УДК 532.5, 536.2 Вестник СПбГУ. Прикладная математика. Информатика... 2022. Т. 18. Вып. 4
MSC 76F05, 80F99

Степенное обобщение линейных определяющих уравнений тепло-массообмена и вытекающие из них варианты записи уравнений переноса импульса, тепла и диффузии*

В. А. Павловский

Санкт-Петербургский государственный морской технический университет,
Российская Федерация, 190121, Санкт-Петербург, Лоцманская ул., 3

Для цитирования: *Павловский В. А.* Степенное обобщение линейных определяющих уравнений тепло-массообмена и вытекающие из них варианты записи уравнений переноса импульса, тепла и диффузии // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2022. Т. 18. Вып. 4. С. 527–534.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2022.407

В настоящее время при решении задач тепло-массообмена используются линейные определяющие уравнения: 1) в гидродинамике тензор вязких напряжений пропорционален тензору скоростей деформаций (реологическое соотношение Ньютона); 2) в теплопередаче плотность теплового потока линейно связана с градиентом температуры (закон теплопроводности Фурье); 3) в массообмене плотность диффузионного потока пропорциональна градиенту концентрации (закон Фика). При записи этих линейных определяющих уравнений применяются коэффициенты пропорциональности, которые называются коэффициентами вязкости, теплопроводности и диффузии соответственно. Такие уравнения широко используются для описания процессов тепло-массопереноса при ламинарном режиме течения. Для турбулентных течений данные уравнения непригодны, приходится вводить в рассмотрение эмпирические турбулентные коэффициенты вязкости μ_t, теплопроводности λ_t и диффузии D_t. Однако для изучения турбулентных течений можно пойти и другим путем — модифицировать линейные определяющие соотношения за счет придания им нелинейного степенного вида. Были выполнены двухпараметрические степенные обобщения формул Ньютона, Фурье и Фика для касательного напряжения, плотности теплового потока и диффузии, которые в зависимости от значения показателей степеней могут использоваться для оценки процессов тепло-массообмена как при ламинарном, так и при турбулентном течении жидкости. Также это обобщение может быть применено для описания поведения степенных жидкостей и течений растворов полимеров, проявляющих эффект Томса.

Ключевые слова: гидродинамика, теплопередача, диффузия, формулы Ньютона, Фурье, Фика, степенные обобщения, турбулентность.

1. Введение. Определяющие уравнения для процессов переноса характеризуют количество переносимой субстанции через единицу площади за единицу времени. Если обозначить массу m (в кг), скорость w (в м/с), то размерности переносимых субстанций выражаются через них. В уравнениях тепло-массообмена такими субстанциями, переносимыми через единицу площади за единицу времени, являются импульс (количество движения) $m \cdot w$ для касательного напряжения τ, энергия $m \cdot w^2$ (с точностью до множителя $1/2$) для плотности теплового потока q, масса m для плотности

* Исследование проводилось в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации на выполнение научно-исследовательских работ № 075-03-2020-094/1 от 10 июня 2020 г.

диффузионного потока j. Тогда размерности этих субстанций

$$[\tau] = \frac{[\text{импульс}]}{\text{м}^2 \cdot \text{с}},\ [q] = \frac{[\text{теплота}]}{\text{м}^2 \cdot \text{с}},\ [j] = \frac{[\text{масса примеси}]}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}$$

или в соответствии с размерностями величин m и w:

$$[\tau] = \frac{[mw]}{\text{м}^2 \cdot \text{с}} = \frac{\text{кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} \cdot \frac{1}{\text{м}^2} = \frac{\text{н}}{\text{м}^2} = \text{Па},$$

$$[q] = \frac{[mw^2]}{\text{м}^2 \cdot \text{с}} = \frac{\text{кг} \cdot \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2} \cdot \frac{1}{\text{с}} \cdot \frac{1}{\text{м}^2} = \frac{\text{Дж}}{\text{с}} \cdot \frac{1}{\text{м}^2} = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2},$$

$$[j] = \frac{[m]}{\text{м}^2 \cdot \text{с}} = \frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}.$$

Видно, что размерность величины τ — $\rho \cdot w^2$, размерность q — $\rho \cdot w^3$, размерность j — $\rho \cdot w$. Ориентируясь на эти выражения, в которых содержатся размерности плотности в первой степени, умноженные на размерности степеней скорости, выполним двухпараметрические степенные обобщения формул Ньютона, Фурье и Фика.

Далее рассмотрим определяющие соотношения Ньютона, Фурье, Фика [1], пригодные для характеристики ламинарных процессов тепло-массообмена и выполним их степенные обобщения с целью получения возможности описания процессов и в турбулентном режиме течения. При этом окончательные формулы переносимых субстанций будут содержать произведения плотности на соответствующие степени скоростей.

2. Трение. Приведем для касательного напряжения при обтекании плоской поверхности формулу Ньютона

$$\tau = \rho\nu\frac{du}{dy},$$

в которой ρ — плотность, ν — кинематическая вязкость, u — продольная скорость жидкой частицы, y — поперечная координата. Ее можно обобщить [2–4] в следующем виде:

$$\tau = \rho\chi_n\left(v\frac{du^{(2n-1)}}{dy}\right)^{1/n}. \tag{1}$$

В этом выражении χ_n — безразмерный коэффициент, зависящий от показателя степени n, являющегося положительной величиной. При $n = 1$, $\chi_n = 1$ формула (1) приводит к реологическому соотношению Ньютона и в итоге к формуле Пуазейля для ламинарного течения в трубе. При $n = 4$, $\chi_n = 0,019746$ эта формула дает реологическое соотношение для турбулентного течения жидкости в трубе и формуле Блазиуса для коэффициента сопротивления. В (1) в качестве множителя при плотности выступает величина, размерность которой равна размерности квадрата скорости, что и следовало ожидать.

Формулу (1) можно также обобщить на трехмерный случай течения и записать в тензорном виде реологическое соотношение для тензора вязких напряжений $\underline{\tau}$ при произвольном значении показателя n:

$$\underline{\tau} = 2B\left(\frac{\overline{w}\cdot\overline{w}}{\sqrt{Y_2}}\right)^{n-1/n}\underline{S}. \tag{2}$$

Для краткости записи примем, что

$$B = \rho\chi_n(2n-1)^{1/n}v^{1/n} \tag{3}$$

и величина Y_2 — инвариант тензора скоростей деформация $\underline{S}$:

$$Y_2 = 1/2 S_{ij}S_{ji}, \quad S = \frac{1}{2}(\overline{\nabla}\overline{w} + (\overline{\nabla}\overline{w})^{\mathrm{T}}).$$

В (2) и (3) $\overline{w}$ — вектор скорости, $\overline{\nabla}$ — вектор Гамильтона (набла), Т — символ транспортирования. Безразмерная величина χ_n определяется из опыта для каждого значения n.

Уравнение движения жидкости в напряжениях будет содержать дивергенцию тензора $\underline{\tau}$:

$$\rho\frac{d\overline{w}}{dt} = -\overline{\nabla}p + \overline{\nabla}\underline{\tau}. \tag{4}$$

Здесь $\frac{d}{dt}$ — оператор материальной производной, $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{w}\cdot\overline{\nabla}$, p — давление, массовыми силами пренебрегаем. Тогда при $n = 4$ уравнение движения (4) в скалярном виде для описания турбулентных течений в «блазиусовском» диапазоне чисел Рейнольдса (для течения в трубе, приводящее к формуле Блазиуса при $10^4 < \mathrm{Re} < 10^6$) будет иметь вид

$$\rho\frac{dw_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho\chi_n(7v)^{1/4}\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\left(\frac{w_S\cdot w_S}{\sqrt{Y_2}}\right)^{3/4}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_k} + \frac{\partial w_k}{\partial x_i}\right)\right], \tag{5}$$

где безразмерная величина $\chi_n = 0.019746$.

Уравнение (5) пригодно для описания турбулентных течений в «блазиусовском» диапазоне чисел Рейнольдса (для течения в трубе этот диапазон $10^4 < \mathrm{Re} < 10^6$ приводит к формуле Блазиуса). Турбулентную кинематическую вязкость в случае пристенного течения для показателя $n = 4$ запишем следующим образом (в м^2/с):

$$\nu_t = \rho\chi_n(7v)^{1/4}\left(\frac{u^2\cdot}{\mid\frac{du}{dy}\mid}\right)^{3/4}.$$

3. Теплопроводность. По закону теплопроводности Фурье [3] вектор плотности (удельной интенсивности) теплового потока $\mathbf{q}$ (в Вт/м^2 = кг/с^3) пропорционален градиенту температуры $\overline{\nabla}T$ (в К/м), где вектор Гамильтона (набла) — $\overline{\nabla}$ (в 1/м), температура — T (в К):

$$\mathbf{q} = -\lambda\overline{\nabla}T.$$

Здесь λ — коэффициент теплопроводности (Вт/(м·К) = кг/с^3(м/К)), который также удобно представить в виде $\lambda = \rho c_p a$, где ρ — плотность жидкости или газа (кг/м^3); c_p — удельная изобарная теплоемкость среды (Дж/кг·К) = (м^2/с^2)(1/К); a — коэффициент температуропроводности (м^2/с).

Закон теплопроводности используется при описании процессов теплопередачи движущихся жидкостей в уравнении энергии. В случае ламинарного режима течения результаты расчетов и опытов дают удовлетворительное согласование, однако для турбулентных потоков такого согласования уже нет. Приходится эмпирически вводить понятие турбулентной теплопроводности λ_t и соответствующий ей коэффициент турбулентной температуропроводности a_t. В результате вектор плотности теплового потока $\mathbf{q}$ становится уже нелинейно связанным с градиентом температуры.

Формулу Фурье для плотности теплового потока q при передаче количества теплоты за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную оси y:

$$q = -\lambda \frac{dT}{dy},$$

можно обобщить [5] так:

$$q = -x_m \rho \left[a \frac{d(c_p T)^{(2m+1)}}{dy} \right]^{3/(4m+3)}. \tag{6}$$

В выражении (6) m — показатель степени, который может принимать различные положительные значения, x_m — безразмерный коэффициент, зависящий от этого показателя степени. Здесь в качестве множителя при плотности содержится величина, размерность которой равна размерности куба скорости, что и следовало ожидать. Формулу (6) также можно записать в следующем виде:

$$q = -x_m \rho \left[a {c_p}^{(2m+1)} \frac{dT^{(2m+1)}}{dy} \right]^{3/(4m+3)}.$$

Тогда имеем

при $m = 0$ (формула Фурье)

$$q = -\rho c_p a \frac{dT}{dy} = -\lambda \frac{dT}{dy},$$

при $m = 1$

$$q = -x_m \rho a^{3/7} c_p^{9/7} \left(\frac{dT^3}{dy} \right)^{3/7},$$

при $m = 2$

$$q = -x_m \rho a^{3/11} c_p^{15/11} \left(\frac{dT^5}{dy} \right)^{3/11}.$$

Обобщение на трехмерный случай приводит к векторной формуле

$$\mathbf{q} = -x_m \rho M \left(\frac{T^3}{\overline{\nabla} T \cdot \overline{\nabla} T} \right)^{2m/(4m+3)} \overline{\nabla} T, \tag{7}$$

в которой для краткости записи обозначим, что

$$M = (2m+1)^{3/(4m+3)} a^{3/(4m+3)} c_p^{3(2m+1)/(4m+3)}.$$

В инженерных решениях тепловое уравнение часто представляют [1, 6] так:

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = -\overline{\nabla} \cdot \mathbf{q}. \tag{8}$$

Здесь $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \left(\mathbf{w} \cdot \overline{\nabla} \right)$ — материальная производная, в которой $\mathbf{w}$ — вектор скорости частицы среды.

После подстановки вектора интенсивности теплового потока, согласно (7), в уравнение (8) получаем, что

$$\rho \cdot c_p \left(\frac{\partial T}{\partial \tau} + \left(\mathbf{w} \cdot \overline{\nabla} \right) T \right) = \overline{\nabla} \cdot x_m \rho M \left(\frac{T^3}{\overline{\nabla} T \cdot \overline{\nabla} T} \right)^{2m/(4m+3)} \overline{\nabla}\, T. \tag{9}$$

В компонентном виде уравнение энергии (9) можно записать следующим образом:

$$\rho \cdot c_p \left(\frac{\partial T}{\partial \tau} + w_k \frac{\partial T}{\partial x_k} \right) = x_m \rho M \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\frac{T^3}{\left(\frac{\partial T}{\partial x_k} \frac{\partial T}{\partial x_k} \right)} \right)^{\frac{2m}{4m+3}} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right).$$

Для удельной интенсивности теплового потока q через единичную площадку, перпендикулярную оси y, при турбулентном режиме течения можно записать выражение

$$q = -\, \rho c_p a_t \frac{dT}{dy},$$

в котором турбулентная температуропроводность

$$a_t = x_m (2m+1)^{\frac{3}{4m+3}} a^{\frac{3}{4m+3}} c_p^{\frac{2m}{4m+3}} \left(\frac{T^3}{\left(\frac{\partial T}{\partial x_k} \frac{\partial T}{\partial x_k} \right)} \right)^{\frac{2m}{4m+3}}.$$

Для пристенных течений, когда $T = T(y)$, $m = 0$, $x_m = 1$, то $a_t = a$, и имеем формулу Фурье. Получаем, что

при $m = 1$

$$a_t = x_m (3a)^{3/7} c_p^{2/7} \left(\frac{T^3}{\left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2} \right)^{\frac{2}{7}},$$

при $m = 2$

$$a_t = x_m (5a)^{3/11} c_p^{4/11} \left(\frac{T^3}{\left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2} \right)^{\frac{4}{11}}.$$

Можно записать выражения для a_t и при других величинах показателя степени m. Определить значения m и x_m для турбулентного режима течения можно, обрабатывая экспериментальные данные, например для течения в трубах. Далее для турбулентного числа Прандтля можно записать выражение

$$Pr_t = v_t / a_t.$$

4. Диффузия. Для плотности бинарного диффузионного потока вблизи стенки с нормалью [7] приведем формулу Фика (в кг/м^2)

$$j = -\rho D \frac{dC}{dy}, \tag{10}$$

в которой D — коэффициент бинарной диффузии (м^2/с), C — массовая доля примеси, т. е. его массовая концентрация (отношение массы примеси к массе смеси), являющаяся безразмерной величиной. Степенное обобщение формулы (10) можно представить в виде

$$j = -x_k \rho D \; \frac{d\ C^k}{dy},$$

где x_k — безразмерный коэффициент, зависящий от показателя степени k. Здесь в качестве множителя при плотности содержится величина, размерность которой равна размерности скорости, что и следовало ожидать. Для вектора плотности диффузионного потока имеем уравнение

$$\mathbf{j} = -x_k \rho D \overline{\nabla}\ C^k,$$

или

$$\mathbf{j} = -\rho D_k \overline{\nabla} C, \tag{11}$$

здесь коэффициент диффузии (в кг/м^{2}с)

$$D_k = x_k D k\ C^{(k-1)}.$$

При $k = 1$, $x_k = 1 \quad D_k = D$, имеет место закон Фика;
при $k = 2 \quad D_k = 2x_k DC$;
при $k = 3 \quad D_k = 3x_k DC^2$ и т. д.

Определить значение k и коэффициента x_k можно, обрабатывая экспериментальные данные по диффузионным процессам при турбулентном режиме течения. После нахождения величины D_t для турбулентного диффузионного числа Прандтля (числа Льюиса) можно записать выражение

$$Pr_D = v_t / D_t.$$

Уравнение диффузии, содержащее основные члены, можно представить [1, 4] в виде (в кг/м^{3}с)

$$\rho \frac{dC}{dt} = -\overline{\nabla} \cdot \mathbf{j}, \tag{12}$$

где содержится материальная производная $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \left(\mathbf{w} \cdot \overline{\nabla}\right)$. После подстановки вектора интенсивности диффузионного потока, согласно (11), в уравнение (12) получаем, что

$$\rho \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \left(\mathbf{w} \cdot \overline{\nabla}\right) C \right) = \ \overline{\nabla} \cdot x_k\ \rho D k C^{(k-1)}\ \overline{\nabla}\ C.$$

В компонентном виде уравнение диффузии можно записать следующим образом:

$$\rho \left(\frac{\partial C}{\partial t} + w_s \frac{\partial C}{\partial x_s} \right) = \rho x_k\ D k \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\ C^{(k-1)}\ \frac{\partial C}{\partial x_j} \right).$$

5. Заключение. Выполненные двухпараметрические степенные обобщения формул Ньютона, Фурье и Фика для касательного напряжения, плотности теплового потока и диффузии в зависимости от значений показателей степеней могут использоваться для описания процессов тепло-массообмена как при ламинарном, так и при турбулентном течении жидкости [8]. Также это обобщение может быть применено для описания поведения степенных жидкостей и течений растворов полимеров, проявляющих эффект Томса.

Литература

1. *Кутателадзе С. С.* Основы теории теплообмена. М: Атомиздат, 1979. 234 с.
2. *Pavlovsky V. A.* Power-law generalization of Newton's formula for shear stress in a liquid in the form of a tensor rheological relation // Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. 2022. Vol. 55. Iss. 2. P. 229–234. https://doi.org/10.1134/S1063454122020091
3. *Павловский В. А., Кабриц С. А.* Расчет турбулентного пограничного слоя плоской пластины // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2021. Т. 17. Вып. 4. С. 370–380. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.405
4. *Nikushchenko D. V., Pavlovsky V. A., Nikushchenko E. A.* Fluid flow development in a pipe as a demonstration of a sequential 402 Change in its rheological properties // Applied Sciences. 2022. N 12(6). https://doi.org/10.3390/app12063058
5. *Павловский В. А.* Степенное обобщение формулы теплопроводности Фурье и вытекающие из него варианты для записи уравнения энергии // Морские интеллектуальные технологии. 2022. Т. 2. № 2 (4). С. 133–138.
6. *Исаченко В. П., Осипова В. А., Сукомел А. С.* Теплопередача: учебник для вузов. 4-е изд., перераб. и доп. М.: Энергоиздат, 1981. 416 с.
7. *Попов П. В.* Диффузия. М.: Моск. физ.-технич. ин-т, 2016. 94 с.
8. *Павловский В. А., Никущенко Д. В.* Вычислительная гидродинамика. Теоретические основы: учеб. пособие. СПб.: Изд-во Лань, 2018. 368 с.

Статья поступила в редакцию 8 августа 2022 г.
Статья принята к печати 1 сентября 2022 г.

Контактная информация:

Павловский Валерий Алексеевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; v.a.pavlovsky@gmail.com

Power generalization of the linear constitutive equations of heat and mass transfer and the variants of writing the equations of momentum transfer, heat and diffusion arising from them*

V. A. Pavlovsky

St Petersburg State Marine Technical University, 3, Locmanskaya ul., St Petersburg, 190121, Russian Federation

For citation: Pavlovsky V. A. Power generalization of the linear constitutive equations of heat and mass transfer and the variants of writing the equations of momentum transfer, heat and diffusion arising from them. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2022, vol. 18, iss. 4, pp. 527–534.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2022.407 (In Russian)

Currently, when solving problems of heat and mass transfer, linear constitutive equations are used — in hydrodynamics, the viscous stress tensor is proportional to the strain rate tensor (Newton's rheological ratio), in heat transfer, the heat flux density is linearly related to the temperature gradient (Fourier's heat conduction law), in mass transfer, the diffusion flux density proportional to the concentration gradient (Fick's law). When writing these

* This study was carried out within the framework of the state task by Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation for the implementation of research works N 075-03-2020-094/1 of June 10, 2020.

linear governing equations, proportionality coefficients are used, which are called the viscosity coefficient, thermal conductivity coefficient and diffusion coefficient, respectively. Such constitutive equations are widely used to describe the processes of heat and mass transfer in a laminar flow regime. For turbulent flows, these equations are unsuitable, it is necessary to introduce into consideration the empirical turbulent coefficients of viscosity μ_t, thermal conductivity λ_t and diffusion D_t. However, to describe turbulent flows, it is possible to go in another way — to modify the linear constitutive relations by giving them a nonlinear power-law form. Two-parameter power-law generalizations of Newton's, Fourier's and Fick's formulas for shear stress, heat flux density and diffusion, which, depending on the value of the exponents, can be used to describe the processes of heat and mass transfer both in laminar and turbulent fluid flow. Also, this generalization can be used to describe the behavior of power-law fluids and flows of polymer solutions exhibiting the Toms effect.

Keywords: hydrodynamics, heat transfer, diffusion, Newton's, Fourier's, Fick's formulas, power generalizations, turbulence.

References

1. Kutateladze S. S *Osnovi teorii teploobmena* [*Fundamentals of the theory of heat transfer*]. Moscow, Atomizdat Publ., 1979, 234 p. (In Russian)

2. Pavlovsky V. A. Power-law generalization of Newton's formula for shear stress in a liquid in the form of a tensor rheological relation. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics*, 2022, vol. 55, iss. 2, pp. 229–234. https://doi.org/10.1134/S1063454122020091

3. Pavlovsky V. A., Kabrits S. A. Raschyot tyrbulentnogo pogranichnogo sloya ploskoy plastini [Calculation of turbulent boundarylayer of a flat plate]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Sciences. Control Processes*, 2021, vol. 17, iss. 4, pp. 370–380. (In Russian) https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.405

4. Nikushchenko D. V., Pavlovsky V. A., Nikushchenko E. A. Fluid flow development in a pipe as a demonstration of a sequential 402 Change in its rheological properties. *Applied Sciences*, 2022, no. 12 (6). https://doi.org/10.3390/app12063058

5. Pavlovsky V. A. Stepennoe obobshchenie formyli teploprovodnosti Fyr'e i vitekaushchie iz nego varianti dlya zapisi yravneniya energii [Power-law generalization of the Fourier formula for heat conduction and variants arising from it for writing the energy equation]. *Marine intelligent technologies*, 2022, vol. 2 (4), no. 2, pp. 133–138. (In Russian)

6. Isachenko V. P., Osipova V. A., Sukomel A. S. *Teploperedacha* [*Heat transfer*]. Moscow, Energoizdat Publ., 1981, 416 p. (In Russian)

7. Popov P. V. *Diffyzia* [*Diffusion*]. Moscow, Moscow Institute of Physics and Technology Publ., 2016, 94 p. (In Russian)

8. Pavlovsky V. A., Nikushhenko D. V. *Vychislitelnaya gidrodinamika. Teoreticheskie osnovy* [*Computational fluid dynamics. Theoretical fundamentals*]. St Petersburg, Lan' Publ., 2018, 368 p. (In Russian)

Received: August 08, 2022.
Accepted: September 01, 2022.

Author's information:

Valery A. Pavlovsky — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; v.a.pavlovsky@gmail.com