УДК 338.24+517.977.1+519.71
MSC 37N40, 93C95

Разностные динамические модели межотраслевого баланса

Н. В. Смирнов, Т. Е. Смирнова, М. А. Смирнова, М. Н. Смирнов

Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация,
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Смирнов Н. В., Смирнова Т. Е., Смирнова М. А., Смирнов М. Н.* Разностные динамические модели межотраслевого баланса // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2023. Т. 19. Вып. 1. С. 51–64. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.105

В настоящей работе объектом исследования является экономика региона. Для ее описания предложен регулярный метод построения разностных динамических моделей межотраслевого баланса (МОБ), который предполагает моделирование не только сферы производства, но и сферы потребления. Для этого в вектор фазовых переменных включен валовой внутренний продукт. Вариативность модели состоит в возможности учитывать различные макроэкономические параметры в зависимости от конечных целей анализа и управления макроэкономическими тенденциями. Показано, что динамика экономики при прямых инвестициях в различные секторы экономики определяется линейными управляемыми разностными системами. Если возникает необходимость учитывать другие макроэкономические параметры, повышающие чувствительность модели МОБ к управленческим воздействиям, то это приводит к нелинейным разностным системам различных типов. Рассмотрен сценарный подход разработки инвестиционных проектов, который основан на принципах построения программных управлений и стабилизации соответствующих программных движений управляемой разностной системы.

Ключевые слова: динамическая модель «затраты — выпуск», разностные уравнения, сценарный подход, программные управления, стабилизация.

1. Введение. Модель межотраслевого баланса (МОБ) появилась в первой половине XX в. Ее автором является лауреат Нобелевской премии по экономике В. В. Леонтьев [1]. В англоязычной литературе она известна как модель «затраты — выпуск» (“input — output”). С тех пор это направление прикладной математики в экономике проходило различные этапы своего становления от бурного развития [2–6] до некоторого спада интереса исследователей вплоть до критики определенных аспектов модели [7]. В настоящее время актуальность моделей МОБ не вызывает сомнений и подтверждается большим числом научных публикаций. Так, уже 35 лет существует и активно функционирует международная ассоциация International Input — Output Association [8], которая объединяет ученых, активно развивающих самые различные разделы и аспекты теории и практики применения моделей МОБ. Ассоциация издает высокорейтинговый журнал и регулярно проводит международные конференции. Евросоюз с 2009 г. финансирует масштабный проект мирового уровня по сбору и обработке данных для большинства национальных экономик, это база данных «затраты — выпуск» (World Input — Output Database (WIOD)) [9]. Организация экономического сотрудничества и развития продвигает свой международный проект [10]. В России статистические данные в виде таблиц МОБ ежегодно публикуются Росстатом [11].

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2023

Все эти базы данных находятся в открытом доступе, чтобы каждый интересующийся имел возможность апробировать свои идеи и алгоритмы на реальных данных. Следует отметить, что базовые модели МОБ включены в учебники по макроэкономике как в России [12–14], так и за рубежом [15].

В настоящей работе разностную динамическую модель МОБ предлагается применять как инструмент анализа долгосрочных тенденций экономического развития, в качестве теоретической основы для подготовки управленческих решений при реализации инвестиционных программ. Для этого разработана ее модификация, ориентированная на одновременное моделирование сферы производства и сферы потребления. При таком подходе важнейший экономический показатель — *валовой внутренний продукт* (ВВП) рассматривается как фазовая переменная, для которой выводится соответствующее уравнение. Возможности управления в данной задаче делятся на следующие типы: во-первых, различные по своей природе инвестиции от внутренних резервов корпораций до разнородных кредитных ресурсов, а во-вторых, это регулируемые со стороны законодательной власти макроэкономические параметры. В первом случае (без влияния второго фактора) модель принимает вид линейной управляемой системы разностных уравнений. Учет второго фактора в общем случае приводит к анализу нелинейной управляемой системы. При таком подходе моделирования применимы практически все известные в математической теории управления методы построения программных управлений и синтеза стабилизирующих обратных связей [16, 17]. Это позволяет разрабатывать сценарии развития региональных экономик на основе инвестиционных программ для секторов производства и корректировать их реализацию по мере надобности в режиме реального времени.

2. Структура базовой таблицы МОБ. Кратко опишем основные элементы модели МОБ. В таблице МОБ представлены n отраслей (секторов) экономики. Это число варьируется в различных базах данных [9–11] и зависит от разных факторов, к главным из них относятся: организационные и финансовые возможности по сбору и обработке первичной информации, общие цели и предназначение базы данных, некоторые другие. Каждая отрасль является одновременно производителем некоторого товара и потребителем продукции или услуг других отраслей. Базовая таблица МОБ делится на четыре квадранта, каждый из которых представляет собой матрицу соответствующих размеров.

Первым квадрантом общей матрицы МОБ является $(n \times n)$-матрица *сферы производства* $\mathbf{Ap}$ с элементами p_{ij} (руб.). Она приведена в таблице. Столбцы этого квадранта определяют *промежуточное потребление* каждой j-й отрасли экономики как производителя, т. е. потребление продукции других отраслей для производства своего продукта. Элементы данной матрицы имеют представление $p_{ij} = P_i a_{ij} In_j$, где P_i (руб./ед$_i$) — цена продукции i-й отрасли, a_{ij} — *технологический коэффициент*, а In_j — объем годового выпуска j-й отрасли в натуральном выражении (ед$_j$/год) (например, тонны/год, кубометры/год и т. д.). Величина a_{ij} (в натуральном выражении ед$_i$/(ед$_j$/год)) определяет количество i-го вида продукции, необходимое для выпуска единицы j-го вида продукции в единицу времени. Технологические коэффициенты a_{ij} характеризуют совершенство технологий, используемых в каждом секторе экономики. Все диагональные элементы p_{jj} представляют собой затраты каждой отрасли на собственные нужды.

Сумма элементов каждого столбца матрицы $\mathbf{Ap}$ равна стоимости промежуточного потребления Pp_j в j-й отрасли. Если элементы матрицы $\mathbf{Ap}$ рассматривать по строкам, то они имеют следующий смысл: p_{ij} — это стоимости продукции, которую

Таблица. **Совмещенные матрицы МОБ для трехпродуктовой экономики в денежном выражении Ap$\{p_{ij}\}$ (млрд) и в относительных величинах R$\{r_{ij}\}$ (год)**

Потребители → Производители	Сельск. хозяйство	Промышленность	Энергетика	Конечное потребление	Годовой выпуск
1. Сельск. хозяйство Промеж. потреб. Отн. затраты	$p_{11} = 71.8$ $r_{11} = 0.25$	$p_{12} = 57.7$ $r_{12} = 0.2$	$p_{13} = 0.0$ $r_{13} = 0.0$	$Y_1 = 157.8$ $Yr_1 = 0.325$	$I_1 = 287.3$
2. Промышленность Промеж. потреб. Отн. затраты	$p_{21} = 81.0$ $r_{21} = 0.28$	$p_{22} = 34.8$ $r_{22} = 0.12$	$p_{23} = 46.4$ $r_{23} = 0.312$	$Y_2 = 128.2$ $Yr_2 = 0.264$	$I_2 = 290.4$
3. Энергетика Промеж. потреб. Отн. затраты	$p_{31} = 54.8$ $r_{31} = 0.19$	$p_{32} = 18.4$ $r_{32} = 0.063$	$p_{33} = 20.6$ $r_{33} = 0.138$	$Y_3 = 55.0$ $Yr_3 = 0.113$	$I_3 = 148.8$
Доб. стоимость Отн. стоимость	$V_1 = 79.7$ $Vr_1 = 0.277$	$V_2 = 179.5$ $Vr_2 = 0.618$	$V_3 = 81.8$ $Vr_3 = 0.55$	$V_b = 145.0$ $rg = V_b/I_4 =$ $= 0.298$	$I_4 =$ ВВП $=$ $= 486.0$
Годовой выпуск	$I_1 = 287.3$	$I_2 = 290.4$	$I_3 = 148.8$	$I_4 =$ ВВП $=$ $= 486.0$	$Iss = 1212.5$
Оплата труда Отн. оплата	$W_1 = 47.7$ $Wr_1 = 0.166$	$W_2 = 108.0$ $Wr_2 = 0.372$	$W_3 = 47.8$ $Wr_3 = 0.321$	$W_b = 93.2$ $Wr_b = 0.192$	$rw = W/V =$ $= 0.597$ $K_b = W_b/W =$ $= 0.458$
Прибыль Отн. прибыль	$Pr_1 = 32.0$ $Prr_1 = 0.111$	$Pr_2 = 71.5$ $Prr_2 = 0.246$	$Pr_3 = 34.0$ $Prr_3 = 0.228$	$Pr_b = 51.8$ $Prr_b = 0.107$	$Pr = 189.3$
Произв. затраты Отн. себестоимость	$Pc_1 = 255.3$ $Rs_1 = 0.889$	$Pc_2 = 218.9$ $Rs_2 = 0.754$	$Pc_3 = 114.8$ $Rs_3 = 0.772$	$Pc_b = 434.2$ $Rs_b = 0.893$	$Pc = 1023.2$ $Rs = 0.844$
Рентабельность	$Rnt_1 = 0.125$	$Rnt_2 = 0.327$	$Rnt_3 = 0.296$	$Rnt_b = 0.119$	$Rnt_0 = 0.185$

i-я отрасль как производитель поставляет за год каждой j-й отрасли как потребителю. Сумма элементов каждой i-й строки и конечного потребления равна стоимости объема реализованной продукции (годовым продажам) X_i этой отрасли экономики.

Второй квадрант общей матрицы МОБ (см. $(n+1)$-й столбец таблицы) представляет собой n-мерный вектор-столбец *стоимостей продукции конечного потребления.* Для его элементов приняты обозначения: $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)^T = (P_1Yn_1, \ldots, P_nYn_n)^T$.

Третьим квадрантом матрицы «затраты — выпуск» является $(n+1)$-я строка $\mathbf{V}$. Ее элементы V_j — показатели *добавленной стоимости*, созданные в каждом секторе производственной сферы экономики. Они определяются разностью между ожидаемой стоимостью годового выпуска продукции $I_j = P_jIn_j$ в j-м секторе и стоимостью его промежуточного потребления Pp_j, т. е. $V_j = I_j - Pp_j$. При этом добавленная стоимость V_j включает три составляющие: *затраты на оплату труда* наемных работников W_j; величины *налогов* Tx_j, которые устанавливаются правительством; *чистая прибыль* Prh_j — остается в распоряжении производителя. Чистая прибыль является как источником инвестиций в развитие экономики, так и доходов производителя. Следует иметь в виду, что W_j и прибыль до уплаты налогов Pr_j — экзогенно заданные параметры. Они задаются внешними управленческими (административными) решениями на основе прогнозной оценки ожидаемой конъюнктуры и прежнего опыта. Наконец, сумма затрат на промежуточное потребление и оплату труда составляет *производственные затраты* (*себестоимость*) $Pc_j = Pp_j + W_j$. Откуда $Pr_j = I_j - Pc_j$ или $Pr_j = V_j - W_j$.

Четвертый квадрант таблицы МОБ, ее $(n+1)$-й диагональный элемент, — это *государственный бюджет* V_b. Он формируется как сумма всех налогов и других выплат. При этом V_b — экзогенный параметр, т. е. он, с одной стороны, соотносится с доходами прошлого года, но с другой — задается внешними управленческими решениями, ориентированными на балансировку доходов и социальных обязательств всей экономики.

Экономика находится в состоянии равновесия (является равновесной), если годовые продажи равны годовым выпускам $X_i = I_i$, а суммарная добавленная стоимость — суммарному потреблению $V = Y$. В этом случае основные балансовые соотношения, записанные в относительных величинах, примут вид [14]

$$I_i = r_{i1}I_1 + \ldots + r_{in}I_n + Yr_iI_{n+1}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

где $r_{ij} = \frac{p_{ij}}{I_j} = \frac{P_i a_{ij} In_j}{P_j In_j} = \frac{P_i a_{ij}}{P_j}$ — элементы *матрицы относительных цен* $\mathbf{R}\{r_{ij}\}$; I_{n+1} — ВВП; $Yr_i = Y_i/I_{n+1}$ — нормированные по ВВП компоненты вектора конечного потребления. Под ВВП (в руб./год) здесь и далее будем понимать сумму добавленных стоимостей V_j, созданных в производственной сфере экономики, и бюджета V_b, который рассматривается как добавленная стоимость сферы потребления.

3. Построение разностной динамической модели МОБ. Рассмотрим методологический принцип построения системы разностных уравнений, описывающей изменение объемов выпуска продукции по отраслям и ВВП. Для этого приведем снова простейшее балансовое соотношение

$$V_j = W_j + Pr_j = W_j + Tx_j + Prh_j. \tag{2}$$

Каждая из величин, представленных в (2), является некоторой долей от стоимости суммарного выпуска продукции в j-й отрасли:

$$\begin{gathered} Pp_j = rp_jI_j, \quad V_j = (1 - rp_j)I_j, \quad rp_j = \sum_{i=1}^{n} r_{ij}, \\ W_j = rw_jV_j = rw_j(1 - rp_j)I_j, \quad Pr_j = (1 - rw_j)V_j = (1 - rw_j)(1 - rp_j)I_j. \end{gathered} \tag{3}$$

В (3) rp_j — коэффициент, определяющий суммарную долю *промежуточного потребления* Pp_j в выпуске I_j, rw_j — *средняя ставка оплаты труда* в j-й отрасли.

Введем в рассмотрение *налог на прибыль* tp и будем считать, что он один и тот же для всех отраслей. Тогда, учитывая (3), получим

$$\begin{gathered} Tx_j = tpPr_j = tp(1 - rw_j)(1 - rp_j)I_j, \\ Prh_j = (1 - tp)Pr_j = (1 - tp)(1 - rw_j)(1 - rp_j)I_j. \end{gathered} \tag{4}$$

Перейдем к описанию экономической динамики. Обозначим через $I_j^{(k)}$ выпуск продукции в j-м секторе экономики в k-м отчетном периоде, будем считать, что это год. Пусть $Cp_j^{(k-1)}$ — инвестиции в основной капитал в течение предыдущего года. Основное предположение состоит в том, что прирост выпуска на конец k-го отчетного периода пропорционален инвестициям предыдущего периода:

$$Cp_j^{(k-1)} = Fe_j \left(I_j^{(k)} - I_j^{(k-1)} \right), \quad j = 1, \ldots, n, \tag{5}$$

где Fe_j — фондоемкость j-го сектора экономики [14].

Запишем систему (5) в нормальной форме

$$I_j^{(k)} = I_j^{(k-1)} + \frac{1}{Fe_j} Cp_j^{(k-1)}, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{6}$$

Более детальное представление правой части уравнений (6) зависит от конкретизации источника инвестиций и их связи с различными макроэкономическими параметрами.

Приведем соответствующие примеры. Будем считать чистую прибыль в предыдущем отчетном периоде $Prh_j^{(k-1)}$ единственным источником инвестиций, т. е.

$$Cp_j^{(k-1)} = Prh_j^{(k-1)} = (1-tp)(1-rw_j)(1-rp_j)I_j^{(k-1)}.$$

Подставив это выражение в (6) и учитывая основное балансовое уравнение (1), имеем следующую разностную систему:

$$\begin{gathered} I_j^{(k)} = I_j^{(k-1)} + \frac{1}{Fe_j}(1-tp)(1-rw_j)(1-rp_j)\times \\ \times\left(r_{j1}I_1^{(k-1)} + \ldots + r_{jn}I_n^{(k-1)} + Yr_jI_{n+1}^{(k-1)}\right), \quad j=1,\ldots,n. \end{gathered} \tag{7}$$

В системе (7) n уравнений и $n+1$ фазовая переменная. Дополнительное уравнение можно получить, описывая динамику сферы потребления (бюджетной сферы), фазовой переменной которой является $I_{n+1} =$ ВВП. Для этого введем понятие *обобщенного налога* rg, определяющего долю бюджета в ВВП: $V_b = rgI_{n+1}$. Учитывая определение ВВП как суммы всех добавленных стоимостей и формулы (3), можно записать уравнение, описывающее структуру ВВП, и добавить его в систему (1):

$$I_{n+1} = V_1 + \ldots + V_n + V_b = (1-rp_1)I_1 + \ldots + (1-rp_n)I_n + rgI_{n+1}. \tag{8}$$

Обозначим величину ВВП на конец k-го отчетного периода через $I_{n+1}^{(k)}$. Пусть $Cp_b^{(k-1)}$ — объем бюджетных инвестиций в предыдущем отчетном периоде. Тогда прирост ВВП на конец k-го отчетного периода пропорционален инвестициям предыдущего периода:

$$Cp_b^{(k-1)} = Fe_b\left(I_{n+1}^{(k)} - I_{n+1}^{(k-1)}\right), \tag{9}$$

где Fe_b — фондоемкости сферы потребления [14]. Запишем уравнение (9) в нормальной форме:

$$I_{n+1}^{(k)} = I_{n+1}^{(k-1)} + \frac{1}{Fe_b}Cp_b^{(k-1)}. \tag{10}$$

Конкретизация правой части уравнения (10) зависит от источников бюджетных инвестиций и их связи с различными макроэкономическими параметрами. Покажем один из способов, как это сделать. ВВП можно условно разделить на себестоимость бюджетной сферы и бюджетную прибыль, т. е. $I_{n+1} = Pc_b + Pr_b$. Долю Pc_b в ВВП обозначим через rs_b, тогда $Pc_b = rs_bI_{n+1}$, $Pr_b = (1-rs_b)I_{n+1}$. Предположим далее, что вся бюджетная прибыль в предыдущем отчетном периоде идет на инвестиции, т. е.

$$Cp_b^{(k-1)} = Pr_b^{(k-1)} = (1-rs_b)I_{n+1}^{(k-1)}.$$

Подставляя это выражение в (10) и учитывая структуру ВВП (8), получаем разностное уравнение, описывающее динамику бюджетной сферы:

$$I_{n+1}^{(k)} = I_{n+1}^{(k-1)} + \frac{1-rs_b}{Fe_b}\left((1-rp_1)I_1^{(k-1)} + \ldots + (1-rp_n)I_n^{(k-1)} + rgI_{n+1}^{(k-1)}\right). \tag{11}$$

Отметим, что система (7), (11) является полной, т. е. состоит из $(n+1)$-го уравнения. Она позволяет анализировать влияние основных экономических параметров, таких как rp_j, rw_j, tp, rg, rs_b, на динамику процесса производства и потребления. Систему (7), (11) можно записать в векторной форме. Для этого введем в рассмотрение вектор фазовых переменных $\mathbf{I} = (I_1, \ldots, I_n, I_{n+1})^T$. В результате находим, что

$$\mathbf{I}^{(k)} = \mathbf{D}\,\mathbf{I}^{(k-1)}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{12}$$

где $\mathbf{D} = \mathbf{E} + \mathbf{M}\widetilde{\mathbf{R}}$. При этом $\mathbf{E}$ — единичная $((n+1)\times(n+1))$-матрица,

$$\widetilde{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} & Yr_1 \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} & Yr_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n1} & \cdots & r_{nn} & Yr_n \\ 1-rp_1 & 1-rp_2 & \cdots & 1-rp_n & rg \end{pmatrix}, \tag{13}$$

$\mathbf{M}$ — диагональная матрица вида

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{(1-tp)(1-rw_1)(1-rp_1)}{Fe_1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{(1-tp)(1-rw_n)(1-rp_n)}{Fe_n} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1-rs_b}{Fe_b} \end{pmatrix}. \tag{14}$$

З а м е ч а н и е 1. Система разностных уравнений (7), (11) — один из возможных вариантов динамической модели МОБ, а ее вывод отражает методологический принцип ее построения. В некотором смысле возможна аналогия с описанием динамики механических объектов. Инвестиции $Cp_j^{(k-1)}$ (в общем случае финансовые) являются аналогом силы, приложенной к телу. Фондоемкости Fe_j — это аналоги массы, а величины приращений выпусков $I_j^{(k)} - I_j^{(k-1)}$ — ускорения, поскольку сами годовые выпуски продукции в секторах экономики $I_j^{(k)}$ представляют собой скорости производства (например, 1 млн автомобилей в год). Кроме того, при выводе системы можно выражать структурные элементы балансового соотношения (2) через другие макроэкономические параметры, чтобы отразить их влияние на правые части разностных уравнений.

Проиллюстрируем замечание 1. Для этого введем в рассмотрение коэффициент kn_j, определяющий долю чистой прибыли, которая идет на потребление Prn_j и на инвестиции Prc_j. Тогда $Prh_j = Prn_j + Prc_j$, при этом баланс (2) примет вид

$$V_j = W_j + Tx_j + Prn_j + Prc_j, \tag{15}$$

где с учетом (4)

$$Prn_j = kn_j Prh_j, \quad Prc_j = (1-kn_j)Prh_j = (1-kn_j)(1-tp)(1-rw_j)(1-rp_j)I_j. \tag{16}$$

Примем во внимание балансовое соотношение (15). Часть чистой прибыли, полученной в предыдущем отчетном периоде $Prc_j^{(k-1)}$, будем считать единственным (в данном случае) источником инвестиций, т. е. с учетом (16)

$$Cp_j^{(k-1)} = Prc_j^{(k-1)} = (1-kn_j)Prh_j^{(k-1)} = (1-kn_j)(1-tp)(1-rw_j)(1-rp_j)I_j^{(k-1)}. \tag{17}$$

Подставляя выражение (17) в (6), получаем аналог системы (7):

$$\begin{aligned} I_j^{(k)} &= I_j^{(k-1)} + \frac{1}{Fe_j}(1-kn_j)(1-tp)(1-rw_j)(1-rp_j) \times \\ &\times \left(r_{j1}I_1^{(k-1)} + \ldots + r_{jn}I_n^{(k-1)} + Yr_jI_{n+1}^{(k-1)}\right), \quad j = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{18}$$

Система (18), (11) и есть та модификация модели (7), (11), о которой идет речь в замечании 1. Ее векторная запись формально совпадает с (12). При этом матрица $\widetilde{\mathbf{R}}$ не меняется, а у матрицы $\mathbf{M}$ по диагонали в первых n строках стоят соответствующие величины из уравнений (18). Особо отметим, что обе эти модели описывают один и тот же процесс динамики развития экономики региона. Отличие состоит в том, что вторая модель построена с учетом большей детализации балансового соотношения (2) (см. (15)). Это привело к возможности изучать влияние большего числа экономических показателей. К группе параметров rp_j, rw_j, tp, rg, rs_b добавляются величины kn_j.

4. Управляемые разностные динамические модели МОБ. В п. 3 было показано, как внутренние резервы экономической системы в виде чистой прибыли секторов экономики или ее отдельные части превращаются в инвестиции, которые, в свою очередь, инициируют динамику развития региона. При этом очевидно, что инвестиции могут иметь внешнюю природу. В таком случае они являются управляющим воздействием (внешней силой), способным изменить динамику в соответствии с заранее сформулированными целями развития. Система (12)–(14) в данном случае примет вид линейной управляемой разностной системы:

$$\mathbf{I}^{(k)} = \mathbf{D}\,\mathbf{I}^{(k-1)} + \mathbf{Q}\mathbf{u}^{(k-1)}, \quad 0 \leqslant u_j^{(k-1)} \leqslant L_j, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{19}$$

где $\mathbf{u}^{(k-1)} = (u_1^{(k-1)}, \ldots, u_{n+1}^{(k-1)})^T$ — вектор управлений (инвестиций) в предыдущем отчетном периоде; L_j, $j = 1, \ldots, n+1$, — неотрицательные константы, определяющие естественные ограничения на управления; $\mathbf{Q}$ — диагональная матрица, по диагонали которой стоят либо нули, либо единицы, в зависимости от того, какой из секторов экономики получает доступ к инвестиционным программам.

Обратим внимание на другие возможности управления. Выше уже отмечалось, что многие макроэкономические параметры экзогенные, т. е. задаются внешними управленческими решениями. Покажем, как этот факт можно отразить в предложенной модели.

Рассмотрим случай, когда управляемым параметром является налог на прибыль. Через tp будем обозначать базовую ставку налога, а через u_{tp} — его вариацию (управление), удовлетворяющую естественным экономическим ограничениям: $|u_{tp}| \leqslant u_{tp}^*$, где u_{tp}^* — некоторая положительная величина. Тогда $tp + u_{tp}$ — это «плавающая» ставка налога, а первые n диагональных элементов матрицы $\mathbf{M}$ (см. (14)) можно записать так:

$$(1 - tp - u_{tp})\beta_i, \quad \beta_i = \frac{(1-rw_i)(1-rp_i)}{Fe_i}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

В этом случае модифицированная матрица примет вид

$$\widetilde{\mathbf{M}} = \mathbf{M} + u_{tp}\mathbf{M}_0, \quad \mathbf{M}_0 = \mathrm{diag}(-\beta_1, \ldots, -\beta_n, 0), \tag{20}$$

здесь $\mathbf{M}$ — матрица (14). Учитывая представление (20), получим следующую модификацию системы (19):

$$\mathbf{I}^{(k)} = \mathbf{D}\,\mathbf{I}^{(k-1)} + \mathbf{Q}\mathbf{u}^{(k-1)} + u_{tp}\mathbf{D}_0\mathbf{I}^{(k-1)}, \quad 0 \leqslant u_j \leqslant L_j, \quad |u_{tp}| \leqslant u_{tp}^*. \tag{21}$$

В системе (21) $\mathbf{D}_0 = \mathbf{M}_0\widetilde{\mathbf{R}},\ j = 1, \ldots, n+1,\ k = 1, 2, \ldots$.

Далее рассмотрим случай, когда управляемыми параметрами являются вариации средних ставок оплаты труда в секторах экономики rw_i. Для базовых ставок сохраним обозначение rw_i, а их вариации (управления) обозначим u_{wi}. Введем естественное ограничение, отражающее экономический смысл этих величин $|u_{wi}| \leqslant u_{wi}^*$, где u_{wi}^* — некоторые положительные константы. Тогда первые n диагональных элементов модифицированной матрицы (14) имеют вид

$$(1 - rw_i - u_{wi})\gamma_i, \quad \gamma_i = \frac{(1 - tp)(1 - rp_i)}{Fe_i}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

а сама матрица может быть записана в форме

$$\widetilde{\mathbf{M}} = \mathbf{M} + \sum_{i=1}^{n} u_{wi}\mathbf{M}_i, \quad \mathbf{M}_i = \operatorname{diag}(0, \ldots, 0, -\gamma_i, 0, \ldots, 0), \tag{22}$$

в которой $\mathbf{M}$ — матрица (14). Учитывая представление (22), получим такую модификацию системы (19):

$$\mathbf{I}^{(k)} = \mathbf{D}\,\mathbf{I}^{(k-1)} + \mathbf{Q}\mathbf{u}^{(k-1)} + \sum_{i=1}^{n} u_{wi}\mathbf{D}_i\mathbf{I}^{(k-1)}, \quad 0 \leqslant u_j \leqslant L_j, \quad |u_{wi}| \leqslant u_{wi}^*. \tag{23}$$

В системе (23) $\mathbf{D}_i = \mathbf{M}_i\widetilde{\mathbf{R}},\ j = 1, \ldots, n+1,\ i = 1, \ldots, n,\ k = 1, 2, \ldots$.

З а м е ч а н и е 2. Системы (21), (23) относятся к классу билинейных управляемых систем, поскольку их правые части содержат в качестве слагаемых произведения управляемых параметров и фазовых переменных.

В заключение рассмотрим наиболее общий случай, когда управляемыми параметрами одновременно являются вариации средних ставок оплаты труда rw_i и налога на прибыль tp. Сохраняя введенные обозначения переменных, запишем представление диагональных элементов модифицированной матрицы (14) таким образом:

$$(1 - tp - u_{tp})(1 - rw_i - u_{wi})\nu_i, \quad \nu_i = \frac{(1 - rp_i)}{Fe_i}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

или

$$\big((1 - tp)(1 - rw_i) - (1 - tp)u_{wi} - (1 - rw_i)u_{tp} + u_{tp}u_{wi}\big)\nu_i.$$

Сама матрица может быть представлена в форме

$$\widetilde{\mathbf{M}} = \mathbf{M} + u_{tp}\widetilde{\mathbf{M}}_0 + \sum_{i=1}^{n} u_{wi}\widetilde{\mathbf{M}}_i + u_{tp}\mathbf{U}_w\mathbf{V}, \tag{24}$$

где $\mathbf{M}$ — матрица (14),

$$\widetilde{\mathbf{M}}_0 = \operatorname{diag}((rw_1 - 1)\nu_1, \ldots, (rw_n - 1)\nu_n, 0), \quad \widetilde{\mathbf{M}}_i = \operatorname{diag}(0, \ldots, 0, (tp - 1)\nu_i, 0, \ldots, 0),$$

$$\mathbf{U}_w = \operatorname{diag}(u_{w1}, \ldots, u_{wn}, 0), \quad \mathbf{V} = \operatorname{diag}(\nu_1, \ldots, \nu_n, 0).$$

Отметим, что диагональными элементами матрицы $\mathbf{U}_w$ являются управляемые параметры. Учитывая представление (24), получим соответствующую модификацию системы (19):

$$\begin{gathered}\mathbf{I}^{(k)} = \mathbf{D}\,\mathbf{I}^{(k-1)} + \mathbf{Q}\mathbf{u}^{(k-1)} + u_{tp}\widetilde{\mathbf{D}}_0\mathbf{I}^{(k-1)} + \sum_{i=1}^{n} u_{wi}\widetilde{\mathbf{D}}_i\mathbf{I}^{(k-1)} + u_{tp}\mathbf{U}_w\widetilde{\mathbf{V}}\mathbf{I}^{(k-1)}, \\ 0 \leqslant u_j \leqslant L_j, \quad |u_{tp}| \leqslant u_{tp}^*, \quad |u_{wi}| \leqslant u_{wi}^*, \quad k = 1, 2, \ldots .\end{gathered} \tag{25}$$

В системе (25) $\widetilde{\mathbf{D}}_0 = \widetilde{\mathbf{M}_0}\widetilde{\mathbf{R}}$, $\widetilde{\mathbf{D}}_i = \widetilde{\mathbf{M}_i}\widetilde{\mathbf{R}}$, $\widetilde{\mathbf{V}} = \mathbf{V}\widetilde{\mathbf{R}}$, $j = 1, \ldots, n+1$, $i = 1, \ldots, n$.

Заметим, что (25) — это нелинейная управляемая система, поскольку ее правые части являются полиномами второй степени относительно управляемых параметров.

5. Реализации инвестиционных программ. Сценарный подход. Прогнозирование макроэкономических тенденций осуществляется на основе разностной динамической модели МОБ (12)–(14). Общий алгоритм решения этой задачи состоит из двух частей. Во-первых, необходима статистическая оценка всех основных макроэкономических показателей региона. Конечная цель при этом — идентификация элементов матрицы $\mathbf{D}$ системы (12). А во-вторых, требуется построить решение получившейся системы, соответствующее реальным начальным данным. Это можно сделать, применив методы, представленные в [18]. Оценку адекватности модели можно осуществить на основе статистической информации об экономике региона за прошлые годы.

Для решения задачи управления инвестиционными программами можно использовать управляемые системы (19), (21), (23), (25). С экономической точки зрения интерес представляют следующие задачи: для запланированного роста производства разработать план инвестиций для каждого сектора экономики; затем обеспечить не только контроль реализации инвестиционных проектов, но и их коррекцию в режиме реального времени по мере необходимости на основе принципа обратной связи. С математической точки зрения первая задача есть задача программного управления, а вторая — задача стабилизации программного режима функционирования объекта управления [16, 17]. Поскольку они неразрывно связаны, то сначала рассмотрим суть сценарного подхода реализации программных управлений.

Для того чтобы адаптировать методы математической теории управления к прикладным задачам управления экономикой, введем понятие *инвестиционного сценария*. Под этим термином будем понимать определенность по следующим позициям: 1) горизонт планирования T — отрезок времени (в годах), на котором планируются инвестиции; 2) контрольные моменты дискретного времени $k_0, \ldots, k_N \in [k_0, k_0 + T]$; 3) контрольные показатели, которым должны удовлетворять фазовые переменные в контрольные моменты времени $I_{ij} = I_i(k_j)$, $i = 1, \ldots, n+1$, $j = 0, \ldots, N$, здесь могут быть условия и более общего вида. В качестве основной модели макроэкономической динамики будем рассматривать управляемую систему (19).

Покажем общую схему решения задачи планирования инвестиционной программы на горизонте T для заданной пары начальных и конечных данных по вектору выпуска продукции секторов экономики. При $k_0 = 0$ имеем $\mathbf{I}(0) = \mathbf{I}_0$, $\mathbf{I}(T) = \mathbf{I}_1$. По сути, это задача обеспечения планового роста экономики. Для ее строгой постановки нужно зафиксировать в процентном отношении желаемое увеличение выпуска по каждой компоненте начального вектора $\mathbf{I}_0$, чтобы задать вектор $\mathbf{I}_1$. Допустимым управлением будет последовательность векторов $\mathbf{u}^{(0)}, \mathbf{u}^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}^{(T-1)}$. Она называется *программным управлением*, если решает поставленную задачу перевода системы (19) из состояния $\mathbf{I}_0$ в $\mathbf{I}_1$.

Для построения программного управления запишем общее решение системы (19) в форме Коши и в момент времени $k = T$ приравняем его к заданному вектору $\mathbf{I}_1$. Получим систему уравнений относительно векторов $\mathbf{u}^{(0)}, \mathbf{u}^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}^{(T-1)}$:

$$\mathbf{D}^{T-1}\mathbf{Q}\mathbf{u}^{(0)} + \ldots + \mathbf{D}\mathbf{Q}\mathbf{u}^{(T-2)} + \mathbf{Q}\mathbf{u}^{(T-1)} = \mathbf{I}_1 - \mathbf{D}^T\mathbf{I}_0. \tag{26}$$

Матрица системы (26) имеет блочную структуру $\mathbf{A} = \big(\mathbf{D}^{T-1}\mathbf{Q}, \ldots, \mathbf{D}\mathbf{Q}, \mathbf{Q}\big)$. Критерий ее совместности, $\operatorname{rang}\mathbf{A} = \operatorname{rang}\big(\mathbf{A}, \mathbf{I}_1 - \mathbf{D}^T\mathbf{I}_0\big)$, является необходимым и достаточным условием существования программного управления для пары состояний $\mathbf{I}_0$, $\mathbf{I}_1$, т. е. возможности реализации данного инвестиционного сценария. Заметим, что система (26) при условии ее совместности может иметь многообразие решений. В этом случае становится актуальной задача об оптимальном программном управлении в соответствие с некоторым критерием качества.

Для коррекции инвестиционных программ следует ввести дополнительное управляющее воздействие, которое принято называть стабилизирующим управлением. Если в рамках некоторого сценария реализуется программный режим инвестиций $\mathbf{u}_p(k) = \mathbf{u}^{(k)}$, $k = 0, \ldots, T-1$, и соответствующий плановый выпуск продукции $\mathbf{I}_p(k) = \mathbf{I}^{(k)}$, $k = 0, \ldots, T-1$, то его коррекция возможна по закону линейной обратной связи $\mathbf{v}_s = \mathbf{L}(\mathbf{I}(k) - \mathbf{I}_p(k))$. Здесь вектор разности $\mathbf{I}(k) - \mathbf{I}_p(k)$ характеризует меру отклонения реального выпуска от планового в k-м периоде. Общий алгоритм решения задачи стабилизации (построения матрицы $\mathbf{L}$) и разнообразные примеры его реализации можно найти в [19]. Результирующее управление для системы (19) примет вид

$$\mathbf{u}(k) = \mathbf{u}_p(k) + \mathbf{L}(\mathbf{I}(k) - \mathbf{I}_p(k)). \tag{27}$$

Оно описывает научно обоснованную программу инвестирования и алгоритм ее коррекции в процессе реализации для каждого сектора экономики.

6. Заключение. Отметим ключевые моменты и возможные направления дальнейших исследований. В работе предложен регулярный метод построения матриц коэффициентов системы разностных уравнений, что делает данный класс моделей удобным для различных приложений. Вектор фазовых переменных включает в себя ВВП, что обеспечивает полноту модели и выгодно отличает ее от остальных аналогов. Описанные алгоритмы построения программных и стабилизирующих управлений (коррекции инвестиционных программ) для системы (19) — это лишь базовые варианты приложений теории управления в экономической динамике. Так, рассмотренный выше алгоритм стабилизации неявно предполагает, что отклонения полностью доступны для измерения, т. е. имеет место случай так называемой полной обратной связи. В реальности это далеко не всегда возможно. В таком случае могут быть задействованы методы синтеза специальных идентификаторов состояния системы, которые позволяют по наблюдениям восстановить полный вектор отклонений для дальнейшего использования в каналах стабилизирующих обратных связей. Данный класс задач называется стабилизацией при неполной обратной связи [17, 19].

Для построенных динамических моделей МОБ не менее актуальны задачи многоцелевого синтеза, когда необходимо учитывать различные дополнительные ограничения на фазовые переменные и управляющие величины [20–25]. Решение задачи построения и реализации результирующего управления (27) также перспективно. В настоящее время развивается многопрограммный подход, который обобщает проблему обеспечения устойчивости программного режима функционирования объекта управления на случай заданного множества программных движений. Основоположником этого направления является В. И. Зубов [26]. Примеры постановок задач многопрограммного управления и методов их решения, в том числе и для задач управления экономическими объектами, можно найти в работах [27–29].

Литература

1. *Леонтьев В. В.* Межотраслевая экономика / пер. с англ. А. Г. Гранберг. М.: Экономика, 1997. 479 с.

2. *Канторович Л. В.* Математические методы организации и планирования производства. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1939. 68 с.

3. *Ведута Н. И.* Социально эффективная экономика. М.: Рос. эконом. академия, 1999. 254 с.

4. *Гранберг А. Г.* Динамические модели народного хозяйства. М.: Экономика, 1985. 240 с.

5. *Ефимов В. А.* Методология экономического обеспечения демографической политики устойчивого развития. СПб.: Сев.-зап. академия гос. службы, 2007. 184 с.

6. *Величко М. В., Ефимов В. А., Зазнобин В. М.* Экономика инновационного развития. Управленческие основы экономической теории. М.: Концептуал, 2017. 584 с.

7. *Карганов С. А.* Об ошибочности использования в народнохозяйственном планировании экономико-математической модели В. Леонтьева и межотраслевых балансов «затраты — выпуск» // Административно-управленческий портал. URL: http://www. aup.ru/articles/economics/12.htm#_ftn1 (дата обращения: 18 января 2023 г.).

8. International Input — Output Association (IIOA) // Официальный сайт ассоциации IIOA. URL: http://www.iioa.org/ (дата обращения: 18 января 2023 г.).

9. World Input — Output Database (WIOD) // Официальный сайт WIOD. URL: http://www.wiod.org/new_site/home.htm (дата обращения: 18 января 2023 г.).

10. The Organisation for Economic Co-operation and Development (OECD) // Официальный сайт OECD. URL: http://www.oecd.org/ (дата обращения: 18 января 2023 г.).

11. Росстат // Официальный сайт Росстата. URL: http://www.gks.ru/ (дата обращения: 18 января 2023 г.).

12. *Федосеев В. В., Гармаш А. Н., Дайитбегов Д. М., Орлова И. В., Половников В. А.* Экономико-математические методы и прикладные модели / под ред. В. В. Федосеева. М.: ЮНИТИ, 1999. 391 с.

13. *Тарасевич Л. С., Гребенников П. И., Леусский А. И.* Макроэкономика: учебник. М.: Высшее образование, 2006. 654 с.

14. Межотраслевой баланс: анализ динамики и управление макроэкономическими тенденциями: учеб. пособие для вузов / под ред. Н. В. Смирнова. СПб.: Лань, 2021. 180 с.

15. Handbook of Input — Output Analysis / ed. by Thijs ten Raa. Massachusetts: Edward Elgar Publishing Inc., 2017. 512 p.

16. *Зубов В. И.* Лекции по теории управления. СПб.: Лань, 2009. 496 с.

17. *Андреев Ю. Н.* Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1976. 424 с.

18. *Александров А. Ю., Жабко А. П., Платонов А. В.* Устойчивость движений дискретных динамических систем. СПб.: Издат. дом Федоровой Г. В., 2015. 154 с.

19. *Смирнов Н. В., Смирнова Т. Е., Тамасян Г. Ш.* Стабилизация программных движений при полной и неполной обратной связи. СПб.: Лань, 2016. 128 с.

20. *Smirnov N. V., Smirnov A. N., Smirnova M. A., Smirnov M. N.* Combined control synthesis algorithm // 2017 Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (dedicated to the memory of V. F. Demyanov), CNSA 2017 — Proceedings. St. Petersburg, 2017. P. 194–196.

21. *Smirnova M. A., Smirnov M. N., Smirnova T. E., Smirnov N. V.* Multipurpose control laws in motion control systems // Information (Japan). 2017. Vol. 20(4). P. 2265–2272.

22. *Smirnov M. N., Smirnova M. A., Smirnova T. E., Smirnov N. V.* The problem of synthesis the control laws with uncertainties in external disturbances // Lecture Notes in Engineering and Computer Science. 2017. Vol. 2227. P. 276–279.

23. *Smirnov M. N., Smirnova M. A., Smirnova T. E., Smirnov N. V.* The issues of multipurpose control laws construction // Lecture Notes in Engineering and Computer Science. 2017. Vol. 2227. P. 194–196.

24. *Smirnova M. A., Smirnov M. N.* Multipurpose control laws in trajectory tracking problem // International Journal of Applied Engineering Research. 2016. Vol. 11(22). P. 11104–11109.

25. *Смирнова М. А., Смирнов М. Н., Смирнов Н. В.* Система многоцелевого управления

роботом-манипулятором // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2022. Т. 18. Вып. 4. С. 620–629. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2022.415

26. *Зубов В. И.* Синтез многопрограммных устойчивых управлений // Докл. АН СССР. 1991. Т. 318. № 2. С. 274–277.

27. *Смирнов Н. В.* Задачи многопрограммного управления и стабилизации в различных классах динамических систем // Труды Средневолжск. матем. об-ва. 2005. Т. 7. № 1. С. 192–201.

28. *Смирнов Н. В., Смирнова Т. Е., Шахов Я. А.* Стабилизация заданного набора положений равновесия нелинейных систем // Известия РАН. Теория и системы управления. 2012. № 2. С. 3–9.

29. *Smirnov N. V., Smirnova T. E., Smirnov M. N., Smirnova M. A.* Multiprogram digital control // Proceedings of the International Multiconference of Engineers and Computer Scientists, IMECS 2014. March 12–14. Hong Kong, 2014. Vol. 1. P. 268–271.

Статья поступила в редакцию 26 декабря 2022 г.
Статья принята к печати 19 января 2023 г.

Контактная информация:

Смирнов Николай Васильевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; n.v.smirnov@spbu.ru

Смирнова Татьяна Евгеньевна — канд. физ.-мат. наук, доц.; t.smirnova@spbu.ru

Смирнова Мария Александровна — канд. физ.-мат. наук, ст. преп.; mariya.smirnova@spbu.ru

Смирнов Михаил Николаевич — канд. физ.-мат. наук, доц.; mikhail.smirnov@spbu.ru

Difference dynamic input — output models

N. V. Smirnov, T. E. Smirnova, M. A. Smirnova, M. N. Smirnov

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg,
199034, Russian Federation

For citation: Smirnov N. V., Smirnova T. E., Smirnova M. A., Smirnov M. N. Difference dynamic input — output models. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2023, vol. 19, iss. 1, pp. 51–64.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.105 (In Russian)

In this work, the object of study is the economy of the region. To describe it, a regular method for constructing difference input — output dynamic models is proposed. This approach involves modeling not only the sphere of production, but also the sphere of consumption. To do this, the vector of phase variables includes the gross domestic product. The variability of the model consists in the ability to take into account various macroeconomic parameters depending on the ultimate goals of analysis and control of macroeconomic trends. It is shown that the dynamics of the economy with direct investment in various sectors of the economy is described by linear controlled difference systems. If there is a need to take into account other macroeconomic parameters that increase the sensitivity of the model to managerial influences, then this leads to nonlinear difference systems of various types. In the final part of the article, a scenario approach for the development of investment projects is described. This approach is based on the principles of constructing program controls and stabilizing the corresponding program movements of a controlled difference system.

Keywords: dynamic input — output model, difference equations, scenario approach, program controls, stabilization.

References

1. Leontief W. W. *Input — output economics.* New York, Oxford, Oxford University Press, 1986, 448 p. (Rus. ed.: Leontiev V. V. *Mezhotraslevaya ekonomika.* Trans. from English by A. G. Granberg. Moscow, Economika Publ., 1997, 479 p.)

2. Kantorovich L. V. *Matematicheskie metody organizatsii i planirovaniya proizvodstva* [*Mathematical methods of organizing and planning production*]. Leningrad, Lenigrad University Press, 1939, 68 p. (In Russian)

3. Veduta N. I. *Sotsial'no effektivnaya jkonomika* [*Socially efficient economy*]. Moscow, Russian Academy of Economics Press, 1999, 254 p. (In Russian)

4. Granberg A. G. *Dinamicheskie modeli narodnogo hozyajstva* [*Dynamical models of the economy*]. Moscow, Economics Publ., 1985, 240 p. (In Russian)

5. Efimov V. A. *Metodologiya jkonomicheskogo obespecheniya demograficheskoj politiki ustojchivogo razvitiya* [*Methodology of economy support for demographics policies of stable development*]. St. Petersburg, North-West Academy of Civil Service Publ., 2007, 184 p. (In Russian)

6. Velichko M. V., Efimov V. A., Zaznobin V. M. *Jkonomika innovacionnogo razvitiya. Upravlencheskie osnovy jkonomicheskoj teorii* [*Economics of innovative development. Control foundations of economic theory*]. Moscow, Kontseptual Publ., 2017, 584 p. (In Russian)

7. Karganov S. A. Ob oshibochnosti ispol'zovaniya v narodnohozyajstvennom planirovanii jkonomiko-matematicheskoj modeli V. Leont'eva i mezhotraslevyh balansov "zatraty — vypusk" [On the fallacy of using the economic and mathematical model of W. Leontiev and intersectoral balances "input — output" in national economic planning]. *Administrative and management portal.* Available at: http://www. aup.ru/articles/economics/12.htm#_ftn1 (accessed: January 18, 2023). (In Russian)

8. International Input — Output Association (IIOA). *The official website of the IIOA.* Available at: http://www.iioa.org/ (accessed: January 18, 2023).

9. World Input — Output Database (WIOD). *The official website of the WIOD.* Available at: http://www.wiod.org/new_site/home.htm (accessed: January 18, 2023).

10. The Organisation for Economic Co-operation and Development (OECD). *The official website of the OECD.* Available at: http://www.oecd.org/ (accessed: January 18, 2023).

11. Rosstat. *The official website of the Rosstat.* Available at: http://www.gks.ru/ (accessed: January 18, 2023).

12. Fedoseev V. V., Garmash A. N., Daiitbegov D. M., Orlova I. V., Polovnikov V. A. *Jkonomiko-matematicheskie metody i prikladnye modeli* [*Economic-mathematical methods and applied models*]. Ed. by V. V. Fedoseev. Moscow, IUNITI Publ., 1999, 391 p. (In Russian)

13. Tarasevich L. S., Grebennikov P. I., Leusskii A. I. *Makrojkonomika.* Uchebnik [*Macroeconomics.* The textbook]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 2006, 654 p. (In Russian)

14. *Mezhotraslevoj balans: analiz dinamiki i upravlenie makrojkonomicheskimi tendenciyami.* Uchebnoe posobie dlya vuzov [*Intersectoral balance: analysis of dynamics and control of macroeconomic trends.* The textbook for universities]. Under ed. N. V. Smirnov. St. Petersburg, Lan' Press, 2021, 180 p. (In Russian)

15. *Handbook of Input — Output Analysis.* Ed. by Thijs ten Raa. Massachusetts, Edward Elgar Publishing, Inc., 2017, 512 p.

16. Zubov V. I. *Lektsii po teorii upravleniya* [*Lectures on control theory*]. St. Petersburg, Lan' Publ., 2009, 496 p. (In Russian)

17. Andreev Yu. N. *Upravlenie konechnomernymi linejnymi ob'ektami* [*Control of finite linear objects*]. Moscow, Nauka Publ., 1976, 424 p. (In Russian)

18. Aleksandrov A. Yu., Zhabko A. P., Platonov A. V. *Ustojchivost' dvizhenij diskretnyh dinamicheskih sistem* [*Stability of motions of discrete dynamical systems*]. St. Petersburg, Publishing House Fedorova G. V., 2015, 154 p. (In Russian)

19. Smirnov N. V., Smirnova T. Ye., Tamasyan G. Sh. *Stabilizatsiya programmnyh dvizhenij pri polnoj i nepolnoj obratnoj svyazi* [*Stabilization of program motions at full and incomplete feedback*]. St. Petersburg, Lan' Publ., 2016, 128 p. (In Russian)

20. Smirnov N. V., Smirnov A. N., Smirnova M. A., Smirnov M. N. Combined control synthesis algorithm. *2017 Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (dedicated to the memory of V. F. Demyanov), CNSA 2017 — Proceedings.* St. Petersburg, 2017, pp. 194–196.

21. Smirnova M. A., Smirnov M. N., Smirnova T. E., Smirnov N. V. Multipurpose control laws in motion control systems. *Information (Japan)*, 2017, vol. 20(4), pp. 2265–2272.

22. Smirnov M. N., Smirnova M. A., Smirnova T. E., Smirnov N. V. The problem of synthesis the control laws with uncertainties in external disturbances. *Lecture Notes in Engineering and Computer Science*, 2017, vol. 2227, pp. 276–279.

23. Smirnov M. N., Smirnova M. A., Smirnova T. E., Smirnov N. V. The issues of multipurpose control laws construction. *Lecture Notes in Engineering and Computer Science*, 2017, vol. 2227, pp. 194–196.

24. Smirnova M. A., Smirnov M. N. Multipurpose control laws in trajectory tracking problem. *International Journal of Applied Engineering Research*, 2016, vol. 11(22), pp. 11104–11109.

25. Smirnova M. A., Smirnov M. N., Smirnov N. V. Sistema mnogocelevogo upravleniya robotom-manipulyatorom [Multipurpose robotic arm control system]. *Vestnik of Saint Petersburg University.*

Applied Mathematics. Computer Sciences. Control Processes, 2022, vol. 18, iss. 4, pp. 620–629. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2022.415 (In Russian)

26. Zubov V. I. Sintez mnogoprogrammnyh ustojchivyh upravlenij [Synthesis of multiprogram stable controls]. *Reports of Sciences Academy of the USSR*, 1991, vol. 318, no. 2, pp. 274–277. (In Russian)

27. Smirnov N. V. Zadachi mnogoprogrammnogo upravleniya i stabilizatsii v razlichnyh klassah dinamicheskih sistem [Problems of multiprogram control and stabilization in various classes of dynamical systems]. *Proceedings of the Srednevolzhsk Mathematical Society*, 2005, vol. 7, no. 1, pp. 192–201. (In Russian)

28. Smirnov N. V., Smirnova T. E., Shakhov Ya. A. Stabilizatsiya zadannogo nabora polozhenij ravnovesiya nelineynyh sistem [Stabilization of a given set of equilibrium states of nonlinear systems]. *Izvestiya RAN. Theory and control systems*, 2012, no. 2, pp. 3–9. (In Russian)

29. Smirnov N. V., Smirnova T. E., Smirnov M. N., Smirnova M. A. Multiprogram digital control. *Proceedings of the International Multiconference of Engineers and Computer Scientists, IMECS 2014, March 12–14*. Hong Kong, 2014, vol. 1, pp. 268–271.

Received: December 26, 2022.
Accepted: January 19, 2023.

Authors' information:

Nikolay V. Smirnov — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; n.v.smirnov@spbu.ru

Tatiana E. Smirnova — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor; t.smirnova@spbu.ru

Maria A. Smirnova — PhD in Physics and Mathematics, Senior Lecturer; mariya.smirnova@spbu.ru

Mikhail N. Smirnov — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor; mikhail.smirnov@spbu.ru