УДК 519.8 Вестник СПбГУ. Прикладная математика. Информатика... 2022. Т. 18. Вып. 4
MSC 91B26, 91A55

Равновесие в задаче выбора момента встречи N лиц*

В. В. Мазалов[1,2], *В. В. Яшин*[1]

[1] Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра
Российской академии наук, Российская Федерация, 185910, Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11
[2] Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация,
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Мазалов В. В., Яшин В. В.* Равновесие в задаче выбора момента встречи N лиц // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2022. Т. 18. Вып. 4. С. 501–515.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2022.405

Рассматривается теоретико-игровая модель переговоров о времени встречи. Задача заключается в определении времени встречи, которое удовлетворит всех участников. Решение ищется в классе стационарных стратегий с помощью метода обратной индукции. Полезности игроков представлены кусочно-линейными функциями, имеющими один пик. Для ограничения длительности переговоров вводится дисконтирующий фактор. В аналитическом виде найдено равновесие, совершенное по подыграм в классе стационарных стратегий.

Ключевые слова: задача о времени встречи, кусочно-линейные целевые функции, последовательные переговоры, модель торгов Рубинштейна, совершенное по подыграм равновесие, стационарные стратегии, обратная индукция.

1. Введение. Модель торгов Рубинштейна [1], предложенная в 1982 г., предоставила удобный инструмент для решения теоретико-игровых задач о торгах двух лиц с чередованием предложений на бесконечной временно́й оси. Главной особенностью был дисконтирующий фактор δ, который не позволял игре длиться бесконечно долго, т. е. чем ближе δ к нулю, тем нетерпеливее игроки и тем быстрее они согласятся на какое-либо предложение. Напротив, если значение δ близко к 1, то игроки терпеливы и будут вести переговоры до тех пор, пока не придут к самому выгодному для них предложению.

Авторы [2] построили модель последовательных многосторонних переговоров с правилом большинства. Игра, которая была рассмотрена, представляет собой стандартную игру *раздели доллар*, в которой n игроков, ход которых выбирается случайным образом, вносят предложения о том, как разделить пирог фиксированного размера, и для соглашения требуется согласие простого большинства. Показано, что совершенное по подыграм равновесие существует в модели с дисконтированием в классе стационарных стратегий. При этом выбор игрока, делающего предложение, осуществляется с одинаковой вероятностью.

В работе [3] описана модель, в которой игроки, делающие предложения, выбираются с разными вероятностями и коэффициенты дисконтирования также могут различаться. В игре с линейными функциями полезности доказана единственность равновесия, совершенного по подыграм. В [4] рассмотрены квадратичные функции полезности и переговоры со случайным выбором игроков. Многомерная модель после-

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-11-00051, https://rscf.ru/project/22-11-00051/).

довательных переговоров представлена в [5], асимптотическая единственность равновесия в модели со случайными предложениями — в работе [6].

При проведении переговоров не обязательно применять правило большинства. Окончательное решение может быть принято, если только часть игроков поддержит данное решение. Также для окончательного решения может потребоваться консенсус, когда все игроки должны поддерждать решение. В. В. Мазаловым, Т. Е. Носальской и Ю. С. Токаревой [7, 8] была рассмотрена модель переговоров n лиц в задаче дележа пирога с помощью правил большинства, а также консенсуса. В модели предложения генерируются случайным образом, и от игроков требуется только поддержать такое предложение или нет. В модели также задействован дисконтирующий фактор и найдено равновесие в пороговых стратегиях. Этот же подход был использован в работах для нахождения оптимальных стратегий в теоретико-игровой модели проведения тендеров [9, 10]. Модели консенсуса в переговорах использовались также в работах [11–13].

В литературе по теории переговоров существуют два подхода к нахождению решения, когда оно принимается самими участниками и для решения привлекается дополнительный участник (арбитр). В качестве арбитра может выступать метаигрок, выбирающий правила, — так называемый механизм. В этом случае применяется теория по дизайну механизмов и теории активных систем [14, 15]. В данной работе результат переговоров зависит от поведения самих участников.

Авторами [16, 17] была предложена формальная схема Рубинштейна для решения задач переговоров о времени и месте встречи. Для общего случая было доказано существование и единственность равновесия, совершенного в подыграх в переговорах с унимодальными функциями полезности. В этих работах применялись функции полезности специального вида. В зависимости от приложений представленная схема может быть использована для функций полезности произвольного вида. Например, в [18] в задаче распределения водных ресурсов учитывались функции полезности вида $u_j(x) = \sum\limits_{i=1}^{k} \beta_i^j u_i(x_i)$, где $u_i(x)$ — возрастающие вогнутые функции.

Цель настоящей работы — поиск оптимального решения для задачи переговоров о времени встречи n игроков в классе стационарных стратегий для случая кусочно-линейных функций полезности, имеющих один пик. Это позволяет найти оптимальные стратегии в аналитическом виде. Окончательное решение принимается только в случае, если все игроки поддержат такое предложение.

2. Постановка задачи. Представим n игроков, которые договариваются о времени встречи $x \in [0; 1]$, их полезности — кусочно-линейные функции, имеющие один пик $u_i(x)$, $i = 1, 2, ..., n$. Они по очереди предлагают различные варианты решения, и для его принятия нужно согласие всех участников. Игроки ходят по очереди $1 \to 2 \to 3 \to \ldots \to (n-1) \to n \to 1 \to \ldots$. Они могут до бесконечности настаивать на выгодном для себя решении. Чтобы это не произошло, введем дисконтирующий фактор $\delta < 1$. Будем считать, что после каждого сеанса переговоров функции полезности всех игроков будут уменьшаться пропорционально δ. Таким образом, если до момента времени t игроки не пришли к какому-то решению, то в момент времени t их полезности представляются функциями $\delta^{t-1} u_i(x),\ i = 1, 2, ..., n$.

Решение будем искать в классе стационарных стратегий, когда предполагается, что решения игроков не изменятся в течение времени переговоров, т. е. игрок i будет делать то же предложение на шаге i и на последующих шагах $n + i, 2n + i, \ldots$. Это позволит нам ограничиться рассмотрением цепочки предложений $1 \to 2 \to 3 \to$

$\ldots \to (n-1) \to n \to 1$. Будем использовать метод обратной индукции. Для этого предположим, что свой наилучший ответ ищет игрок n, зная предложение игрока 1, затем игрок $(n-1)$ ищет свой наилучший ответ, зная решение игрока n, и т. д. В конце концов находим наилучший ответ игрока 1, и он должен совпасть с его предложением в начале переговоров. Таким образом, рассуждения в методе обратной индукции имеют вид $1 \leftarrow 2 \leftarrow 3 \leftarrow \ldots \leftarrow (n-1) \leftarrow n \leftarrow 1$.

Считаем, что функции полезности игроков имеют следующий вид (рис. 1):

$$\begin{aligned}
&u_1(x) = x,\\
&u_2(x) = \begin{cases} \frac{n-1}{n-2}x, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{n-2}{n-1},\\ (n-1)(1-x), & \frac{n-2}{n-1} \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}\\
&u_3(x) = \begin{cases} \frac{n-1}{n-3}x, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{n-3}{n-1},\\ \frac{n-1}{2}(1-x), & \frac{n-3}{n-1} \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}\\
&\qquad\qquad\qquad\ldots\\
&u_{n-k}(x) = \begin{cases} \frac{n-1}{k}x, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{k}{n-1},\\ \frac{n-1}{n-k-1}(1-x), & \frac{k}{n-1} \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}\\
&u_{n-k+1}(x) = \begin{cases} \frac{n-1}{k-1}x, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{k-1}{n-1},\\ \frac{n-1}{n-k}(1-x), & \frac{k-1}{n-1} \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}\\
&\qquad\qquad\qquad\ldots\\
&u_{n-1}(x) = \begin{cases} (n-1)x, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n-1},\\ \frac{n-1}{n-2}(1-x), & \frac{1}{n-1} \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}\\
&u_n(x) = 1-x.
\end{aligned}$$

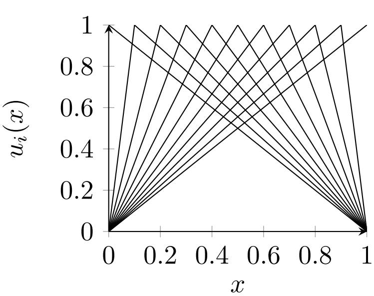

Рис. 1. График функций полезности

Максимум функции полезности i-го игрока достигается в точке $\frac{n-i}{n-1}$. Каждый игрок заинтересован в максимизации своей функции полезности.

2.1. Оптимальное решение в игре трех лиц, когда первым ходит игрок 1. Начнем с частного случая трех игроков. Их функции полезности будут иметь вид, представленный на рис. 2:

$$\begin{aligned}
&u_1(x) = x,\\
&u_2(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0; \frac{1}{2}],\\ 2(1-x), & x \in [\frac{1}{2}; 1], \end{cases}\\
&u_3(x) = 1-x.
\end{aligned}$$

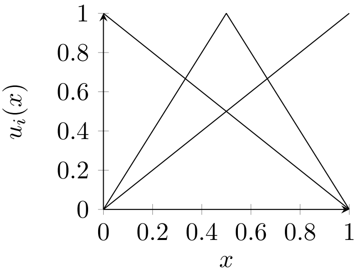

Рис. 2. График функций полезности для трех игроков

Воспользуемся методом обратной индукции, где последовательность (обратных) ходов имеет вид $1 \leftarrow 2 \leftarrow 3 \leftarrow 1$. Первым с конца ходит **игрок 1**. Предположим, что его предложением будет x, который лежит в интервале $[\frac{1}{2}; 1]$.

Перед предложением игрока 1 ход делал **игрок 3**. Теперь ему известно предложение игрока 1, и свое предложение $y \in [0, 1]$ ему следует искать, исходя из следующих соображений:

• для принятия игроком 1 предложения необходимо, чтобы $u_1(y) \geqslant \delta u_1(x)$, что эквивалентно неравенству $y \geqslant \delta x$;

• для принятия игроком 2 предложения нужно, чтобы $u_2(y) \geqslant \delta u_2(x)$, что эквивалентно неравенствам $\begin{cases} 2y \geqslant 2\delta(1-x), \\ 2(1-y) \geqslant 2\delta(1-x). \end{cases}$

Анализируя эти неравенства, получаем допустимый интервал для предложения игрока 3 $[\delta x; 1 - \delta(1-x)]$, который удовлетворяет игроков 1 и 2. Поскольку максимум функции полезности игрока 3 находится в точке 0, то ему оптимально сделать предложение $\hat{x}_3 = \delta x$.

Продолжаем обратную индукцию. Перед предложением игрока 3 ход делал **игрок 2**. Ему теперь известны предложения игрока 1 (x) и игрока 3 (δx). Найдем его оптимальное предложение $y \in [0, 1]$:

• чтобы игрок 1 принял предложение, необходимо условие $y \geqslant \delta^2 x$;

• чтобы игрок 3 принял предложение, потребуется условие $1-y \geqslant \delta(1-\delta x)$. Здесь отрезок допустимых решений игрока 2 будет $[\delta^2 x; 1 - \delta(1-\delta x)]$. Максимум функции полезности игрока 2 находится в точке $\frac{1}{2}$. Предположим, что $\frac{1}{2} \in [\delta^2 x; 1 - \delta(1-\delta x)]$, отсюда следует, что наилучшим предложением игрока 2 будет $\hat{x}_2 = \frac{1}{2}$.

Переходим к ходу **игрока 1**:

• для того чтобы его предложение x было принято игроком 2, необходимо выполнение условий $\begin{cases} 2x \geqslant \delta, \\ 2(1-x) \geqslant \delta; \end{cases}$

• условием принятия этого предложения для игрока 3 будет условие $1 - x \geqslant \delta(1 - \frac{1}{2})$.

Таким образом, интервалом для допустимого решения игрока 1 будет $[\frac{\delta}{2}; 1 - \frac{\delta}{2}]$. Поскольку функция полезности игрока 1 возрастает, то ему следует предложить $x^* = 1 - \frac{\delta}{2}$. Заметим, что для любого δ имеет место $x^* \geqslant \frac{1}{2}$, как и было предположено в начале рассуждений. Это и есть решение задачи переговоров. Оно справедливо для всех $\delta \in [0; 1]$.

2.2. Оптимальное решение в той же игре трех лиц, когда первым ходит игрок 2. Найдем оптимальное решение в задаче переговоров трех лиц, где теперь первым будет делать предложение **игрок 2**. Тогда обратная индукция связана с последовательностью (обратных) ходов $2 \leftarrow 3 \leftarrow 1 \leftarrow 2$. Покажем, что оптимальным предложением игрока 2 будет $x^* = \frac{1}{2}$.

Пусть предложением игрока 2 будет $x = \frac{1}{2}$. **Игрок 1**, зная, что предложит игрок 2, сделает предложение $y \in [0, 1]$, исходя из следующих неравенств, которые соответствуют функциям полезности игроков 2 и 3:

$$\text{(игрок 2)} \begin{cases} 2y \geqslant \delta, \\ 2(1-y) \geqslant \delta; \end{cases} \qquad \text{(игрок 3)} \;\; 1 - y \geqslant \delta(1 - \tfrac{1}{2}).$$

Получаем допустимый отрезок $[\frac{\delta}{2}; 1 - \frac{\delta}{2}]$, откуда следует, что лучшее предложение $\hat{x}_1 = 1 - \frac{\delta}{2}$. Как видим, получили то же решение, что и в п. 2.1.

Ход переходит к **игроку 3**. Для принятия его предложения $y \in [0, 1]$ требуется выполнение таких условий:

$$\text{(игрок 1)} \; y \geqslant \delta(1 - \tfrac{\delta}{2}); \quad \text{(игрок 2)} \begin{cases} 2y \geqslant 2\delta(1 - 1 + \frac{\delta}{2}), \\ 2(1-y) \geqslant 2\delta(1 - 1 + \frac{\delta}{2}). \end{cases}$$

Получаем $y \in [\delta(1 - \frac{\delta}{2}); 1 - \frac{\delta^2}{2}]$, откуда следует, что наилучшее предложение игрока 3 $\hat{x}_3 = \delta(1 - \frac{\delta}{2})$.

Вновь наступает ход **игрока 2**. Для принятия его предложения $y \in [0, 1]$ необходимо выполнение условий:

$$\text{(игрок 1)} \;\; y \geqslant \delta^2(1 - \tfrac{\delta}{2}); \quad \text{(игрок 3)} \;\; 1 - y \geqslant \delta(1 - \delta(1 - \tfrac{\delta}{2}).$$

Заметим, что $\frac{1}{2} \in [\delta^2(1 - \frac{\delta}{2});\; \delta(1 - \delta(1 - \frac{\delta}{2}))]$, и $y = \frac{1}{2}$ дает максимум функции полезности игрока 2. Таким образом, предложение $x^* = \frac{1}{2}$ является оптимальной стратегией игрока 2, если он начинает переговоры.

2.3. Оптимальное решение в той же игре трех лиц, когда первым ходит игрок 3. Повторяя вышеприведенные рассуждения, несложно показать, что оптимальным предложением **игрока 3**, если он начинает переговоры первым, будет $x^* = \delta(1 - \frac{\delta}{2})$. Таким образом, при нахождении оптимальных стратегий неважно, кто будет начинать переговоры. Далее будем использовать этот принцип.

3. Решение переговорной задачи n лиц в общем случае.

3.1. Случай малых δ. Пусть $\delta \leqslant \frac{1}{2}$ и первым ходит игрок 1. Тогда справедливо утверждение.

Утверждение 1. Если

$$\delta \left(1 - \frac{\delta}{n-1}\right) \leqslant \frac{2}{n-1}, \tag{1}$$

то решением задачи переговоров будет $x^* = 1 - \frac{\delta}{n-1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что последовательность оптимальных предложений должна быть такой:

$$1 \to 1 - \frac{\delta}{n-1},$$

$$2 \to \frac{n-2}{n-1},$$

$$3 \to \frac{n-3}{n-1},$$

$$\ldots$$

$$(n-1) \to \frac{1}{n-1},$$

$$n \to \delta\left(1-\frac{\delta}{n-1}\right).$$

Заметим, что без ограничения общности можно изменить порядок следования наилучших ответов игроков, начиная с предложения любого игрока, например с игрока 3. Тогда последовательность для обратной индукции примет вид $3 \leftarrow 4 \leftarrow \ldots \leftarrow n \leftarrow 1 \leftarrow 2 \leftarrow\ 3$.

Последним делает предложение **игрок 3**. Его функция полезности имеет максимум в точке $\frac{n-3}{n-1}$, предположим, что это значение и будет его предложением: $x = \frac{n-3}{n-1}$.

Перед игроком 3 делал предложение **игрок 2**. Теперь он знает, что предложит предыдущий игрок и ищет свой наилучший ответ $y \in [0,1]$, исходя из следующих неравенств:

• чтобы игрок 1 принял предложение y, необходимо условие $u_1(y) \geqslant \delta u_1(x)$, что эквивалентно неравенству $y \geqslant \delta\frac{n-3}{n-1}$;

• для принятия игроком 3 предложения y нужно, чтобы $u_3(y) \geqslant \delta u_3(x)$, что эквивалентно неравенству $\begin{cases} \frac{n-1}{n-3}y \geqslant \delta, \\ \frac{n-1}{2}(1-y) \geqslant \delta; \end{cases}$

• чтобы игрок 4 принял предложение y, необходимо условие $u_4(y) \geqslant \delta u_4(x)$, что эквивалентно неравенству $\begin{cases} \frac{n-1}{n-4}y \geqslant \frac{n-1}{3}\delta(1-\frac{n-3}{n-1}), \\ \frac{n-1}{3}(1-y) \geqslant \frac{n-1}{3}\delta(1-\frac{n-3}{n-1}); \end{cases}$

$\ldots$

• для принятия игроком $(n-1)$ предложения y нужно, чтобы $u_{n-1}(y) \geqslant \delta u_{n-1}(x)$, что эквивалентно неравенству $\begin{cases} (n-1)y \geqslant \frac{2}{n-2}\delta, \\ \frac{n-1}{n-2}(1-y) \geqslant \frac{2}{n-2}\delta; \end{cases}$

• наконец, для принятия игроком (n) предложения y необходимо, чтобы $u_n(y) \geqslant \delta u_n(x)$, что эквивалентно неравенству $1-y \geqslant \frac{2}{n-2}\delta$.

Объединим все ограничения:

$$\begin{cases} y \geqslant \delta\frac{n-3}{n-1}, \\ y \geqslant \delta\frac{2}{3}\frac{n-4}{n-1}, \\ y \geqslant \delta\frac{n-3}{2}, \\ \ldots \\ y \geqslant \delta\frac{2}{(n-1)(n-2)}, \end{cases} \qquad y \leqslant 1-\delta\frac{2}{n-1}.$$

Исходя из условий утверждения, получаем, что допустимым предложением игрока 2 должно быть значение из интервала $\left[\delta\frac{n-3}{n-1}, 1-\delta\frac{2}{n-1}\right]$, и, так как $\frac{n-2}{n-1}$ лежит в этом интервале, наилучшим предложением игрока 2 будет $\hat{x}_2 = \frac{n-2}{n-1}$.

Перед игроком 2 ход делал **игрок 1**. Теперь он знает, что предложит игрок 2. Его оптимальное предложение $y \in [0,1]$ находится по аналогии с поиском предложения игрока 2, т. е. для того, чтобы все игроки приняли предложение игрока 1, оно должно удовлетворять следующим условиям:

(игрок 2) $\begin{cases} \frac{n-1}{n-2}y \geqslant \delta, \\ (n-1)(1-y) \geqslant \delta; \end{cases}$

(игрок 3) $\begin{cases} \frac{n-1}{n-3}y \geqslant \delta\frac{n-1}{2}(1-\frac{n-2}{n-1}), \\ \frac{n-1}{2}(1-y) \geqslant \delta\frac{n-1}{2}(1-\frac{n-2}{n-1}); \end{cases}$

...

(игрок $n-1$) $\begin{cases} (n-1)y \geqslant \delta\frac{n-1}{n-2}(1-\frac{n-2}{n-1}), \\ \frac{n-1}{n-2}(1-y) \geqslant \delta\frac{n-1}{n-2}(1-\frac{n-2}{n-1}); \end{cases}$

(игрок n) $1-y \geqslant \delta(1-\frac{n-2}{n-1})$.

Объединим все ограничения:

$$\begin{cases} y \geqslant \frac{n-2}{n-1}\delta, \\ y \geqslant \frac{n-3}{2(n-1)}\delta, \\ \dots \\ y \geqslant \frac{1}{(n-1)(n-2)}\delta, \end{cases} \qquad y \leqslant 1-\delta\frac{1}{n-1}.$$

Отсюда любое предложение из интервала $\left[\frac{n-2}{n-1}\delta; 1-\delta\frac{1}{n-1}\right]$ будет принято остальными игроками. Наилучшим ответом игрока 1 будет значение $x^* = 1-\frac{\delta}{n-1}$, которое указано в утверждении.

Ход переходит к **игроку n**. Действуя по аналогии, получим допустимый отрезок для предложения $y \in [0,1]$ этого игрока $[\delta(1-\frac{\delta}{n-1}); 1-\delta^2\frac{1}{n-1}]$. На данном интервале функция полезности игрока n убывает, значит, наилучшим предложением игрока n будет $\hat{x}_n = \delta(1-\frac{\delta}{n-1})$.

Ход переходит к **игроку $(n-1)$**. Для него отрезком для принятия решения будет $[\delta^2(1-\frac{\delta}{n-1}); 1-\delta+\delta^2(1-\frac{\delta}{n-1})]$. Из условия (1) следует $\delta^2(1-\frac{\delta}{n-1}) \leqslant \frac{1}{n-1}$. Поскольку правая граница отрезка всегда больше $\frac{1}{2}$, максимальное значение функции полезности этого игрока будет принадлежать такому интервалу и решением для игрока $n-1$ будет $\hat{x}_{n-1} = \frac{1}{n-1}$.

Ход переходит к **игроку $(n-2)$**. Его предложение $y \in [0,1]$ находится из неравенств

(игрок 1) $y \geqslant \delta\frac{1}{n-1}$;

(игрок 2) $\begin{cases} \frac{n-1}{n-2}y \geqslant \delta\frac{n-1}{n-2}\frac{1}{n-1}, \\ (n-1)(1-y) \geqslant \delta\frac{n-1}{n-2}\frac{1}{n-1}; \end{cases}$

(игрок 3) $\begin{cases} \frac{n-1}{n-3}y \geqslant \delta\frac{n-1}{n-3}\frac{1}{n-1}, \\ \frac{n-1}{2}(1-y) \geqslant \delta\frac{n-1}{n-3}\frac{1}{n-1}; \end{cases}$

...

(игрок $n-1$) $\begin{cases} (n-1)y \geqslant \delta, \\ \frac{n-1}{n-2}(1-y) \geqslant \delta; \end{cases}$

(игрок n) $1-y \geqslant \delta(1-\frac{1}{n-1})$.

Объединим ограничения:

$$y \geqslant \delta \frac{1}{n-1}, \quad \begin{cases} y \leqslant 1 - \delta \frac{1}{(n-1)(n-2)}, \\ y \leqslant 1 - \delta \frac{2}{(n-1)(n-3)}, \\ \dots \\ y \leqslant 1 - \delta \frac{n-2}{n-1}. \end{cases}$$

Выделяем самое сильное ограничение и получаем $\left[\delta \frac{1}{n-1}; 1 - \delta \frac{n-2}{n-1}\right]$. Правая часть интервала всегда больше $\frac{1}{2}$, что приводит к неравенствам $\delta \frac{1}{n-1} \leqslant \frac{2}{n-1} \leqslant 1 - \delta \frac{n-2}{n-1}$, а значит, максимум функции полезности игрока $(n-2)$ принадлежит этому интервалу и игрок может предложить $\hat{x}_{n-2} = \frac{2}{n-1}$.

Продолжая данные рассуждения, установим, что наилучшими ответами игроков $(n-3), \dots, 3$ будут соответственно $\frac{3}{n-1}, \frac{4}{n-1}, \dots, \frac{n-3}{n-1}$. Таким образом, предложения игрока 3 в начале и конце обратной индукции совпадают и, следовательно, утверждение доказано.

Приведем значения и интервалы, в которых решение имеет вид $x^* = 1 - \frac{\delta}{n-1}$ для разных δ:

n	5	10	20	30	50	100
$(0, \delta)$	(0, 0.5)	(0, 0.2279)	(0, 0.1059)	(0, 0.0691)	(0, 0.0409)	(0, 0.0202)

3.2. Случай больших δ. В этом случае решение зависит от четности количества игроков. Рассмотрим последовательность предложений $1 \to 2 \to 3 \to \dots \to (n-1) \to n \to 1$.

3.2.1. Случай больших δ. Четное количество игроков.

Утверждение 2. Пусть n — четное. Представим его в виде $n = 2k$. Тогда, если

$$\frac{\delta^{k-1}}{1+\delta^k} \geqslant \frac{k-1}{2k-1}, \tag{2}$$

то оптимальным предложением игрока 1 будет $x^* = \frac{1}{1+\delta^k}$.

Доказательство. Обратная индукция основана на следующей последовательности: $1 \leftarrow 2 \leftarrow \dots \leftarrow n \leftarrow 1$.

Пусть **игрок 1** предлагает x. Предположим, что

$$x \in \left[\frac{k-1}{2k-1}; \frac{k}{2k-1}\right]. \tag{3}$$

Границы интервала — максимальные выигрыши игроков $(n-k) = \frac{n}{2}$ и $(n-k+1) = \frac{n}{2} + 1$.

Перед ним ходил **игрок *n***. Чтобы его предложение $y \in [0,1]$ приняли остальные игроки, необходимо выполнение таких неравенств:

(игрок 1) $y \geqslant \delta x$;

(игрок 2) $\begin{cases} \frac{n-1}{n-2} y \geqslant \delta \frac{n-1}{n-2} x, \\ (n-1)(1-y) \geqslant \delta \frac{n-1}{n-2} x; \end{cases}$

(игрок 3) $\begin{cases} \frac{n-1}{n-3} y \geqslant \delta \frac{n-1}{n-3} x, \\ \frac{n-1}{2}(1-y) \geqslant \delta \frac{n-1}{n-3} x; \end{cases}$

$\dots$

(игрок $n-k$) $\begin{cases} \frac{n-1}{k}y \geqslant \delta\frac{n-1}{k}x, \\ \frac{n-1}{n-k-1}(1-y) \geqslant \delta\frac{n-1}{k}x; \end{cases}$

(игрок $n-k+1$) $\begin{cases} \frac{n-1}{k-1}y \geqslant \delta\frac{n-1}{n-k}(1-x), \\ \frac{n-1}{n-k}(1-y) \geqslant \delta\frac{n-1}{n-k}(1-x); \end{cases}$

...

(игрок $n-1$) $\begin{cases} (n-1)y \geqslant \delta\frac{n-1}{n-2}(1-x), \\ \frac{n-1}{n-2}(1-y) \geqslant \delta\frac{n-1}{n-2}(1-x); \end{cases}$

(игрок n) $1-y \geqslant \delta(1-\delta x)$.

Объединим эти ограничения:

$$\begin{cases} y \geqslant \delta x, \\ \dots \\ y \geqslant \delta x, \\ y \geqslant \delta\frac{k-1}{n-k}(1-x), \\ \dots \\ y \geqslant \frac{\delta}{n-2}(1-x), \end{cases} \qquad \begin{cases} y \leqslant 1-\frac{\delta}{n-2}x, \\ y \leqslant 1-\frac{2\delta}{n-3}x, \\ \dots \\ y \leqslant 1-\delta\frac{n-k-1}{k}x, \\ y \leqslant 1-\delta(1-x), \\ \dots \\ y \leqslant 1-\delta(1-x). \end{cases}$$

Количество неравенств можно уменьшить:

$$\begin{cases} y \geqslant \delta x, \\ y \geqslant \delta\frac{k-1}{n-k}(1-x), \end{cases} \qquad \begin{cases} y \leqslant 1-\delta\frac{n-k-1}{k}x, \\ y \leqslant 1-\delta(1-x). \end{cases}$$

Поскольку $x \in \left[\frac{k-1}{2k-1}; \frac{k}{2k-1}\right]$, то $\delta x \geqslant \delta\frac{k-1}{n-k}(1-x)$ и $1-\delta(1-x) \leqslant 1-\delta\frac{n-k-1}{k}x$. Находим интервал для допустимого предложения игрока n $[\delta x; 1-\delta(1-x)]$. Наилучшим ответом для игрока n станет $\hat{x}_n = \delta x$. Теперь предположим, что

$$\delta x \in \left[\frac{k-1}{2k-1}; \frac{k}{2k-1}\right]. \qquad (4)$$

Ход передается **игроку $(n-1)$**. Действуя по аналогии, получим неравенства

$$\begin{cases} y \geqslant \delta^2 x, \\ y \geqslant \delta\frac{k-1}{n-k}(1-\delta x), \end{cases} \qquad \begin{cases} y \leqslant 1-\frac{n-k-1}{k}\delta^2 x, \\ y \leqslant 1-\delta(1-\delta x). \end{cases}$$

С учетом ограничения (4) они примут вид $1-\delta(1-\delta x) \leqslant 1-\frac{n-k-1}{k}\delta^2 x$ и $\delta^2 x \geqslant \delta\frac{k-1}{n-k}(1-\delta x)$. Тогда допустимый интервал будет $[\delta^2 x; 1-\delta(1-\delta x)]$, откуда наилучший ответ игрока $(n-1)$ $\hat{x}_{n-1} = \delta^2 x$. Предположим, что $\delta^2 x \in \left[\frac{k-1}{2k-1}; \frac{k}{2k-1}\right]$.

Данные рассуждения будем продолжать до наступления хода **игрока $\left(n-k+1\right)$**, который предложит $\hat{x}_{n-k+1} = \delta^k x$, с условием

$$\delta^k x \in \left[\frac{k-1}{2k-1}; \frac{k}{2k-1}\right]. \qquad (5)$$

У **игрока $(n-k)$** допустимым интервалом для принятия решения будет $[\delta^{k+1}x; 1-\delta(1-\delta^k x)]$. На этот раз потребуем, чтобы условие

$$\frac{k-1}{2k-1} \leqslant 1-\delta(1-\delta^k x) \leqslant \frac{k}{2k-1}.$$

Тогда наилучшим предложением игрока $(n-k)$ станет $\hat{x}_{n-k} = 1-\delta(1-\delta^k x)$.

Ход переходит к **игроку $(n-k-1)$**. Для него допустимым интервалом для принятия решения будет $[\delta(1-\delta(1-\delta^k x)); 1-\delta^2(1-\delta^k x)]$. Вновь потребуем условие

$$\frac{k-1}{2k-1} \leqslant 1-\delta^2(1-\delta^k x) \leqslant \frac{k}{2k-1}.$$

Наилучшим предложением для игрока $(n-k-1)$ будет $\hat{x}_{n-k-1} = 1-\delta^2(1-\delta^k x)$.

Продолжая рассуждения по аналогии, ход дойдет до **игрока 2**. Он предложит $\hat{x}_2 = 1-\delta^{k-1}(1-\delta^k x)$, и ограничения будут $\frac{k-1}{2k-1} \leqslant 1-\delta^{k-1}(1-\delta^k x) \leqslant \frac{k}{2k-1}$. Преобразовав неравенства, имеем условие

$$\frac{k-1}{2k-1} \leqslant 1-\delta^{k-1}(1-\delta^k x) \leqslant \frac{k}{2k-1}. \tag{6}$$

Вновь наступает ход **игрока 1**. Допустимым интервалом для принятия его решения будет $[\delta(1-\delta^{k-1}(1-\delta^k x)); 1-\delta^k(1-\delta^k x)]$. Функция полезности игрока 1 возрастает, следовательно, его наилучшим предложением будет $\hat{x}_1 = 1-\delta^k(1-\delta^k x)$. Поскольку предложения игрока 1 в начале и конце переговоров должны совпадать, то получаем уравнение для его оптимального предложения

$$x = 1-\delta^k(1-\delta^k x) \Rightarrow x = \frac{1-\delta^k}{1-\delta^{2k}} \Rightarrow x^* = \frac{1}{1+\delta^k}.$$

Подставляя наилучшее предложение x^* в (6), получаем условие (2):

$$\frac{\delta^{k-1}}{1+\delta^k} \geqslant \frac{k-1}{2k-1}.$$

Выполнение этого неравенства влечет за собой выполнение условий (3), (5), (6), утверждение доказано.

Приведем значения и интервалы, в которых решение имеет вид $x^* = \frac{1}{1+\delta^k}$, для разных δ:

n	6	10	20	30	50	100
$(\delta, 1)$	(0.7576, 1)	(0.9336, 1)	(0.9871, 1)	(0.9947, 1)	(0.9982, 1)	(0.9996, 1)

3.2.2. Случай больших δ, нечетное количество игроков.

Утверждение 3. Пусть n — нечетное. Представим его в виде $n = 2k+1$. Тогда, если условие

$$\delta^k \geqslant \frac{k-1}{k}, \tag{7}$$

то решением игры будет $x^* = 1 - \frac{1}{2}\delta^k$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если в случае с четным количеством игроков $\frac{1}{2}$ попадала в интервал $\left[\frac{k-1}{2k-1}; \frac{k}{2k-1}\right]$, где левая граница — максимальный выигрыш игрока $(n-$

$k+1$), а правая граница — максимальный выигрыш игрока $(n-k)$, то теперь, когда число игроков стало нечетным, у игрока $(n-k)$ максимальный выигрыш переместится в $\frac{1}{2}=\frac{k}{n-1}$, а интервал для предложения игрока 1 станет $\left[\frac{k-1}{2k};\frac{k+1}{2k}\right]$.

Первые шаги будут повторять решение для четного количества игроков с той разницей, что **игрок 1** предложит $x\in\left[\frac{1}{2};\frac{k+1}{2k}\right]$ и игроки $n,(n-1),(n-2),\ldots,(n-k+1)$ будут делать предложения $\delta x,\delta^2x,\delta^3x,\ldots,\delta^kx,\ \delta^ix\in\left[\frac{k-1}{2k};\frac{1}{2}\right],\ i=0,1,2,\ldots,k$.

Наступает ход **игрока $(n-k)$**. Для принятия его предложения $y\in[0,1]$ необходимо выполнение следующих неравенств:

(игрок 1) $y\geqslant\delta^{k+1}x$;

(игрок 2) $\begin{cases}\frac{n-1}{n-2}y\geqslant\frac{n-1}{n-2}\delta^{k+1}x,\\(n-1)(1-y)\geqslant\frac{n-1}{n-2}\delta^{k+1}x;\end{cases}$

(игрок 3) $\begin{cases}\frac{n-1}{n-3}y\geqslant\frac{n-1}{n-3}\delta^{k+1}x,\\\frac{n-1}{2}(1-y)\geqslant\frac{n-1}{n-3}\delta^{k+1}x;\end{cases}$

...

(игрок $n-k-1$) $\begin{cases}\frac{n-1}{k+1}y\geqslant\frac{n-1}{k+1}\delta^{k+1}x,\\\frac{n-1}{n-k-2}(1-y)\geqslant\frac{n-1}{k+1}\delta^{k+1}x;\end{cases}$

(игрок $n-k+1$) $\begin{cases}\frac{n-1}{k-1}y\geqslant\delta\frac{n-1}{n-k}(1-\delta^kx),\\\frac{n-1}{n-k}(1-y)\geqslant\delta\frac{n-1}{n-k}(1-\delta^kx);\end{cases}$

...

(игрок $n-1$) $\begin{cases}(n-1)y\geqslant\delta\frac{n-1}{n-2}(1-\delta^kx),\\\frac{n-1}{n-2}(1-y)\geqslant\delta\frac{n-1}{n-2}(1-\delta^kx);\end{cases}$

(игрок n) $1-y\geqslant\delta(1-\delta^kx)$.

Объединим и сократим ограничения:

$$\begin{cases}y\geqslant\delta^{k+1}x,\\y\geqslant\frac{k-1}{n-k}\delta(1-\delta^kx),\end{cases}\qquad\begin{cases}y\leqslant1-\frac{n-k-2}{k+1}\delta^{k+1}x,\\y\leqslant1-\delta(1-\delta^kx).\end{cases}$$

Из этих неравенств получаем допустимый интервал для предложений игрока $(n-k)$ $[\delta^{k+1}x;1-\delta(1-\delta^kx)]$. Теперь предположим, что

$$\delta^{k+1}x\leqslant\frac{1}{2}\leqslant1-\delta(1-\delta^kx).\tag{8}$$

Тогда наилучшим предложением игрока $(n-k)$ будет $\hat{x}_{n-k}=\frac{1}{2}$.

Наступает ход **игрока $(n-k-1)$**. Его наилучшее предложение $y\in[0,1]$ получается из допустимого интервала $[\frac{1}{2}\delta;1-\frac{1}{2}\delta]$, и оно будет $\hat{x}_{n-k-1}=1-\frac{1}{2}\delta$. Предположим, что

$$1-\frac{1}{2}\delta\in\left[\frac{1}{2};\frac{k+1}{2k}\right].\tag{9}$$

Продолжая эти рассуждения, получим, что игрокам $(n-k-2)$, $(n-k-3),\ldots,2$ будут соответствовать предложения $1-\frac{1}{2}\delta^2,1-\frac{1}{2}\delta^3,\ldots,1-\frac{1}{2}\delta^{k-1}$. Будем считать, что все предложения принадлежат отрезку $\left[\frac{1}{2};\frac{k+1}{2k}\right]$.

Вновь наступает ход **игрока 1**. Его предложение y будет принято, если

(игрок 2) $\begin{cases}\frac{n-1}{n-2}y\geqslant\frac{n-1}{n-2}\delta(1-\frac{1}{2}\delta^{k-1}),\\(n-1)(1-y)\geqslant\frac{n-1}{n-2}\delta(1-\frac{1}{2}\delta^{k-1});\end{cases}$

...

(игрок $n-1$) $\begin{cases}(n-1)y \geqslant \frac{n-1}{n-2}\ \frac{1}{2}\delta^k,\\ \frac{n-1}{n-2}(1-y) \geqslant \frac{n-1}{n-2}\ \frac{1}{2}\delta^k;\end{cases}$

(игрок n) $1-y \geqslant \frac{1}{2}\delta^k$.

Объединим условия:

$$\begin{cases}y \geqslant \delta(1-\frac{1}{2}\delta^{k-1}),\\ \dots\\ y \geqslant \frac{1}{2(n-2)}\delta^k,\end{cases} \qquad \begin{cases}y \leqslant 1-\frac{1}{2(n-2)}\delta(1-\frac{1}{2}\delta^{k-1}),\\ \dots\\ y \leqslant 1-\frac{1}{2}\delta^k.\end{cases}$$

Определяем допустимый интервал для предложения игрока 1: $[\delta(1-\frac{1}{2}\delta^{k-1}); 1-\frac{1}{2}\delta^k]$. Наилучшим предложением этого игрока является $x^* = 1-\frac{1}{2}\delta^k$.

Так как используется метод обратной индукции, то предложения игрока 1 в начале и конце переговоров должны совпадать, а значит, $x^* \in \left[\frac{1}{2}; \frac{k+1}{2k}\right]$, откуда получаем условие (7) из утверждения

$$\delta^k \geqslant \frac{k-1}{k}.$$

Условия (8), (9) при условии (7) утверждения 3 выполняются. Утверждение доказано.

Приведем значения и интервалы, в которых решение имеет вид $x^* = 1-\frac{1}{2}\delta^k$, для разных δ:

n	7	11	21	31	51	101
$(\delta, 1)$	(0.8736, 1)	(0.9564, 1)	(0.9895, 1)	(0.9954, 1)	(0.9984, 1)	(0.9996, 1)

4. Заключение. В работе в аналитическом виде найдено равновесие, совершенное по подыграм в классе стационарных стратегий для задачи о времени встречи. Проведенные рассуждения показывают, что при изменении δ от 0 до 1 оптимальное предложение игрока 1 убывает от 1 до $\frac{1}{2}$, т. е., когда значение δ близко к 1, у игроков достаточно много времени для переговоров, поэтому предложение игрока 1 должно быть справедливым для всех. Если же дисконтирующий фактор близок к 0, полезности игроков быстро убывают, и они должны быстро принять решение, что выгодно игроку 1.

Литература

1. *Rubinstein A.* Perfect equilibrium in a bargaining model // Econometrica. 1982. Vol. 50 (1). P. 97–109. https://doi.org/10.2307/1912531

2. *Baron D., Ferejohn J.* Bargaining in legislatures // American Political Science Association. 1989. Vol. 83 (4). P. 1181–1206. https://doi.org/10.2307/1961664

3. *Eraslan Y.* Uniqueness of stationary equilibrium payoffs in the Baron — Ferejohn model // Journal of Economic Theory. 2002. Vol. 103. P. 11–30.

4. *Cho S., Duggan J.* Uniqueness of stationary equilibria in a one-dimensional model of bargaining // Journal of Economic Theory. 2003. Vol. 113 (1). P. 118–130. https://doi.org/10.1016/S0022-0531(03)00087-5

5. *Banks J. S., Duggan J.* A general bargaining model of legislative policy-making // Quarterly Journal of Political Science. 2006. Vol. 1. P. 49–85. https://doi.org/10.2307/2586381

6. *Predtetchinski A.* One-dimensional bargaining // Games and Economic Behavior. 2011. Vol. 72 (2). P. 526–543.

7. *Мазалов В. В., Носальская Т. Э.* Стохастический дизайн в задаче о дележе пирога // Математическая теория игр и ее приложения. 2012. Т. 4 (3). С. 33–50.

8. *Mazalov V. V., Nosalskaya T. E., Tokareva J. S.* Stochastic Cake Division Protocol // International Game Theory Review. 2014. Vol. 16 (2). N 1440009.

9. *Мазалов В. В., Токарева Ю. С.* Теоретико-игровые модели проведения конкурсов // Математическая теория игр и ее приложения. 2014. Т. 2 (2). С. 66–78.

10. *Буре В. М.* Об одной теоретико-игровой модели тендера // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2015. Вып. 1. С. 25–32.

11. *Губанов Д. А., Новиков Д. А., Чхартишвили А. Г.* Социальные сети: модели информационного влияния, управления и противоборства. М.: Физматлит, 2010. 229 с.

12. *Буре В. М., Парилина Е. М., Седаков А. А.* Консенсус в социальной сети с двумя центрами влияния // Проблемы управления. 2016. Т. 1. С. 21–28.

13. *Sedakov A. A., Zhen M.* Opinion dynamics game in a social network with two influence nodes // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2019. Т. 15. Вып. 1. С. 118–125. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2019.10

14. *Бурков В. Н., Коргин Н. А., Новиков Д. А.* Введение в теорию управления организационными системами. М.: Либроком, 2009. 264 с.

15. *Новиков Д. А.* Теория управления организационными системами. М.: Моск. психол.-соц. ин-т, 2005. 584 с.

16. *Cardona D., Ponsati C.* Bargaining one-dimensional social choices // Journal of Economic Theory. 2007. Vol. 137 (1). P. 627–651. https://doi.org/10.1016/j.jet.2006.12.001

17. *Cardona D., Ponsati C.* Uniqueness of stationary equilibria in bargaining one-dimentional polices under (super) majority rules // Game and Economic Behavior. 2011. Vol. 73 (1). P. 65–67. https://doi.org/10.1016/j.geb.2011.01.006

18. *Breton M., Thomas A., Zaporozhets V.* Bargaining in River Basin Committees: Rules versus // IDEI working papers. 2012. Vol. 732. P. 1–38.

Статья поступила в редакцию 8 августа 2022 г.
Статья принята к печати 1 сентября 2022 г.

Контактная информация:

Мазалов Владимир Викторович — д-р физ.-мат. наук, проф.; vmazalov@krc.karelia.ru

Яшин Владимир Владимирович — yashinv@krc.karelia.ru

Equilibrium in the problem of choosing the meeting time for N persons*

V. V. Mazalov[1,2], *V. V. Yashin*[1]

[1] Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre of Russian Academy of Sciences, 11, ul. Pushkinskaya, Petrozavodsk, 185910, Russian Federation
[2] St Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Mazalov V. V., Yashin V. V. Equilibrium in the problem of choosing the meeting time for N persons. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2022, vol. 18, iss. 4, pp. 501–515.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2022.405 (In Russian)

A game-theoretic model of competitive decision on a meet time is considered. There are n players who are negotiating the meeting time. The objective is to find a meet time that satisfies all participants. The players' utilities are represented by linear unimodal functions $u_i(x)$, $x \in [0,1]$, $i = 1, 2, ..., n$. The maximum values of the utility functions are located at the points $i/(n-1)$, $i = 0, ..., n-1$. Players take turns $1 \to 2 \to 3 \to \ldots \to (n-1) \to n \to 1 \to \ldots$. Players can indefinitely insist on a profitable solution for themselves. To prevent this from happening, a discounting factor $\delta < 1$ is introduced to limit the duration of negotiations. We will assume that after each negotiation session, the utility functions of all players

* This work was supported by the Russian Science Foundation (grant N 22-11-00051, https://rscf.ru/project/22-11-00051/).

will decrease proportionally to δ. Thus, if the players have not come to a decision before time t, then at time t their utilities are represented by the functions $\delta^{t-1}u_i(x),\ i = 1, 2, ..., n$. We will look for a solution in the class of stationary strategies, when it is assumed that the decisions of the players will not change during the negotiation time, i. e. the player i will make the same offer at step i and at subsequent steps $n+i, 2n+i, \ldots$. This will allow us to limit ourselves to considering the chain of sentences $1 \to 2 \to 3 \to \ldots \to (n-1) \to n \to 1$. We will use the method of backward induction. To do this, assume that player n is looking for his best responce, knowing player 1's proposal, then player $(n-1)$ is looking for his best responce, knowing player n's solution, etc. In the end, we find the best responce of the player 1, and it should coincide with his offer at the beginning of the procedure. Thus, the reasoning in the method of backward induction has the form $1 \leftarrow 2 \leftarrow 3 \leftarrow \ldots \leftarrow (n-1) \leftarrow n \leftarrow 1$. The subgame perfect equilibrium in the class of stationary strategies is found in analytical form. It is shown that when δ changes from 1 to 0, the optimal offer of player 1 changes from $\frac{1}{2}$ to 1. That is, when the value of δ is close to 1, the players have a lot of time to negotiate, so the offer of player 1 should be fair to everyone. If the discounting factor is close to 0, the utilities of the players decreases rapidly and they must quickly make a decision that is beneficial to player 1.

Keywords: optimal timing, linear utility functions, sequential bargaining, Rubinstein bargaining model, subgame perfect equilibrium, stationary strategies, backward induction.

References

1. Rubinstein A. Perfect equilibrium in a Bargaining Model. *Econometrica,* 1982, vol. 50 (1), pp. 97–109. https://doi.org/10.2307/1912531

2. Baron D., Ferejohn J. Bargaining in legislatures. *American Political Science Association,* 1989, vol. 83 (4), pp. 1181–1206. https://doi.org/10.2307/1961664

3. Eraslan Y. Uniqueness of stationary equilibrium payoffs in the Baron — Ferejohn model. *Journal of Economic Theory,* 2002, vol. 103, pp. 11–30.

4. Cho S., Duggan J. Uniqueness of stationary equilibria in a one-dimensional model of bargaining. *Journal of Economic Theory,* 2003, vol. 113 (1), pp. 118–130. https://doi.org/10.1016/S0022-0531(03)00087-5

5. Banks J. S., Duggan J. A general bargaining model of legislative policy-making. *Quarterly Journal of Political Science,* 2006, vol. 1, pp. 49–85. https://doi.org/10.2307/2586381

6. Predtetchinski A. One-dimensional bargaining. *Games and Economic Behavior*, 2011, vol. 72 (2), pp. 526–543.

7. Mazalov V. V., Nosalskaya T. E. Stohasticheskij dizajn v zadache o delezhe piroga [Stochastic design in the cake division problem]. *Matematicheskaya teoriya igr i eio prilozheniya* [*Matematic theory and supplement*], 2012, vol. 4 (3), pp. 33–50. (In Russian)

8. Mazalov V. V., Nosalskaya T. E., Tokareva J. S. Stochastic Cake Division Protocol. *International Game Theory Review*, 2014, vol. 16 (2), no. 1440009.

9. Mazalov V. V., Tokareva J. S. Teoretiko-igrovye modeli provedeniya konkursov [Game-theoretic models of tender design]. *Matematicheskaya teoriya igr i eio prilozheniya* [*Matematic theory and supplement*], 2014, vol. 2 (2), pp. 66–78. (In Russian)

10. Bure V. M. Ob odnoj teoretiko-igrovoj modeli tendera [One game-theoretical tender model]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 10. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2015, iss. 1, pp. 25–32. (In Russian)

11. Gubanov D. A., Novikov D. A., Chartishvili A. G. *Social'nye seti: modeli informacionnogo vliyaniya, upravleniya i protivoborstva* [*Informational influence and informational control models in social networks*]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2010, 229 p. (In Russian)

12. Bure V. M., Parilina E. M., Sedakov A. A. Konsensus v social'noj seti s dvumya centrami vliyaniya [Consensus in a social network with two principals]. *Automation and Remote Control*, 2016, vol. 1, pp. 21–28. (In Russian)

13. Sedakov A. A., Zhen M. Opinion dynamics game in a social network with two influence nodes. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2019, vol. 15, iss. 1, pp. 118–125. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2019.10

14. Burkov V. N., Korgin N. A., Novikov D. A. *Vvedenie v teoriyu upravleniya organizacionnymi sistemami* [*Introduction to the theory of management of organizational systems*]. Moscow, Librocom Publ., 2009, 264 p. (In Russian)

15. Novikov D. A. *Teoriya upravleniya organizacionnymi sistemami* [*Theory of management of organizational systems*]. Moscow, Moscow Psychological and Social Institute Publ., 2005, 584 p. (In Russian)

16. Cardona D., Ponsati C. Bargaining one-dimensional social choices. *Journal of Economic Theory*, 2007, vol. 137 (1), pp. 627–651. https://doi.org/10.1016/j.jet.2006.12.001

17. Cardona D., Ponsati C. Uniqueness of stationary equilibria in bargaining one-dimentional polices under (super) majority rules. *Game and Economic Behavior*, 2011, vol. 73 (1), pp. 65–67. https://doi.org/10.1016/j.geb.2011.01.006

18. Breton M., Thomas A., Zaporozhets V. Bargaining in River Basin Committees: Rules versus. *IDEI working papers*, 2012, vol. 732, pp. 1–38.

Received: August 08, 2022.
Accepted: September 01, 2022.

Authors' information:

Vladimir V. Mazalov — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; vmazalov@krc.karelia.ru

Vladimir V. Yashin — yashinv@krc.karelia.ru