ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 517.925.51
MSC 37N25

Условия конвергенции непрерывных и дискретных моделей популяционной динамики

А. Ю. Александров

Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация,
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Александров А. Ю.* Условия конвергенции непрерывных и дискретных моделей популяционной динамики // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2022. Т. 18. Вып. 4. С. 443–453. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2022.401

Рассматриваются некоторые классы непрерывных и дискретных обобщенных вольтерровских моделей популяционной динамики. Предполагается, что между любыми двумя видами в биологическом сообществе установлены отношения типа «симбиоз», «компенсализм» или «нейтрализм». Цель работы — получение условий, при выполнении которых изучаемые модели обладают свойством конвергенции. Это означает, что исследуемая система имеет ограниченное решение, которое асимптотически устойчиво в целом. Для вывода требуемых условий используются подход В. И. Зубова и его дискретный аналог. Предлагаются способы построения функций Ляпунова, с помощью которых проблема конвергенции для рассматриваемых моделей сводится к вопросу о существовании положительных решений некоторых систем линейных алгебраических неравенств. В случае, когда параметры моделей являются почти периодическими функциями, выполнение полученных условий гарантирует, что предельные ограниченные решения также будут почти периодическими. Приводится пример, иллюстрирующий установленные теоретические выводы.

Ключевые слова: динамика популяций, конвергенция, почти периодические колебания, асимптотическая устойчивость, функции Ляпунова.

1. Введение. В широком классе случаев при решении прикладных задач требуется исследовать вынужденные колебания, возникающие в рассматриваемых моделях под действием внешних возмущений [1–7]. С практической точки зрения особый интерес представляет ситуация, когда изучаемая система имеет единственное ограниченное на всей вещественной оси решение, которое асимптотически устойчиво в целом. Такое явление называют конвергенцией [8, 9]. Конвергенция — важное свойство, поскольку для конвергентной системы нахождение одного решения позволяет определить асимптотическое поведение всех остальных решений. В последние годы интерес к этому свойству возрос из-за его широкого применения в задачах автоматического регулирования, синхронизации, при анализе динамики моделей биологических систем и нейронных сетей [10–13].

Условия конвергенции хорошо изучены для линейных систем дифференциальных уравнений. Один из первых результатов о конвергенции нелинейных систем принадлежит Б. П. Демидовичу (см. [8, 9]). Достаточные условия конвергенции для нелинейных систем с периодическими правыми частями были получены В. А. Плиссом [14]. В. И. Зубов установил качественный критерий периодической и почти периодической конвергенции нелинейных систем [1]. Кроме того, он предложил конструктивный подход к проверке условий данного критерия. Указанный подход основан на использовании функций Ляпунова со специальными свойствами. В работе [15] результаты Зубова, полученные им для непрерывных систем, были распространены на дискретные динамические системы. С помощью методов абсолютной устойчивости В. А. Якубович определил достаточные условия конвергенции для систем автоматического управления со скалярными нелинейностями секторного типа [16]. Эти подходы успешно применялись для изучения динамики широких классов систем, было получено много интересных и важных результатов (см., например, [10, 12, 13, 17–20] и цитируемую там литературу). Однако следует заметить, что до сих пор отсутствуют общие конструктивные методы проверки свойства конвергенции для нелинейных систем.

В данной работе рассматриваются некоторые классы непрерывных и дискретных обобщенных вольтерровских моделей популяционной динамики [21, 22]. Предполагается, что между любыми двумя видами в биологическом сообществе установлены отношения типа «симбиоз», «компенсализм» или «нейтрализм». На основе подхода В. И. Зубова и его дискретного аналога выводятся достаточные условия, при выполнении которых изучаемые системы обладают свойством конвергенции. Показано, что с помощью специальных конструкций функций Ляпунова проблема конвергенции для описываемых моделей может быть сведена к вопросу о существовании положительных решений некоторых систем линейных алгебраических неравенств. Следует отметить, что доказанные теоремы представляют собой обобщения результатов работ [12, 13, 17], в которых условия конвергенции установлены для частных случаев изучаемых в настоящей статье биологических моделей и при более жестких ограничениях на их параметры.

В статье используются следующие обозначения:

• $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство, $\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора;

• $\mathbb{R}^n_+$ — неотрицательный ортант пространства $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbb{R}^n_+ = \left\{(x_1, \ldots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geqslant 0, \;\; i = 1, \ldots, n\right\},$$

$\operatorname{int} R^n_+$ — множество его внутренних точек;

• матрица $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ называется метцлеровой (см. [13, 22]), если $a_{ij} \geqslant 0$ при $i \neq j$, матрица $B = \{b_{ij}\}_{i,j=1}^n$ — неотрицательной, если $b_{ij} \geqslant 0$, $i, j = 1, \ldots, n$;

• для векторов неравенства будем понимать покомпонентно;

• если $x = (x_1, \ldots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$, то $\operatorname{diag}(x)$ — диагональная матрица размерности $n \times n$ с элементами $x_1, \ldots, x_n$ на главной диагонали, а $|x| = (|x_1|, \ldots, |x_n|)^\top$.

2. Условия конвергенции для непрерывной модели. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = \mathrm{diag}(x(t)) \left(b(t) + \sum_{s=1}^{m} A_s(t) F_s(x(t)) \right). \tag{1}$$

Здесь $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^\top \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы, вектор-функция $b(t)$ и матрицы $A_1(t), \ldots, A_n(t)$ непрерывны и ограничены при $t \geqslant 0$, $F_s(x)$ — функции сепарабельного типа, т. е. $F_s(x) = (f_{s1}(x_1), \ldots, f_{sn}(x_n))^\top$, определенные и непрерывные при $x \in \mathbb{R}^n_+$, $s = 1, \ldots, m$. Обозначим через $a_{ij}^{(s)}(t)$ элементы матрицы $A_s(t)$, а через $b_i(t)$ — компоненты вектора $b(t)$, $s = 1, \ldots, m$, $i, j = 1, \ldots, n$.

Система (1) — обобщенная вольтерровская модель популяционной динамики (см. [21–23]). В рассматриваемых уравнениях $x_i(t)$ — численность i-й популяции, функция $b_i(t)$ представляет собой коэффициент естественного прироста i-й популяции (удельная рождаемость минус удельная смертность), члены $a_{ii}^{(s)}(t)x_i(t)f_{si}(x_i(t))$ характеризуют процессы самолимитирования популяций по численности, члены $a_{ij}^{(s)}(t)x_i(t)f_{sj}(x_j(t))$ при $i \neq j$ определяют влияние одних популяций на другие. Заметим, что модели, исследовавшиеся в работах [11, 12, 21, 24], являются частными случаями системы (1).

Предположение 1. Функции $f_{sj}(x_j)$ обладают такими свойствами:

1) $f_{sj}(x_j)$ локально липшицевы;

2) $f_{sj}(0) = 0$;

3) $f_{sj}(x_j)$ строго возрастают при $x_j \geqslant 0$.

В соответствии с биологическим смыслом модели будем рассматривать систему (1) при $t \geqslant 0$, $x(t) \in \mathrm{int}\,\mathrm{R}^\mathrm{n}_+$. В силу указанного ограничения стандартное определение конвергенции (см. [8]) модифицируется следующим образом.

Определение 1. *Система* (1) *обладает свойством конвергенции, если у нее в* $\mathrm{int}\,\mathrm{R}^\mathrm{n}_+$ *существует ограниченное при* $t \in [0, +\infty)$ *решение, область притяжения которого совпадает с* $\mathrm{int}\,\mathrm{R}^\mathrm{n}_+$.

Заметим, что при выполнении предположения 1 $\mathrm{int}\,\mathrm{R}^\mathrm{n}_+$ является инвариантным множеством для (1). Обозначим через $x(t, x^{(0)}, t_0)$ решение рассматриваемой системы, выходящее при $t = t_0 \geqslant 0$ из точки $x^{(0)} \in \mathrm{int}\, R^n_+$.

Определение 2 [22]**.** *Система* (1) *называется равномерно перманентной, если существуют такие числа* γ_1 *и* γ_2, $0 < \gamma_1 < \gamma_2$, *что для любых чисел* δ_1 *и* δ_2, $0 < \delta_1 < \delta_2$, *можно выбрать* $T \geqslant 0$ *так, чтобы для решений* $x(t, x^{(0)}, t_0) = (x_1(t, x^{(0)}, t_0), \ldots, x_n(t, x^{(0)}, t_0))^\top$ *с начальными данными, удовлетворяющими условиям* $t_0 \geqslant 0$, $\delta_1 \leqslant x_i^{(0)} \leqslant \delta_2$, $i = 1, \ldots, n$, *при всех* $t \geqslant t_0 + T$ *имели место оценки* $\gamma_1 \leqslant x_i(t, x^{(0)}, t_0) \leqslant \gamma_2$, $i = 1, \ldots, n$.

Предположение 2. Можно указать число $\bar{b} > 0$ такое, что $b_i(t) \geqslant \bar{b}$ при $t \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Предположение 3. Матрицы $A_1(t), \ldots, A_n(t)$ при всех $t \geqslant 0$ являются метцлеровыми.

З а м е ч а н и е 1. Предположения 2 и 3 означают, что для каждого вида удельная рождаемость больше удельной смертности, и все популяции благотворно влияют друг на друга (между любыми двумя видами в сообществе имеют место отношения типа «симбиоз», «компенсализм» или «нейтрализм» [22, 23]).

Для получения условий конвергенции будем использовать подходы, разработанные в [1, 12, 13].

Предположение 4. Существует номер l такой, что $1 \leqslant l \leqslant m$ и $f_{sj}(x_j) \to +\infty$ при $x_j \to +\infty$, где $s = 1, \ldots, l$, $j = 1, \ldots, n$.

Предположение 5. Найдутся векторы c и $\bar{a}$ с положительными компонентами такие, что

$$A_s^\top(t)c \leqslant 0, \quad s = 1, \ldots, m, \quad \sum_{s=1}^{l} A_s^\top(t)c < -\bar{a}$$

при всех $t \geqslant 0$.

Теорема 1. *Если выполнены предположения 1–5, то система* (1) *обладает свойством конвергенции.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя предположения 2 и 3, получаем, что

$$\dot{x}_i(t) \geqslant x_i(t)\left(\bar{b} + \sum_{s=1}^{m} a_{ii}^{(s)}(t) f_{si}(x_i(t))\right), \quad i = 1, \ldots, n,$$

при $t \geqslant 0$, $x(t) \in \operatorname{int} R_+^n$. Следовательно, можно указать число $\gamma > 0$ такое, что

$$\dot{x}_i(t) \geqslant \frac{1}{2}\bar{b} x_i(t)$$

при $t \geqslant 0$, $0 < x_i(t) \leqslant \gamma,\ i = 1, \ldots, n$. Значит, для любого $\delta > 0$ найдется $T \geqslant 0$ такое, что если $t_0 \geqslant 0$ и $x_i^{(0)} \geqslant \delta$, $i = 1, \ldots, n$, то для решения $x(t)$ системы (1), проходящего при $t = t_0$ через точку $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})^\top$, при $t \geqslant t_0 + T$ справедливы неравенства $x_i(t) \geqslant \gamma,\ i = 1, \ldots, n$.

Выбираем векторы c и $\bar{a}$, обладающие свойствами, указанными в предположении 5. Пусть c_i — компоненты вектора c. Рассмотрим функцию Ляпунова

$$V(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \ln x_i.$$

Дифференцируя ее в силу системы (1), имеем

$$\dot{V} = c^\top\left(b(t) + \sum_{s=1}^{m} A_s(t) F_s(x(t))\right) \leqslant \beta + \sum_{s=1}^{l} F_s^\top(x(t)) A_s^\top(t) c,$$

где β — положительная постоянная. Из полученной оценки производной функции Ляпунова и предположений 4, 5 следует существование положительных чисел α и η таких, что $\dot{V} \leqslant -\alpha$ при $x(t) \in \operatorname{int} R_+^n$, $\|x(t)\| \geqslant \eta$. С помощью установленных свойств решений нетрудно показать (см. [24]), что система (1) равномерно перманентна.

Далее произведем в рассматриваемых уравнениях замену переменных $z_i(t) = \ln x_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда получим, что

$$\dot{z}(t) = b(t) + \sum_{s=1}^{m} A_s(t) G_s(z(t)). \tag{2}$$

Здесь $z(t) = (z_1(t), \ldots, z_n(t))^\top$, $G_s(z) = (g_{s1}(z_1), \ldots, g_{sn}(z_n))^\top$, $g_{sj}(z_j) = f_{sj}(e^{z_j})$, $s = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n$.

Из равномерной перманентности системы (1) вытекает, что система (2) равномерно диссипативна.

Пусть $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — два решения системы (2), а $\xi(t) = \varphi(t) - \psi(t)$. Найдем, что

$$\dot{\xi}(t) = \sum_{s=1}^{m} A_s(t)\left(G_s(\xi(t) + \psi(t)) - G_s(\psi(t))\right). \tag{3}$$

Выберем функцию Ляпунова в виде $\widetilde{V}(\xi) = c^\top |\xi|$, где вектор c обладает свойствами, указанными в предположении 5. Для производной этой функции в силу системы (3) справедлива оценка

$$\dot{\widetilde{V}} \leqslant \sum_{s=1}^{m} \left| G_s(\xi(t) + \psi(t)) - G_s(\psi(t)) \right|^\top A_s^\top(t) c.$$

Значит, для любого $r > 0$ имеем $\dot{\widetilde{V}} \leqslant W_r(\xi(t))$ при $\xi(t) \in \mathbb{R}^n$, $\|\psi(t)\| \leqslant r$, где

$$W_r(\xi) = \sup_{t \geqslant 0,\, \|\psi\| \leqslant r} \sum_{s=1}^{m} \left| G_s(\xi + \psi) - G_s(\psi) \right|^\top A_s^\top(t) c.$$

Из предположений 1 и 5 вытекает, что функция $W_r(\xi)$ отрицательно определена. Таким образом, для системы (2) выполнены все требования теоремы Зубова о достаточных условиях конвергенции нелинейных систем [1]. Но тогда свойством конвергенции обладает и система (1). Теорема 1 доказана.

Следствие 1. *Пусть компоненты вектора* $b(t)$ *и элементы матриц* $A_1(t), \dots, A_m(t)$ *являются почти периодическими функциями. Если выполнены предположения 1–5, то у системы* (1) *в* $\operatorname{int} \mathrm{R}_+^{\mathrm{n}}$ *существует единственное почти периодическое решение, область притяжения которого совпадает с* $\operatorname{int} \mathrm{R}_+^{\mathrm{n}}$.

Действительно, в этом случае система (2) удовлетворяет всем условиям теоремы Зубова о почти периодической конвергенции (см. [1]).

3. Условия конвергенции для дискретной модели. Рассмотрим теперь систему разностных уравнений

$$x_i(k+1) = x_i(k) \exp\left(h \left(b_i(k) + \sum_{s=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(s)}(k) f_{sj}(x_j(k)) \right) \right), \quad i = 1, \dots, n, \tag{4}$$

представляющую собой дискретный аналог непрерывной модели (1). Здесь $x_i(k)$ — плотность i-й популяции при k-й итерации, $k = 0, 1, \dots$, функции $f_{sj}(x_j)$ непрерывны при $x_i \in [0, +\infty)$, h — положительное число (шаг дискретизации), функции $b_i(k)$ и $a_{ij}^{(s)}(k)$ определены и ограничены при $k = 0, 1, \dots,\ s = 1, \dots, m,\ i, j = 1, \dots, n$.

Известно (см. [22, 23]), что в ряде случаев дискретные модели более адекватно описывают процессы, протекающие в биологических сообществах, чем непрерывные.

Пусть $x(k) = (x_1(k), \dots, x_n(k))^\top$, $b(k) = (b_1(k), \dots, b_n(k))^\top$, $A_s(k) = \left\{ a_{ij}^{(s)}(k) \right\}_{i,j=1}^{n}$, $s = 1, \dots, m$.

Как и для системы (1), считаем, функции $f_{sj}(x_j)$ удовлетворяют условиям, указанным в предположении 1, а траектории решений рассматриваемых уравнений содержатся в множестве $\operatorname{int} R_+^n$, которое является инвариантным для (4).

Определение 3. *Система* (4) *обладает свойством конвергенции, если у нее в* $\operatorname{int} \mathrm{R}_+^{\mathrm{n}}$ *существует ограниченное при* $k = 0, 1, \dots$ *решение, область притяжения которого совпадает с* $\operatorname{int} \mathrm{R}_+^{\mathrm{n}}$.

Обозначим через $x(k, x^{(0)}, k_0)$ решение изучаемой системы, выходящее при $k = k_0 \geqslant 0$ из точки $x^{(0)} \in \operatorname{int} R_+^n$.

Определение 4 [22]. *Система* (4) *называется равномерно перманентной, если существуют такие числа* γ_1 *и* γ_2, $0 < \gamma_1 < \gamma_2$, *что для любых* δ_1 *и* δ_2, $0 < \delta_1 < \delta_2$, *можно выбрать целое неотрицательное число* N *так, чтобы для* *решений* $x(k, x^{(0)}, k_0) = (x_1(k, x^{(0)}, k_0), \ldots,\ x_n(k, x^{(0)}, k_0))^\top$ *с начальными данными, удовлетворяющими условиям* $k_0 \geqslant 0$, $\delta_1 \leqslant x_i^{(0)} \leqslant \delta_2$, $i = 1, \ldots, n$, *при всех* $k \geqslant k_0 + N$ *имели место оценки* $\gamma_1 \leqslant x_i(k, x^{(0)}, k_0) \leqslant \gamma_2$, $i = 1, \ldots, n$.

Предположение 6. Можно указать число $\bar{b} > 0$ такое, что $b_i(k) \geqslant \bar{b}$ при $k = 0, 1, \ldots$, $i = 1, \ldots, n$.

Предположение 7. Матрицы $A_1(k), \ldots, A_m(k)$ при всех $k = 0, 1, \ldots$ являются метцлеровыми.

Предположение 8. Найдутся векторы c и $\bar{a}$ с положительными компонентами такие, что

$$A_s^\top(k)c \leqslant 0, \quad s = 1, \ldots, m, \quad \sum_{s=1}^{l} A_s^\top(k)c < -\bar{a}$$

при всех $k \geqslant 0$.

Предположение 9. Для функций $g_{si}(z_i) = f_{si}(\exp(z_i))$ при $z_i \in (-\infty, +\infty)$ выполнено условие Липшица с константой L, $i = 1, \ldots, n$, $s = 1, \ldots, m$.

Предположение 10. Справедливы неравенства $1 + hL \sum_{s=1}^{m} a_{ii}^{(s)} \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Теорема 2. *Если выполнены предположения 1, 4, 6–10, то система* (4) *обладает свойством конвергенции.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть векторы c и $\bar{a}$ удовлетворяют условиям, указанным в предположении 8. Построим функцию Ляпунова

$$V(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \ln x_i,$$

где c_i — компоненты вектора c. Рассмотрим приращение этой функции на решениях системы (4). Имеем

$$\Delta V = h\, c^\top \left(b(k) + \sum_{s=1}^{m} A_s(k) F_s(x(k)) \right) \leqslant \beta + h \sum_{s=1}^{l} F_s^\top(x(k)) A_s^\top(k) c,$$

где $\beta = \mathrm{const} > 0$. Учитывая предположения 4 и 8, получаем, что положительные числа α и η можно выбрать так, чтобы при $x(k) \in \operatorname{int} R_+^n$, $\|x(k)\| \geqslant \eta$ выполнялось неравенство $\Delta V \leqslant -\alpha$.

Из предположений 6 и 7 следует, что

$$x_i(k+1) \geqslant x_i(k) \exp\left(h \left(\bar{b} + \sum_{s=1}^{m} a_{ii}^{(s)}(k) f_{si}(x_i(k)) \right) \right), \quad i = 1, \ldots, n,$$

при $k \geqslant 0$, $x(k) \in \operatorname{int} R_+^n$. Поэтому существует число $\gamma > 0$ такое, что

$$x_i(k+1) \geqslant x_i(k) \exp\left(\frac{1}{2} h \bar{b} \right)$$

при $k \geqslant 0$, $0 < x_i(k) \leqslant \gamma$, $i = 1, \ldots, n$.

Кроме того, используя предположение 9, нетрудно проверить, что при $k \geqslant 0$, $x(k) \in \operatorname{int} R_+^n$ справедливы оценки

$$x_i(k{+}1) \geqslant x_i(k) \exp\left(h\bar{b} + h \sum_{s=1}^{m} a_{ii}^{(s)}(k) f_{si}(1) \right) \exp\left(h \sum_{s=1}^{m} a_{ii}^{(s)}(k) (f_{si}(x_i(k)) - f_{si}(1)) \right) \geqslant$$

$$\geqslant \exp\left(h\bar{b} + h\sum_{s=1}^{m} a_{ii}^{(s)}(k)f_i(1)\right)\exp\left(\ln x_i(k) + hL|\ln x_i(k)|\sum_{s=1}^{m} a_{ii}^{(s)}(k)\right), \quad i = 1,\dots,n.$$

Учитывая предположение 10, получаем, что число $\tilde{\gamma} \in (0,\gamma)$ можно выбрать так, чтобы при $x_i(k) > \gamma$ выполнялось неравенство $x_i(k+1) \geqslant \tilde{\gamma}$. Тогда для любого $\delta > 0$ найдется целое неотрицательное число N такое, что если $k_0 \geqslant 0$ и $x_i^{(0)} \geqslant \delta$, $i = 1,\dots,n$, то для решения $x(k)$ системы (4), проходящего при $k = k_0$ через точку $x^{(0)} = (x_1^{(0)},\dots,x_n^{(0)})^\top$, при $k \geqslant k_0 + N$ имеем $x_i(k) \geqslant \tilde{\gamma}$, $i = 1,\dots,n$.

Установленные свойства решений гарантируют, что система (4) равномерно перманентна.

Далее произведем в рассматриваемых уравнениях замену переменных $z_i(k) = \ln x_i(k)$, $i = 1,\dots,n$. Тогда

$$z(k+1) = z(k) + hb(k) + h\sum_{s=1}^{m} A_s(k)G_s(z(k)). \tag{5}$$

Здесь $z(k) = (z_1(k),\dots,z_n(k))^\top$, $G_s(z) = (g_{s1}(z_1),\dots,g_{sn}(z_n))^\top$, $g_{sj}(z_j) = f_{sj}\left(e^{z_j}\right)$, $s = 1,\dots,m,\ j = 1,\dots,n$.

Из равномерной перманентности системы (4) следует, что система (5) равномерно диссипативна.

Пусть $\varphi(k)$ и $\psi(k)$ — два решения системы (5), а $\xi(k) = \varphi(k) - \psi(k)$. Получим, что

$$\xi(k+1) = \xi(k) + h\sum_{s=1}^{m} A_s(k)\left(G_s(\xi(k)+\psi(k)) - G_s(\psi(k))\right). \tag{6}$$

Выберем функцию Ляпунова в виде $\widetilde{V}(\xi) = c^\top|\xi|$, где вектор c обладает свойствами, указанными в предположении 8. Рассмотрим приращение этой функции на решениях системы (6):

$$\Delta\widetilde{V} = \sum_{i=1}^{n} c_i\left(\left|\xi_i(k) + h\sum_{s=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(s)}(k)\left(g_{sj}(\xi_j(k)+\psi_j(k)) - g_{sj}(\psi_j(k))\right)\right| - |\xi_i(k)|\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} c_i\left(\left|\xi_i(k) + h\sum_{s=1}^{m} a_{ii}^{(s)}(k)\left(g_{si}(\xi_i(k)+\psi_i(k)) - g_{si}(\psi_i(k))\right)\right| - |\xi_i(k)|\right) +$$

$$+ h\sum_{i=1}^{n} c_i\sum_{s=1}^{m}\sum_{j\neq i} a_{ij}^{(s)}(k)\left|g_{sj}(\xi_j(k)+\psi_j(k)) - g_{sj}(\psi_j(k))\right|.$$

С использованием предположений 9 и 10 нетрудно показать, что

$$\Delta\widetilde{V} \leqslant h\sum_{s=1}^{m}\left|G_s(\xi(k)+\psi(k)) - G_s(\psi(k))\right|^\top A_s^\top(k)c.$$

Значит, для любого $r > 0$ при $\xi(k) \in \mathbb{R}^n$, $\|\psi(k)\| \leqslant r$ справедлива оценка $\Delta\widetilde{V} \leqslant W_r(\xi(k))$. Здесь

$$W_r(\xi) = \sup_{k\geqslant 0,\, \|\psi\|\leqslant r}\sum_{s=1}^{m}\left|G_s(\xi+\psi) - G_s(\psi)\right|^\top A_s^\top(k)c.$$

Из выполнения предположений 1 и 5 следует отрицательная определенность функции $W_r(\xi)$. Таким образом, система (5) удовлетворяет всем требованиям дискретного аналога теоремы Зубова о достаточных условиях конвергенции разностных систем (см. [15]). Но тогда свойством конвергенции обладает и система (4). Теорема 2 доказана.

Следствие 2. *Пусть компоненты вектора* $b(k)$ *и элементы матриц* $A_1(k)$, $\ldots, A_m(k)$ *являются почти периодическими функциями (см.* [25]*). Если выполнены предположения 1, 4, 6–10, то у системы* (4) *в* $\operatorname{int}\mathrm{R}^{\mathrm{n}}_{+}$ *существует единственное почти периодическое решение, область притяжения которого совпадает с* $\operatorname{int}\mathrm{R}^{\mathrm{n}}_{+}$.

Действительно, в этом случае система (4) удовлетворяет условиям дискретного аналога теоремы Зубова о почти периодической конвергенции [15].

4. Пример. Предположим, что взаимодействие трех видов в биологическом сообществе описывается системой

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= x_1(t)\left(3-\sin t - x_1(t) - 2x_1^3(t) + x_3(t) + x_3^3(t)\right), \\
\dot{x}_2(t) &= x_2(t)\left(2+\cos t - 3x_2(t) + x_3^3(t)\right), \\
\dot{x}_3(t) &= x_3(t)\left(1 + x_1(t) + x_2(t) - x_3(t) + x_1^3(t) - 3x_3^3(t)\right).
\end{aligned} \tag{7}$$

Систему (7) можно записать в форме

$$\dot{x}(t) = \operatorname{diag}(x(t))\left(b(t) + A_1F_1(x(t)) + A_2F_2(x(t))\right), \tag{8}$$

где $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^\top$; $b(t) = (3-\sin t, 2+\cos t, 1)^\top$; $F_1(x) = x$; $F_2(x) = (x_1^3, x_2^3, x_3^3)^\top$;

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что для системы (8) выполнены предположения 1–5. Значит (см. теорему 1), она обладает свойством конвергенции, причем из результатов, полученных в [1], следует, что у нее в $\operatorname{int} R^3_+$ существует единственное периодическое решение, область притяжения которого совпадает с $\operatorname{int} R^3_+$.

Заметим, что в данном случае не существует положительного вектора c такого, что $A_1^\top c < 0$ или $A_2^\top c < 0$. Однако предположение 5 выполняется при $c = (1,1,1)^\top$.

5. Заключение. В настоящей работе с помощью теоремы Зубова и ее дискретного аналога найдены достаточные условия конвергенции двух моделей популяционной динамики, описываемых соответственно дифференциальными и разностными уравнениями. Для получения указанных результатов использовались специальные конструкции функций Ляпунова. Показано, что вопрос о существовании таких функций сводится к вопросу о разрешимости некоторых систем линейных алгебраических неравенств.

В качестве направления дальнейших исследований укажем распространение предложенных подходов на модели, содержащие запаздывания.

Литература

1. *Зубов В. И.* Колебания в нелинейных и управляемых системах. Л.: Судпромгиз, 1962. 631 с.

2. *Provotorov V. V., Sergeev S. M., Hoang V. N.* Point control of a differential-difference system with distributed parameters on the graph // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2021. Т. 17. Вып. 3. С. 277–286. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.305

3. *Zhabko A. P., Provotorov V. V., Ryazhskikh V. I., Shindyapin A. I.* Optimal control of a differential-difference parabolic systems with distributed parameters on the graph // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2021. Т. 17. Вып. 4. С. 433–448. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.411

4. *Tkhai V. N.* Model with coupled subsystems // Automation and Remote Control. 2013. Vol. 74. N 6. P. 919–931.

5. *Sedighi H. M., Daneshmand F.* Nonlinear transversely vibrating beams by the homotopy perturbation method with an auxiliary term // Journal of Applied and Computational Mechanics. 2015. Vol. 1. N 1. P. 1–9.

6. *Park Y., Lee C.* Dynamic investigation of non-linear behavior of hydraulic cylinder in mold oscillator using PID control process // Journal of Applied and Computational Mechanics. 2021. Vol. 7. N 1. P. 270–276.

7. *Aleksandrov A. Yu., Stepenko N. A.* Stability analysis of gyroscopic systems with delay under synchronous and asynchronous switching // Journal of Applied and Computational Mechanics. 2022. Vol. 8. N 3. P. 1113–1119.

8. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.

9. *Pavlov A., Pogromsky A., van de Wouw N., Nijmeijer H.* Convergent dynamics, a tribute to Boris Pavlovich Demidovich // Syst. Control Lett. 2004. Vol. 52. P. 257–261.

10. *Ruffer B., van de Wouw N., Mueller M.* Convergent systems vs. incremental stability // Syst. Control Lett. 2013. Vol. 62. P. 277–285.

11. *Chen F.* Some new results on the permanence and extinction of nonautonomous Gilpin — Ayala type competition model with delays // Nonlinear Analysis: Real World Applications. 2006. Vol. 7. P. 1205–1222.

12. *Aleksandrov A., Aleksandrova E.* Convergence conditions for some classes of nonlinear systems // Syst. Control Lett. 2017. Vol. 104. P. 72–77.

13. *Mei W., Efimov D., Ushirobira R., Aleksandrov A.* On convergence conditions for generalized Persidskii systems // Intern. Journal of Robust Nonlinear Control. 2022. Vol. 32. N 6. P. 3696–3713.

14. *Pliss V. A.* Nonlocal problems of the theory of oscillations. London: Academic Press, 1966. 306 p.

15. *Атаева Н. Н.* Свойство конвергенции для разностных систем // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2004. Вып. 4. С. 91–98.

16. *Yakubovich V.* Matrix inequalities in stability theory for nonlinear control systems. III. Absolute stability of forced vibrations // Automation and Remote Control. 1964. Vol. 7. P. 905–917.

17. *Нгуен Д. Х.* Условия конвергенции некоторых классов нелинейных разностных систем // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2011. Вып. 2. С. 90–96.

18. *Aleksandrov A. Yu.* Some convergence and stability conditions for nonlinear systems // Differ. Equ. 2000. Vol. 36. N 4. P. 613–615.

19. *Kosov A. A., Shchennikov V. N.* On the convergence phenomenon in complex almost periodic systems // Differ Equ. 2014. Vol. 50. N 12. P. 1573–1583.

20. *Стрекопытов С. А., Стрекопытова М. В.* О конвергенции динамических квазипериодических систем // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2022. Т. 18. Вып. 1. С. 79–86. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2022.106

21. *Пых Ю. А.* Равновесие и устойчивость в моделях популяционной динамики. М.: Наука, 1983. 182 с.

22. *Hofbauer J., Sigmund K.* Evolutionary games and population dynamics. Cambridge: Cambridge University Press, 1998. 323 p.

23. *Britton N. F.* Essential mathematical biology. London; Berlin; Heidelberg: Springer, 2003. 335 p.

24. *Aleksandrov A. Yu., Aleksandrova E. B., Platonov A. V.* Ultimate boundedness conditions for a hybrid model of population dynamics // Proceedings of 21st Mediterranean conference on Control and Automation. June 25–28. 2013. Platanias-Chania, Crite, Greece, 2013. P. 622–627.

25. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем / пер. с румынск.; под ред. В. П. Рубаника. М.: Мир, 1971. 312 с.

Статья поступила в редакцию 23 апреля 2022 г.
Статья принята к печати 1 августа 2022 г.

Контактная информация:

Александров Александр Юрьевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; a.u.aleksandrov@spbu.ru

Convergence conditions for continuous and discrete models of population dynamics

A. Yu. Aleksandrov

St Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Aleksandrov A. Yu. Convergence conditions for continuous and discrete models of population dynamics. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2022, vol. 18, iss. 4, pp. 443–453.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2022.401 (In Russian)

Some classes of continuous and discrete generalized Volterra models of population dynamics are considered. It is supposed that there are relationships of the type “symbiosis”, “compensationism” or “neutralism” between any two species in a biological community. The objective of the work is to obtain conditions under which the investigated models possess the convergence property. This means that the studying system admits a bounded solution that is globally asimptotically stable. To determine the required conditions, the V. I. Zubov’s approach and its discrete-time counterpart are used. Constructions of Lyapunov functions are proposed, and with the aid of these functions, the convergence problem for the considered models is reduced to the problem of the existence of positive solutions for some systems of linear algebraic inequalities. In the case where parameters of models are almost periodic functions, the fulfilment of the derived conditions implies that limiting bounded solutions are almost periodic, as well. An example is presented illustrating the obtained theoretical conclusions.

Keywords: population dynamics, convergence, almost periodic oscillations, asymptotic stability, Lyapunov functions.

References

1. Zubov V. I. *Kolebanija v nelinejnyh i upravljaemyh sistemah* [*Oscillations in nonlinear and controlled systems*]. Leningrad, Sudpromgiz Publ., 1962, 631 p. (In Russian)

2. Provotorov V. V., Sergeev S. M., Hoang V. N. Point control of a differential-difference system with distributed parameters on the graph. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2021, vol. 17, iss. 3, pp. 277–286.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.305

3. Zhabko A. P., Provotorov V. V., Ryazhskikh V. I., Shindyapin A. I. Optimal control of a differential-difference parabolic systems with distributed parameters on the graph. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2021, vol. 17, iss. 4, pp. 433–448. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.411

4. Tkhai V. N. Model with coupled subsystems. *Automation and Remote Control*, 2013, vol. 74, no. 6, pp. 919–931.

5. Sedighi H. M., Daneshmand F. Nonlinear transversely vibrating beams by the homotopy perturbation method with an auxiliary term. *Journal of Applied and Computational Mechanics*, 2015, vol. 1, no. 1, pp. 1–9.

6. Park Y., Lee C. Dynamic investigation of non-linear behavior of hydraulic cylinder in mold oscillator using PID control process. *Journal of Applied and Computational Mechanics*, 2021, vol. 7, no. 1, pp. 270–276.

7. Aleksandrov A. Yu., Stepenko N. A. Stability analysis of gyroscopic systems with delay under synchronous and asynchronous switching. *Journal of Applied and Computational Mechanics*, 2022, vol. 8, no. 3, pp. 1113–1119.

8. Demidovich B. P. *Lekcii po matematicheskoj teorii ustojchivosti* [*Lectures on mathematical stability theory*]. Moscow, Nauka Publ., 1967, 472 p. (In Russian)

9. Pavlov A., Pogromsky A., van de Wouw N., Nijmeijer H. Convergent dynamics, a tribute to Boris Pavlovich Demidovich. *Syst. Control Lett.*, 2004, vol. 52, pp. 257–261.

10. Ruffer B., van de Wouw N., Mueller M. Convergent systems vs. incremental stability. *Syst. Control Lett.*, 2013, vol. 62, pp. 277–285.

11. Chen F. Some new results on the permanence and extinction of nonautonomous Gilpin — Ayala

type competition model with delays. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2006, vol. 7, pp. 1205–1222.

12. Aleksandrov A., Aleksandrova E. Convergence conditions for some classes of nonlinear systems. *Syst. Control Lett.*, 2017, vol. 104, pp. 72–77.

13. Mei W., Efimov D., Ushirobira R., Aleksandrov A. On convergence conditions for generalized Persidskii systems. *Intern. Journal of Robust Nonlinear Control*, 2022, vol. 32, no. 6, pp. 3696–3713.

14. Pliss V. A. *Nonlocal problems of the theory of oscillations.* London, Academic Press, 1966, 306 p.

15. Ataeva N. N. Svojstvo konvergencii dlja raznostnyh sistem [The convergence property for difference systems]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 10. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2004, iss. 4, pp. 91–98. (In Russian)

16. Yakubovich V. Matrix inequalities in stability theory for nonlinear control systems. III. Absolute stability of forced vibrations. *Automation and Remote Control*, 1964, vol. 7, pp. 905–917.

17. Nguen D. H. Uslovija konvergencii nekotoryh klassov nelinejnyh raznostnyh sistem [Convergence conditions for some classes of nonlinear difference systems]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 10. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2011, iss. 2, pp. 90–96. (In Russian)

18. Aleksandrov A. Yu. Some convergence and stability conditions for nonlinear systems. *Differ. Equ.*, 2000, vol. 36, no. 4, pp. 613–615.

19. Kosov A. A., Shchennikov V. N. On the convergence phenomenon in complex almost periodic systems. *Differ Equ.* 2014, vol. 50, no. 12, pp. 1573–1583.

20. Strekopytov S. A., Strekopytova M. V. O konvergencii dinamicheskih kvaziperiodicheskih system [On the convergence of dynamic quasiperiodic systems]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2022, vol. 18, iss. 1, pp. 79–86. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2022.106 (In Russian)

21. Pykh Yu. A. *Ravnovesie i ustojchivost' v modeljah populjacionnoj dinamiki* [*Equilibrium and stability in models of population dynamics*]. Moscow, Nauka Publ., 1983, 182 p. (In Russian)

22. Hofbauer J., Sigmund K. *Evolutionary games and population dynamics.* Cambridge, Cambridge University Press, 1998, 323 p.

23. Britton N. F. *Essential mathematical biology.* London, Berlin, Heidelberg, Springer Publ., 2003, 335 p.

24. Aleksandrov A. Yu., Aleksandrova E. B., Platonov A. V. Ultimate boundedness conditions for a hybrid model of population dynamics. *Proceedings of 21st Mediterranean conference on Control and Automation*, June 25–28, 2013. Platanias-Chania, Crite, Greece, 2013, pp. 622–627.

25. Khalanai A., Vexler D. *Kachestvennaja teorija impul'snyh sistem* [*Qualitative theory of impulsive systems*]. Translated from Romanian, ed. by V. P. Rubanik. Moscow, Mir Publ., 1971, 312 p. (In Russian)

Received: April 23, 2022.
Accepted: August 01, 2022.

A u t h o r's i n f o r m a t i o n:

Alexander Yu. Aleksandrov — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; a.u.aleksandrov@spbu.ru