, а $\dot{x}(T)$ — левосторонняя производная вектор-функции $x(t)$ в точке T.

Напомним определение квазидифференцируемой функции. Рассмотрим некоторое непустое множество $\Sigma \subset R^n$. Функция $\xi : \Sigma \to R$ называется квазидифференцируемой на множестве Σ, если для каждого $\varsigma \in \Sigma$ существуют такие выпуклые компактные множества, субдифференциал $\underline{\partial}\xi(\varsigma) \subset R^n$ и супердифференциал $\overline{\partial}\xi(\varsigma) \subset R^n$, что для каждого допустимого приращения $\Delta\varsigma \in R^n$ (т. е. $\mathrm{co}\{\varsigma, \varsigma + \Delta\varsigma\} \in \Sigma$) соответствующее приращение функции ξ дается формулой

$$\xi(\varsigma + \Delta\varsigma) = \xi(\varsigma) + \max_{\sigma_1 \in \underline{\partial}\xi(\varsigma)} \langle \sigma_1, \Delta\varsigma \rangle + \min_{\sigma_2 \in \overline{\partial}\xi(\varsigma)} \langle \sigma_2, \Delta\varsigma \rangle + o(\Delta\varsigma, \varsigma),$$

$$o(\alpha\Delta\varsigma, \varsigma)/\alpha \to 0, \quad \text{если } \alpha \to 0.$$

Пара $\mathcal{D}\xi(\varsigma) = [\underline{\partial}\xi(\varsigma), \overline{\partial}\xi(\varsigma)]$ называется квазидифференциалом функции ξ в точке ς.

Введем множество допустимых управлений

$$U = \big\{u \in P_m[0, T] \mid \underline{u}_i \leqslant u_i(t) \leqslant \overline{u}_i,\ i = \overline{1, m},\ t \in [0, T]\big\}, \tag{4}$$

где $\underline{u}_i, \overline{u}_i \in R$, $i = \overline{1, m}$, — заданные числа.

Обозначим $x(t, u)$ решение задачи Коши (1), (2) для некоторого заданного управления $u \in U$ (будем иногда для краткости также писать просто $x(t)$ вместо $x(t, u)$). При сделанных предположениях такое решение существует и единственно [21].

Пусть имеются смешанные ограничения на фазовые переменные и управления, заданные неравенствами

$$h_j(x, u) \leqslant 0, \quad j = \overline{1, r}, \tag{5}$$

в которых $h_j(x, u)$, $j = \overline{1, r}$, — заданные непрерывно дифференцируемые функции.

Введем множества

$$F = \Big\{u \in U \ \Big|\ h(x(t, u), u) \leqslant 0\Big\},$$

$$\overset{\circ}{F} = \Big\{u \in U \ \Big|\ \sup_{t \in [0, T]} h(x(t, u), u) < 0\Big\}.$$

Предположим, что для смешанных ограничений выполняется следующее условие регулярности: если u^* является оптимальным управлением в исходной задаче, то существует такое управление $\hat{u} \in \overset{\circ}{F}$, что

$$\beta\hat{u} + (1 - \beta)u^* \in \overset{\circ}{F} \ \text{ для всех } \beta \in (0, 1].$$

Требуется найти такое управление $u^* \in U$, которое минимизирует функционал

$$\varphi(u) = \psi(x(T, u))$$

при ограничениях (3) на правый конец и смешанных ограничениях (5) на фазовые координаты и управления. Считаем, что функция $\psi(x)$ квазидифференцируема по фазовым переменным. Соответствующую оптимальную траекторию $x(t, u^*)$ обозначим $x^*(t)$. Полагаем, что такое решение существует.

Дополнительно предположим, что функция $\psi(x)$ липшицева на каждом ограниченном подмножестве пространства R^n. (Поскольку в силу сделанных предположений траектории изучаемой системы будут ограничены в совокупности в равномерной метрике [14], то достаточно рассматривать функцию $\psi(x)$ лишь на ограниченных подмножествах R^n.)

Снимем ограничения (5) на фазовые переменные и управления с помощью следующего приема.

Введем вспомогательные переменные $y_j \in C_1[0,T]$, $j = \overline{1,r}$, удовлетворяющие при $t \in [0,T]$ системе дифференциальных уравнений

$$\dot{y}_j(t) = g_j(x(t,u(t)),u(t)), \tag{6}$$

$$g_j(x(t,u(t)),u(t)) = \big[\max\big\{0, h_j(x(t,u(t)),u(t)\big\}\big]^2, \quad j = \overline{1,r},$$

и краевым условиям

$$y(0) = 0_r, \tag{7}$$

$$y(T) = 0_r. \tag{8}$$

Обозначим $y(t,u)$ решение задачи Коши (6), (7) для некоторого заданного управления $u \in U$ (будем иногда для краткости также писать просто $y(t)$ вместо $y(t,u)$). Поскольку, как было отмечено выше, $x(t,u)$ существует и единственно, то решение $y(t,u)$ также существует и единственно на $[0,T]$. Очевидно, что смешанные ограничения (5) выполнены тогда и только тогда вектор-функция $y(t,u)$ удовлетворяет условию (8).

З а м е ч а н и е 1. Вместо управлений из пространства $P_m[0,T]$ и соответственно траекторий из пространства $C_n[0,T]$ с производными из пространства $P_n[0,T]$ можно рассматривать измеримые и почти всюду ограниченные на $[0,T]$ управления и соответственно абсолютно непрерывные на отрезке $[0,T]$ траектории с измеримыми и почти всюду ограниченными на $[0,T]$ производными. Тогда при естественных предположениях у рассматриваемой задачи оптимального управления есть решение [20]. Выбор пространства управлений и соответственно траекторий объясняется возможностью их практического построения.

З а м е ч а н и е 2. Множество (4) допустимых управлений выбрано для простоты изложения. Можно рассматривать и другие ограничения на управления, не нарушающие построений настоящей статьи.

3. Параметризация управления. Следуя работе [14], произведем следующую дискретизацию исходной задачи. Разобьем отрезок времени $[0,T]$ на 2^p равных частей Δt (где p — заданное натуральное число) точками t_k, $k = \overline{0,2^p}$, $t_0 = 0, \ldots, t_{2^p} = T$. Рассмотрим управление, которое принимает постоянные значения на каждом из этих интервалов. Оно может быть записано в виде

$$u^p(t) = \sum_{k=1}^{2^p} \sigma^{p,k} \chi_{I_k^p}(t),$$

где $\sigma^{p,k} \in R^m$, $k = \overline{1,2^p}$, — вектор постоянных управлений; $\chi_{I_k^p}(t)$ — индикаторная функция множества $I_k^p = [t_{k-1}, t_k)$, $k = \overline{0, 2^p - 1}$, $I_{2^p}^p = [t_{2^p-1}, t_{2^p}]$. Обозначим U^p множество всех векторов $\sigma^{p,k}$, $k = \overline{1,2^p}$, лежащих во множестве U.

Положим $\sigma^p = (\sigma^{p,1}, \ldots, \sigma^{p,2^p})'$, $x_{n+i}(t) = y_i(t)$, $t \in [0,T]$, $i = \overline{1,r}$, и перепишем исходную систему (1) с новым управлением $u^p(t)$ как

$$\dot{x}(t) = \overline{f}(x(t), \sigma^p, t) := \big(f(x(t), u^p(t), t), g(x(t), u^p(t), t)\big)' \tag{9}$$

с краевыми условиями

$$x(0) = (x_0, 0_r)', \tag{10}$$

$$x_i(T) = x_{T_i}, \ i \in J_T, \quad x_i(T) = 0, \ i = \overline{n+1, n+r}. \tag{11}$$

Обозначим $x(t, \sigma^p)$ решение задачи Коши (9), (10) для некоторого заданного управления $\sigma^p \in U^p$. При сделанных предположениях такое решение существует и единственно. Требуется найти такое управление $\sigma^{p*} \in U^p$, которое доставляет минимум функционалу

$$\overline{\varphi}(\sigma^p) = \psi(x(T, \sigma^p))$$

при ограничениях (11) на правый конец. Соответствующую оптимальную траекторию $x(t, \sigma^{p*})$ обозначим $x^{p*}(t)$. Предполагаем, что такое решение существует.

Построим штрафную функцию, которая учитывает ограничения на правом конце (сохраним для нее прежнее обозначение):

$$\overline{\varphi}(\sigma^p) = \psi(x(T, \sigma^p)) + \lambda_1 \Psi_1(\sigma^p) = \tag{12}$$

$$= \psi(x(T, \sigma^p)) + \lambda_1 \left(\sum_{i \in J_T} |x_i(T, \sigma^p) - x_{T_i}| + \sum_{i=n+1}^{n+r} |x_i(T, \sigma^p)| \right).$$

Хорошо известно [21], что с учетом сделанных предположений при достаточно больших значениях штрафного параметра λ_1 решение задачи минимизации построенной функции на множестве U^p близко к решению исходной задачи минимизации функции $\psi(x(T, \sigma^p))$ на множестве U^p при ограничениях (11). Поскольку конструкция введенного функционала $\overline{\varphi}(\sigma^p)$ сохраняет (в силу субдифференцируемости [13] добавленного слагаемого и липшицевости линейной функции) все ранее наложенные на минимизируемый функционал ограничения, то минимизация построенной штрафной функции (при некотором фиксированном λ_1) укладывается в постановку исходной задачи.

Итак, исходная задача построения кусочно-непрерывного управления $u^*(t)$ свелась к задаче (или к последовательности задач при увеличении числа p) построения кусочно-постоянного управления $u^{p*}(t) = \sum_{k=1}^{2^p} \sigma^{p*,k} \chi_{I_k^p}(t)$ (т. е. определения вектора параметров σ^{p*}). Проведенная параметризация управления позволит вычислить квазидифференциал минимизируемого функционала в каждой точке σ^p и, благодаря этому, применять к нему методы негладкой оптимизации (например, метод квазидифференциального спуска), тем самым получить алгоритм решения исходной задачи. Можно обосновать построенную параметризацию управления, т. е. доказать сходимость значений функционала $\varphi(u^{p*}) \to \varphi(u^*)$ при $p \to \infty$. Известны также некоторые результаты по сходимости последовательности управлений u^{p*} и соответствующих траекторий $x(t, u^{p*})$. Приведем соответствующие теоремы [14, 18] в удобном для данной статьи виде.

Теорема 1. *При сделанных предположениях верно, что*

$$\varphi(u^{p*}) \to \varphi(u^*) \text{ при } p \to \infty.$$

Теорема 2. *При сделанных предположениях справедливо утверждение: если $u^{p*} \to \overline{u}$ почти всюду на интервале $[0, T]$, то $\overline{u}$ является оптимальным управлением исходной задачи. Тогда для любого $t \in [0, T]$ верно*

$$\lim_{p \to \infty} ||x(t, u^{p*}) - x(t, \overline{u})||_{R^n} = 0,$$

и, по определению, $x(t, \overline{u})$ есть оптимальная траектория (возможно, не единственная) исходной задачи.

З а м е ч а н и е 3. Заметим, что классические в теории оптимального управления требования на условия роста вектор-функции $f(x, u, t)$ исходной системы весьма обременительны и могут не выполняться для многих задач управления нелинейными системами. Эти требования введены, чтобы заведомо гарантировать существование и единственность решений встречающихся задач Коши, а также для обеспечения равномерной ограниченности последовательности $\{x(t, u^p)\}_{p=1}^{\infty}$ траекторий, фигурирующих в теоремах 1, 2. Поэтому данное предположение в действительности можно существенно ослабить, потребовав вместо него существование и единственность решений соответствующих задач Коши, а также равномерную ограниченность последовательности $\{x(t, u^p)\}_{p=1}^{\infty}$. На функцию $\psi(x)$ при этом можно наложить требование коэрцитивности на множестве решений системы (1), (2) (при различных управлениях $u \in U$), рассматриваемых в конечный момент времени T (см., например, [22]).

Построим штрафную функцию, которая учитывает ограничения на управление (см. формулу (4)), сохранив для нее прежнее обозначение:

$$\overline{\varphi}(\sigma^p) = \psi(x(T, \sigma^p)) + \lambda_1 \Psi_1(\sigma^p) + \lambda_2 \Psi_2(\sigma^p) = \psi(x(T, \sigma^p)) + \lambda_1 \Psi_1(\sigma^p) \ +$$

$$+ \ \lambda_2 \max \Big\{ 0, \sigma_1^{p,1} - \overline{u}_1, \ldots, \sigma_m^{p,1} - \overline{u}_m, \ldots \sigma_1^{p,2^p} - \overline{u}_1, \ldots, \sigma_m^{p,2^p} - \overline{u}_m, \tag{13}$$

$$\underline{u}_1 - \sigma_1^{p,1}, \ldots, \underline{u}_m - \sigma_m^{p,1}, \ldots \underline{u}_1 - \sigma_1^{p,2^p}, \ldots, \underline{u}_m - \sigma_m^{p,2^p} \Big\}.$$

Заметим, что штрафное слагаемое здесь является субдифференцируемой [13] функцией. Известно [23], что построенная функция будет точной штрафной. Это означает, что существует такое число $\lambda^* < \infty$, что для всех $\lambda_2 \geqslant \lambda^*$ решение задачи минимизации функции (13) на всем пространстве $R^m \times R^{2^p}$ будет решением задачи минимизации функции (12) на множестве U^p.

Итак, рассмотренные ограничения на управление и на правый конец траектории не меняют структуру задачи, и с их учетом окончательно следует рассматривать задачу безусловной минимизации функционала (13) при достаточно больших значениях параметров λ_1, λ_2. На эти параметры существуют некоторые оценки [24], однако на практике нужно просто следить, выполняются ли требуемые ограничения при выбранных значениях данных параметров и при необходимости производить их увеличение. Но такой подход несколько понижает эффективность метода, поскольку предполагаются некоторые действия, осуществляемые «вручную». Для большей автоматизации процесса рекомендуется использовать некоторые адаптивные (автоматические) правила настройки штрафного параметра, рассматривавшиеся, например, в статьях [11, 25].

4. Квазидифференцируемость функционала $\overline{\varphi}(\sigma^p)$. Необходимые условия минимума. В работе [18] получено правило вычисления квазидифференциала функционала $\overline{\varphi}(\sigma^p)$. Оно состоит из двух этапов.

Вначале для каждого $k = \overline{1, 2^p}$ необходимо решить матричное дифференциальное уравнение

$$\dot{H}^k(t) = \frac{\partial \overline{f}(x(t, \sigma^{p,l}), \sigma^{p,l}, t)}{\partial x} H^k(t) + \delta_{k,l} \frac{\partial \overline{f}(x(t, \sigma^{p,l}), \sigma^{p,l}, t)}{\partial \sigma^{p,k}},$$

$$t \in [t_{l-1}, t_l), \ l = \overline{k, 2^p - 1}, \ t \in [t_{l-1}, t_l], \ l = 2^p,$$

с начальным условием

$$H^k(t) = 0, \quad t \in [0, t_{k-1}),$$

где $\delta_{k,l}$ есть символ Кронекера.

Затем следует вычислить квазидифференциал функции $\varphi(\sigma^p)$ как суперпозиции функций $\psi(x)$ и $x(T, \sigma^p)$, применяя правила квазидифференциального исчисления [13] для вычисления квазидифференциала функции $\psi(x)$, при этом пользуясь формулой

$$\frac{\partial \zeta(x(T, \sigma^p))}{\partial \sigma^{p,k}} = \left(\frac{\partial x(T, \sigma^p)}{\partial \sigma^{p,k}} \right)' \frac{\partial \zeta(x(T, \sigma^p))}{\partial x} = \left(H^k(T)\right)' \frac{\partial \zeta(x(T, \sigma^p))}{\partial x}$$

для расчета градиентов дифференцируемых функций $\zeta(x(T, \sigma^p))$.

Для иллюстрации указанного правила вычислим квазидифференциал функции

$$\overline{\varphi}(\sigma^0)) = \psi(x(1, \sigma^0)) = \max\left\{(|x_2(1)| - |x_1(1)| + 1)(|x_2(1)| + 2|x_1(1)| + 1), 1\right\},$$

где $p = 0$ (а тогда $u = u^0 = \sigma^0$), в точке $\sigma^0 = (1, 0)'$ для системы

$$\dot{x}_1 = u_1,$$

$$\dot{x}_2 = 2x_2 - x_1 + u_2$$

с начальным условием

$$x(0) = (0, 0)'.$$

Для простоты на управление и на правый конец траектории ограничения не накладываются. Возьмем $T = 1$, при этом будет $x(1) \approx (0, 3.195)'$.

Обозначим $\zeta_1(x_1, x_2) = |x_2| - |x_1| + 1$, $\zeta_2(x_1, x_2) = |x_2| + 2|x_1| + 1$. Вычислим $\zeta_1(x(1)) \approx 4.195$, $\zeta_2(x(1)) \approx 4.195$. По правилам квазидифференциального исчисления [13] имеем

$$\underline{\partial}\zeta_1(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overline{\partial}\zeta_1(x) = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\underline{\partial}\zeta_2(x) = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \overline{\partial}\zeta_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Вычислим матрицу

$$H(T) = H^0(T) \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1.097 & 3.195 \end{pmatrix}.$$

Согласно формулам квазидифференциального исчисления и приведенным выше правилам окончательно получаем, что

$$\underline{\partial}\overline{\varphi}(\sigma^0)) \approx 4.195\ H'(T) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 4.195\ \mathrm{co} \left\{ H'(T) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ H'(T) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\overline{\partial}\overline{\varphi}(\sigma^0)) \approx 4.195\ \mathrm{co} \left\{ H'(T) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ H'(T) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} + 4.195\ H'(T) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Произведя вычисления, запишем результат:

$$\mathcal{D}\,\overline{\varphi}(\sigma^0) = \left[\underline{\partial}\overline{\varphi}(\sigma^0), \overline{\partial}\overline{\varphi}(\sigma^0)\right] \approx$$

$$\approx \left[\mathrm{co}\left\{\begin{pmatrix}-0.8163\\26.8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-17.5947\\26.8\end{pmatrix}\right\},\mathrm{co}\left\{\begin{pmatrix}-4.1946\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4.1946\\0\end{pmatrix}\right\}\right].$$

Итак, обозначим полученный квазидифференциал функционала $\overline{\varphi}(\sigma^p)$ в точке σ^p следующим образом:

$$\mathcal{D}\overline{\varphi}(\sigma^p) = \left[\underline{\partial}\overline{\varphi}(\sigma^p), \overline{\partial}\overline{\varphi}(\sigma^p)\right].$$

Приведем известные необходимое и достаточное условия (локального) минимума квазидифференцируемой функции.

Теорема 3. *Для того чтобы управление $\sigma^{p*} \in U^p$ минимизировало функционал $\overline{\varphi}(\sigma^p)$ (где соответствуюшая траектория $x(t,\sigma^{p*})$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений* (1) *с краевыми условиями* (2), (3)) *и фазовым ограничениям* (5), *необходимо выполнение включения*

$$-\overline{\partial}\overline{\varphi}(\sigma^{p*}) \subset \underline{\partial}\overline{\varphi}(\sigma^{p*}). \tag{14}$$

Если оказалось, что

$$-\overline{\partial}\overline{\varphi}(\sigma^{p*}) \subset \mathrm{int}\,\underline{\partial}\overline{\varphi}(\sigma^{p*}), \tag{15}$$

то σ^{p*} является точкой локального минимума функционала $\overline{\varphi}(\sigma^p)$.

Приведем также известное необходимое условие (локального) максимума квазидифференцируемой функции (см. пример 2).

Теорема 4. *Для того чтобы управление $\sigma^{p**} \in U^p$ максимизировало функционал $\overline{\varphi}(\sigma^p)$ (где соответствующая траектория $x(t,\sigma^{p**})$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений* (1) *с краевыми условиями* (2), (3)) *и фазовым ограничениям* (5), *необходимо выполнение включения*

$$-\underline{\partial}\overline{\varphi}(\sigma^{p**}) \subset \overline{\partial}\overline{\varphi}(\sigma^{p**}). \tag{16}$$

5. Метод квазидифференциального спуска. Известно [13], что во многих практических случаях субдифференциал $\underline{\partial}\overline{\varphi}(\sigma^p)$ является выпуклым многогранником $A \subset R^m \times R^{2^p}$, а супердифференциал $\overline{\partial}\overline{\varphi}(\sigma^p)$ — выпуклым многогранником $B \subset R^m \times R^{2^p}$. Конечно, множества A и B зависят от точки σ^p. Для простоты изложения опустим эту зависимость в обозначениях п. 5. Найдем уклонение по Хаусдорфу множества $-B$ от множества A. Ясно, что достаточно перебрать все вершины b_j, $j=\overline{1,s}$, многогранника $-B$: найдем евклидово расстояние между каждой из данных вершин и многогранником A и затем среди всех этих расстояний выберем наибольшее. Пусть искомое евклидово расстояние, отвечающее вершине b_j, $j=\overline{1,s}$, достигается в точке $a_j \in A$ (которая единственна в силу того, что A — выпуклый компакт). Тогда искомое уклонение — это величина $||b_{\overline{j}} - a_{\overline{j}}||$, $\overline{j} \in \{1,\ldots,s\}$. (При этом такое уклонение может достигаться на нескольких вершинах многогранника $-B(t)$ и $b_{\overline{j}}$ означает любую из них.) Тогда вектор $G = -\dfrac{b_{\overline{j}} - a_{\overline{j}}}{||b_{\overline{j}} - a_{\overline{j}}||}$ является направлением наискорейшего (или квазидифференциального) [13] спуска. Вектор G, конечно, также зависит от точки σ^p, в которой вычисляется квазидифференциал функционала $\varphi(\sigma^p)$. Заметим, что задача нахождения евклидова расстояния между точкой и выпуклым многогранником может быть эффективно решена различными методами (см., например, [26]). В численных примерах для решения этой задачи использован метод Малоземова—Демьянова—Митчелла [27].

Опишем следующий метод квазидифференциального спуска для поиска стационарных точек функционала $\overline{\varphi}(\sigma^p)$ в случае, когда квазидифференциал функционала $\overline{\varphi}(\sigma^p)$ является парой выпуклых многогранников.

Ш а г 0. Зафиксируем произвольную начальную точку $\sigma^p_{(1)} \in R^m \times R^{2^p}$.

Ш а г k (a). Пусть точка $\sigma^p_{(k)} \in R^m \times R^{2^p}$ уже построена. Если условие минимума (14) выполнено, то точка $\sigma^p_{(k)}$ — стационарная точка функционала $\overline{\varphi}(\sigma^p)$, и процесс заканчивается. На практике проверяется выполнение условия минимума лишь с некоторой наперед заданной погрешностью ε. Это означает, что уклонение по Хаусдорфу множества $-B(\sigma^p_{(k)})$ до множества $A(\sigma^p_{(k)})$ достаточно мало, т. е. $||b_{\overline{j}} - a_{\overline{j}}|| \leqslant \varepsilon$, $\overline{j} \in \{1, \ldots, s(\sigma^p_{(k)})\}$ (см. п. 4). В противном случае переходим к шагу k (b).

Ш а г k (b). Решим две подзадачи:

• найдем направление $G\big(\sigma^p_{(k)}\big)$ квазидифференциального спуска функционала $\overline{\varphi}(\sigma^p)$ в точке $\sigma^p_{(k)}$, как описано в начале п. 5;

• найдем значение $\gamma_{(k)}$ из решения следующей задачи одномерной минимизации:

$$\min_{\gamma \geqslant 0} \overline{\varphi}\Big(\sigma^p_{(k)} - \gamma G\big(\sigma^p_{(k)}\big)\Big) = \overline{\varphi}\Big(\sigma^p_{(k)} - \gamma_{(k)} G\big(\sigma^p_{(k)}\big)\Big).$$

Затем положим, что

$$\sigma^p_{(k+1)} = \sigma^p_{(k)} - \gamma_{(k)} G\big(\sigma^p_{(k)}\big).$$

Положим $k := k + 1$ и вернемся к шагу k (a).

Тогда $\overline{\varphi}\big(\sigma^p_{(k+1)}\big) < \overline{\varphi}\big(\sigma^p_{(k)}\big)$.

З а м е ч а н и е 4. Вопрос об условиях сходимости метода квазидифференциального спуска остается открытым. Существуют примеры, когда при реализации этого метода возникает эффект «заедания», что ведет к сходимости к нестационарной точке минимизируемой функции. Однако устройство таких функций в построенных примерах [28] весьма специфично. На практике метод хорошо зарекомендовал себя (с точки зрения сходимости) и успешно применялся к решению конкретных задач (см. п. 6, а также работу [18]). Описанные обстоятельства позволяют говорить о том, что, «как правило», данный метод приводит к стационарной точке минимизируемого функционала.

Но поскольку формально сходимость метода квазидифференциального спуска не доказана, то можно использовать схожий метод кодифференциального спуска, для которого при естественных предположениях имеются результаты по сходимости [29]. Кодифференциал является родственным по отношению к квазидифференциалу объектом негладкой оптимизации. Известно [13], что классы квазидифференцируемых и кодифференцируемых функций совпадают. Для кодифференциала аналогичным образом разработано конструктивное исчисление, что позволяет эффективно работать с таким объектом, потому для вычисления кодифференциала минимизируемого функционала дополнительных трудностей не возникает. На практике, однако, рекомендуется использовать метод наискорейшего (квазидифференциального) спуска, так как он менее вычислительно затратный и, как уже было отмечено, работает в подавляющем большинстве практических случаев. Заметим также, что в случае, когда рассматривается задача на минимум максимума конечного числа непрерывно дифференцируемых функций, можно применять один из методов последовательных приближений [28], который в реализации (и по вычислительной сложности) схож с описанным методом и сходимость которого доказана. Для краткости не приводим здесь подробное описание данных методов.

З а м е ч а н и е 5. Заметим, что при реализации алгоритма при использовании правил квазидифференциального исчисления активными считаются те функции, которые являются активными лишь с некоторой погрешностью. Введем понятие активной функции для функции максимума (для функции минимума определение аналогично). Пусть $\xi(x) = \max_{i=\overline{1,M}} \xi_i(x)$, где $\xi_i(x) : R^n \to R$ — некоторые функции, $i = \overline{1,M}$, $M \in \overline{R}$. Тогда назовем функцию $\xi_{\overline{i}}(x)$, $\overline{i} \in \{1,\ldots,M\}$, активной в точке $x_0 \in R^n$, если $\xi_{\overline{i}}(x_0) = \xi(x_0)$. Зафиксируем некоторую малую величину δ. Считаем функцию $\xi_{\overline{i}}(x)$, $\overline{i} \in \{1,\ldots,M\}$, активной в точке $x_0 \in R^n$ с погрешностью δ, если $\xi(x_0) - \xi_{\overline{i}}(x_0) \leqslant \delta$.

Понятно, что в большинстве практических примеров задачи 1), 2) в шаге k (b) алгоритма также решаются приближенно. Здесь параметры точности зависят от конкретных методов решения этих задач (поиска расстояния между выпуклыми многогранниками и одномерной минимизации) и тоже выбираются заранее.

6. Численные примеры.

Пример 1. Рассмотрим на промежутке $t \in [0,1]$ систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 x_3 + u_1, \\ \dot{x}_2 &= x_3 x_1, \\ \dot{x}_3 &= x_1 x_2 + u_2 - p(t), \end{aligned}$$

$$p(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 0.5), \\ -1, & t \in [0.5, 1], \end{cases}$$

с начальным условием

$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = 0$$

и со свободным правым концом.

Требуется минимизировать функционал

$$\psi(x(T,u)) = |x_1(1)| + |x_3(1)|.$$

Подобная задача была описана в статье [30] и возникала из упрощенной модели стабилизации спутника. Функция $p(t)$ может иметь смысл внешнего воздействия. Интерпретация функционала $\psi(x(T,u))$ очевидна.

Пусть управление подчинено ограничениям

$$-1.5 \leqslant u_1(t) \leqslant -0.5, \qquad -0.2 \leqslant u_2(t) \leqslant 0.2.$$

Также наложим смешанные ограничения

$$0.3 \leqslant x_1(t) - 0.2u_1(t) \leqslant 1.1,$$

с учетом которых введем дополнительные переменные, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям

$$\dot{x}_4 = \big[\max\{0, x_1 - 0.2u_1 - 1.1\}\big]^2,$$

$$\dot{x}_5 = \big[\max\{0, -x_1 + 0.2u_1 + 0.3\}\big]^2$$

и краевым условиям

$$\begin{aligned} x_4(0) = 0, \quad x_5(0) = 0, \\ x_4(1) = 0, \quad x_5(1) = 0. \end{aligned}$$

Положим $p = 1$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 10$, тогда, по определению, на интервале $[0, 0.5)$ управлением будет вектор $\sigma^{1,1} \in R^2$, а на интервале $[0.5, 1]$ — вектор $\sigma^{1,2} \in R^2$.

В качестве начального приближения возьмем $\sigma_{(1)}^{1,1} = (1,1)'$, $\sigma_{(1)}^{1,2} = (1,1)'$, или, более кратко, $\sigma_{(1)}^{1} = (1,1,1,1)'$, а тогда $\overline{\varphi}(\sigma_{(1)}^{1}) \approx 19.4273$. На 10-й итерации были получены точка $\sigma_{(10)}^{1,1*} \approx (-0.5265, 0.1976)'$, $\sigma_{(10)}^{1,2*} = (-1.4998, -0.131)'$ и соответствующее значение функционала $\overline{\varphi}(\sigma_{(10)}^{1*}) = 0.0034$. Видно, что, благодаря построенному управлению, удалось доставить глобальный минимум рассмотренному функционалу с погрешностью, не превышающей величины порядка $3 \cdot 10^{-3}$. При этом ограничения на управление выполнены точно, а погрешность выполнения смешанных ограничений не превышает величины порядка $5 \cdot 10^{-3}$ (и ограничение нарушено лишь в окрестности точки $t = 0$).

Пример 2. На интервале $t \in [0,1]$ рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = 2x_2^2,$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 + u_1$$

с начальным условием

$$x_1(0) = 0$$

и со свободным правым концом.

Требуется минимизировать функционал

$$\psi(x(T,u)) = \max\{|x_1(1)| - |x_2(1)| - 1, 0\} + |x_1(1) - 1|.$$

Минимизация функционала $\psi(x(T,u))$ может быть интерпретирована как стремление к выполнению в конечный момент соотношений $|x_1(1)| \leqslant |x_2(1)| + 1$, $x_1(1) = 1$.

Здесь управление подчинено ограничению

$$-2 \leqslant u_1(t) \leqslant 2.$$

Также имеется фазовое ограничение

$$x_2(t) \leqslant 0.$$

Учитывая его, вводится дополнительная переменная, которая должна удовлетворять уравнению

$$\dot{x}_3 = \big[\max\{0, x_2\}\big]^2$$

и краевым условиям

$$x_3(0) = 0, \qquad x_3(1) = 0.$$

Положим $p = 0$, $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 1$, тогда, по определению, на интервале $[0,1]$ управлением будет число σ^0. Если взять точку $\sigma^{p**} = 0$, то сразу получим верное включение $-\overline{\partial}\overline{\varphi}(\sigma^{p**}) \subset \underline{\partial}\overline{\varphi}(\sigma^{p**})$, т. е. необходимое условие минимума выполнено, несмотря на то, что эта точка не является точкой глобального минимума (см. ниже) в данной задаче (поскольку $\overline{\varphi}(\sigma^{p**}) = 1$). Интересно отметить тот факт, что на самом деле σ^{p**} есть точка максимума (это можно проверить непосредственными вычислениями, поскольку данный пример допускает решение в аналитической форме). Выписав необходимое условие максимума $-\underline{\partial}\overline{\varphi}(\sigma^{p**}) \subset \overline{\partial}\overline{\varphi}(\sigma^{p**})$ (см. (16)), убеждаемся, что оно действительно выполнено.

В качестве начального приближения возьмем $\sigma_{(1)}^{0} = 1$, а тогда $\overline{\varphi}(\sigma_{(1)}^{0}) \approx 1.8514$. На 2-й итерации были получены точка $\sigma_{(2)}^{0*} = -1.111$ и соответствующее значение функционала $\overline{\varphi}(\sigma_{(2)}^{0*}) \approx 0.0021$. Видно, что, благодаря построенному управлению, удалось доставить глобальный минимум рассмотренному функционалу с погрешностью, не превышающей величины порядка $2 \cdot 10^{-3}$. Заметим, что в таком случае $-\overline{\partial}\overline{\varphi}(\sigma^{p*}) \subset \operatorname{int} \underline{\partial}\overline{\varphi}(\sigma^{p*})$ и выполнено достаточное условие локального минимума (см. (15)). При этом ограничения на управление и на фазовые координаты выполнены точно.

Изменим теперь начальное условие, положив

$$x_1(0) = 1,$$

и наложим дополнительное фазовое ограничение

$$x_2(t) \geqslant 0.$$

Это приводит к введению еще одной переменной, которая должна удовлетворять уравнению

$$\dot{x}_4 = \left[\max\{0, -x_2\}\right]^2$$

и краевым условиям

$$x_4(0) = 0, \qquad x_4(1) = 0.$$

При выполнении наложенных фазовых и краевых условий функционал автоматически достигает глобального минимума (поскольку тогда будет верно $|x_1(T, u^*)|$ $-|x_2(T, u^*)|$ $-1 = 0$), потому минимизация рассматриваемого функционала становится бессодержательной. Однако цель введения таких ограничений состоит в создании ситуации, при которой обе функции под максимумом (вычисленные в точке минимума) окажутся активными, т. е. возникнет случай вычисления «полноценного» квазидифференциала рассматриваемого функционала в точке $\sigma^{0*} = 1$. В таком случае имеем уравнение

$$D\overline{\varphi}(\sigma^{0*}) = \left\{[-1, 1], [-1, 1]\right\}.$$

Видно, что $-\overline{\partial}\overline{\varphi}(\sigma^{p*}) \subset \underline{\partial}\overline{\varphi}(\sigma^{p*})$.

7. Заключение. В статье рассмотрена задача оптимального управления в форме Майера объектом, описываемым системой обыкновенных дифференциальных уравнений с непрерывно дифференцируемой правой частью и негладким (а лишь квазидифференцируемым) функционалом качества. Смешанные (по фазовым координатам и управлениям) поточечные ограничения снимаются стандартным образом с помощью вспомогательной системы дифференциальных уравнений. Далее задача изучается методом «параметризации» управления и средствами квазидифференциального исчисления. Примеры иллюстрируют работу метода квазидифференциального спуска применительно к рассмотренной задаче.

Литература

1. *Jiang C., Lin Q., Yu C., Teo K. L.* An exact penalty method for free terminal time optimal control problem with continuous inequality constraints // Journal of Optim. Theory Appl. 2012. Vol. 154. P. 30–53.

2. *Моисеев Н. Н.* Элементы теории оптимальных систем. М.: Наука, 1976. 526 с.

3. *Loxton R. C., Teo K. L., Rehbock V., Yiu K. F. C.* Optimal control problems with a continuous inequality constraint on the state and the control // Automatica. 2009. Vol. 45. Iss. 10. P. 2250–2257.

4. *Rosen J. B.* Iterative solution of nonlinear optimal control // J. SIAM Control. 1966. Vol. 4. N 1. P. 223–244.

5. *Bryson A. E., Denham W. F.* Optimal programming problems with inequality constraints. II: Solution by steepest-ascent // AIAA Journal. 1964. Vol. 2. Iss. 1. P. 25–34.

6. *Lasdon L. S., Waren A. D., Rice R. K.* An interior penalty method for inequality constrained optimal control problems // IEEE Transactions on Automatic Control. 1967. Vol. 12. N 4. P. 388–395.
7. *Miele A., Cloutier J. R., Mohanty B. P., Wu A. K.* Sequential conjugate gradient-restoration algorithm for optimal control problems with nondifferential constraints. Pt I // International Journal of Control. 1979. Vol. 2. N 2. P. 189–211.
8. *Berkovitz L. D.* Variational methods in problems of control and programming // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1961. Vol. 3. P. 145–169.
9. *Gorelik V. A., Tarakanov A. F.* Penalty method and maximum principle for nonsmooth variable-structure control problems // Cybernetics and Systems Analysis. 1992. Vol. 28. Iss. 3. P. 432–437.
10. *Morzhin O. V.* On approximation of the subdifferential of the nonsmooth penalty functional in the problems of optimal control // Automation and Remote Control. 2009. N 70. P. 761–771.
11. *Mayne D. Q., Smith S.* Exact penalty algorithm for optimal control problems with control and terminal constraints // International Journal of Control. 1988. Vol. 48. N 1. P. 257–271.
12. *Noori Skandari M. H., Kamyad A. V., Effati S.* Smoothing approach for a class of nonsmooth optimal control problems // Applied Mathematical Modelling. 2015. Vol. 40. N 2. P. 886–903.
13. *Демьянов В. Ф., Рубинов А. М.* Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990. 432 с.
14. *Teo K. L., Goh C. J., Wong K. H.* A unified computational approach to optimal control problems. New York: Longman Scientific and Technical, 1991. 329 p. (Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics.)
15. *Jazwinski A. H.* Optimal trajectories and linear control of nonlinear systems // AIAA Journal. 1964. Vol. 2. N 8. P. 1371–1379.
16. *Fominyh A. V.* The subdifferential descent method in a nonsmooth variational problem // Optimization Letters. 2022 (in print). https://doi.org/10.1007/s11590-022-01897-3
17. *Фоминых А. В., Карелин В. В., Полякова Л. Н., Мышков С. К., Трегубов В. П.* Метод кодифференциального спуска в задаче нахождения глобального минимума кусочно-аффинного целевого функционала в линейных системах управления // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2021. Т. 17. Вып. 1. С. 47–58. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.105
18. *Fominyh A. V.* The quasidifferential descent method in a control problem with nonsmooth objective functional // Optimization Letters. 2021. Vol. 15. Iss. 8. P. 2773–2792.
19. *Fominyh A. V.* Open-loop control of a plant described by a system with nonsmooth right-hand side // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2019. Vol. 59. N 10. P. 1639–1648.
20. *Filippov A. F.* On certain questions in the theory of optimal control // J. SIAM Control Ser. A 1. 1962. Vol. 1. N 1. P. 76–84.
21. *Васильев Ф. П.* Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002. 824 с.
22. *Peressini A. L., Sullivan F. E., Uhl J. J.* The mathematics of nonlinear programming. New York: Springer, 1988. 276 p.
23. *Dolgopolik M. V.* A unifying theory of exactness of linear penalty functions // Optimization. 2015. Vol. 65. N 6. P. 1167–1202.
24. *Демьянов В. Ф.* Условия экстремума и вариационное исчисление. М.: Высшая школа, 2005. 335 с.
25. *Byrd R. H., Nocedal J., Waltz R. A.* Steering exact penalty methods for nonlinear programming // Optimization Methods and Software. 2008. Vol. 23. N 2. P. 197–213.
26. *Wolfe P.* The simplex method for quadratic programming // Econom. 1959. Vol. 27. P. 382–398.
27. *Васильев Л. В., Демьянов В. Ф.* Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981. 384 с.
28. *Демьянов В. Ф., Малозёмов В. Н.* Введение в минимакс. М.: Наука, 1972. 368 с.
29. *Dolgopolik M. V.* A convergence analysis of the method of codifferential descent // Computational Optimization and Applications. 2018. Vol. 71. N 3. P. 879–913.
30. *Крылов И. А.* Численное решение задачи об оптимальной стабилизации спутника // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 1968. Т. 8. № 1. С. 203–208.

Статья поступила в редакцию 1 ноября 2022 г.
Статья принята к печати 19 января 2023 г.

Контактная информация:

Фоминых Александр Владимирович — канд. физ.-мат. наук, доц.; alexfomster@mail.ru

Карелин Владимир Витальевич — канд. физ.-мат. наук, доц.; vlkarelin@mail.ru

Полякова Людмила Николаевна — д-р физ.-мат. наук, проф.; lnpol07@mail.ru

Method for solving an optimal control problem in the Mayer form with a quasidifferentiable functional in the presence of phase constraints*

A. V. Fominyh, V. V. Karelin, L. N. Polyakova

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Fominyh A. V., Karelin V. V., Polyakova L. N. Method for solving an optimal control problem in the Mayer form with a quasidifferentiable functional in the presence of phase constraints. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2023, vol. 19, iss. 1, pp. 120–134.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.110 (In Russian)

The article considers the problem of optimal control of an object described by a system of ordinary differential equations with a continuously differentiable right-hand side and with a nonsmooth (but only a quasidifferentiable) quality functional. The problem is in the Mayer form with either free or partially fixed right end. Piecewise-continuous and bounded controls are supposed to be admissible if they lie in some parallelepiped at any moment of time. The phase coordinates and controls are also subject to mixed pointwise constraints. Phase constraints are taken into account by introducing new variables with known boundary conditions into the system. The standard discretization of the original system and the parametrization of the control are carried out, theorems are given on the convergence of the solution of the discrete system obtained to the desired solution of the continuous problem. Further, in order to study the resulting discrete system, the apparatus of quasidifferential calculus is used and the method of the quasidifferential descent is applied. Examples illustrating the operation of the algorithm are given.

Keywords: optimal control, Mayer problem, nonsmooth optimization, quasidifferential, phase constraints.

References

1. Jiang C., Lin Q., Yu C., Teo K. L. An exact penalty method for free terminal time optimal control problem with continuous inequality constraints. *Journal of Optim. Theory Appl.*, 2012, vol. 154, pp. 30–53.

2. Moiseev N. N. *Jelementy teorii optimal'nyh sistem* [*Elements of the optimal systems theory*]. Moscow, Nauka Publ., 1976, 526 p. (In Russian)

3. Loxton R. C., Teo K. L., Rehbock V., Yiu K. F. C. Optimal control problems with a continuous inequality constraint on the state and the control. *Automatica*, 2009, vol. 45, iss. 10, pp. 2250–2257.

4. Rosen J. B. Iterative solution of nonlinear optimal control. *J. SIAM Control*, 1966, vol. 4, no. 1, pp. 223–244.

5. Bryson A. E., Denham W. F. Optimal programming problems with inequality constraints. II. Solution by steepest-ascent. *AIAA Journal*, 1964, vol. 2, iss. 1, pp. 25–34.

6. Lasdon L. S., Waren A. D., Rice R. K. An interior penalty method for inequality constrained optimal control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1967, vol. 12, no. 4, pp. 388–395.

7. Miele A., Cloutier J. R., Mohanty B. P., Wu A. K. Sequential conjugate gradient-restoration algorithm for optimal control problems with nondifferential constraints. Pt I. *International Journal of Control*, 1979, vol. 2, no. 2, pp. 189–211.

8. Berkovitz L. D. Variational methods in problems of control and programming. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1961, vol. 3, pp. 145–169.

9. Gorelik V. A., Tarakanov A. F. Penalty method and maximum principle for nonsmooth variable-structure control problems. *Cybernetics and Systems Analysis*, 1992, vol. 28, iss. 3, pp. 432–437.

10. Morzhin O. V. On approximation of the subdifferential of the nonsmooth penalty functional in the problems of optimal control. *Automation and Remote Control*, 2009, no. 70, pp. 761–771.

---

* The main results of the paper (items 3–6) are obtained by Alexander V. Fominyh, the work is supported by the Russian Science Foundation (grant N 21-71-00021).

11. Mayne D. Q., Smith S. Exact penalty algorithm for optimal control problems with control and terminal constraints. *International Journal of Control*, 1988, vol. 48, no. 1, pp. 257–271.

12. Noori Skandari M. H., Kamyad A. V., Effati S. Smoothing approach for a class of nonsmooth optimal control problems. *Applied Mathematical Modelling*, 2015, vol. 40, no. 2, pp. 886–903.

13. Demyanov V. F., Rubinov A. M. *Osnovy negladkogo analiza i kvazidifferencial'noe ischislenie* [*Basics of nonsmooth analysis and quasidifferential calculus*]. Moscow, Nauka Publ., 1990, 432 p. (In Russian)

14. Teo K. L., Goh C. J., Wong K. H. *A unified computational approach to optimal control problems.* New York, Longman Scientific and Technical Publ., 1991, 329 p. (Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics.)

15. Jazwinski A. H. Optimal trajectories and linear control of nonlinear systems. *AIAA Journal*, 1964, vol. 2, no. 8, pp. 1371–1379.

16. Fominyh A. V. The subdifferential descent method in a nonsmooth variational problem. *Optimization Letters*, 2022 (in print). https://doi.org/10.1007/s11590-022-01897-3

17. Fominyh A. V., Karelin V. V., Polyakova L. N., Myshkov S. K., Tregubov V. P. Metod kodifferentsial'nogo spuska v zadache nakhozhdeniia global'nogo minimuma kusochno-affinnogo tselevogo funktsionala v lineinykh sistemakh upravleniia [The codifferential descent method in the problem of finding the global minimum of a piecewise affine objective functional in linear control systems]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2021, vol. 17, iss. 1, pp. 47–58. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.105 (In Russian)

18. Fominyh A. V. The quasidifferential descent method in a control problem with nonsmooth objective functional. *Optimization Letters*, 2021, vol. 15, iss. 8. pp. 2773–2792.

19. Fominyh A. V. Open-loop control of a plant described by a system with nonsmooth right-hand side. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2019, vol. 59, no. 10, pp. 1639–1648.

20. Filippov A. F. On certain questions in the theory of optimal control. *J. SIAM Control Ser. A 1*, 1962, vol. 1, no. 1, pp. 76–84.

21. *Vasil'ev F. P. Metody optimizatsii* [*Optimization methods*]. Moscow, Faktorial Press, 2002, 824 p. (In Russian)

22. Peressini A. L., Sullivan F. E., Uhl J. J. *The mathematics of nonlinear programming.* New York, Springer Publ., 1988, 276 p.

23. Dolgopolik M. V. A unifying theory of exactness of linear penalty functions. *Optimization*, 2015, vol. 65, no. 6, pp. 1167–1202.

24. Demyanov V. F. *Uslovija jekstremuma i variacionnoe ischislenie* [*Extremum conditions and variational calculus*]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 2005, 335 p. (In Russian)

25. Byrd R. H., Nocedal J., Waltz R. A. Steering exact penalty methods for nonlinear programming. *Optimization Methods and Software*, 2008, vol. 23, no. 2, pp. 197–213.

26. Wolfe P. The simplex method for quadratic programming. *Econom.*, 1959, vol. 27, pp. 382–398.

27. Vasil'ev L. V., Demyanov V. F. *Nedifferenciruemaja optimizacija* [*Nondifferentiable optimization*]. Moscow, Nauka Publ., 1981, 384 p. (In Russian)

28. Demyanov V. F., Malozemov V. N. *Vvedenie v minimaks* [*Introduction to minimax*]. Moscow, Nauka Publ., 1972, 368 p. (In Russian)

29. Dolgopolik M. V. A convergence analysis of the method of codifferential descent. *Computational Optimization and Applications*, 2018, vol. 71, no. 3, pp. 879–913.

30. Krylov I. A. Chislennoe reshenie zadachi ob optimal'noj stabilizacii sputnika [Numerical solution of the problem of the optimal stabilization of an artificial satellite]. *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, 1968, vol. 8, no. 1, pp. 203–208. (in Russian)

Received: November 1, 2022.
Accepted: January 19, 2023.

Authors' information:

Alexander V. Fominyh — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor; alexfomster@mail.ru

Vladimir V. Karelin — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor; vlkarelin@mail.ru

Lyudmila N. Polyakova — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; lnpol07@mail.ru