

## Построение механической модели левого желудочка сердца человека в процессе его сокращения

*В. П. Трегубов, Н. К. Егорова*

Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация,  
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

**Для цитирования:** *Трегубов В. П., Егорова Н. К.* Построение механической модели левого желудочка сердца человека в процессе его сокращения // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2022. Т. 18. Вып. 3. С. 402–409. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2022.309>

Проведен подробный анализ предшествующих работ по моделированию левого желудочка (ЛЖ) сердца человека, начиная с механических моделей в виде простейших объемных фигур (цилиндр, сфера, эллипсоид вращения) и кончая моделями, использующими реальные контуры сердца человека, полученные с помощью его ультразвукового исследования. Предложен путь построения механической модели ЛЖ на основе обработки его динамических изображений, полученных с помощью компьютерной и магнитно-резонансной томографии (МРТ). Численные методы, разработанные для создания конечно-элементной модели, были реализованы в системе CMISS, которая позволяет применять методы анализа конечных элементов для решения различных сложных задач. Чтобы избежать необходимости оперировать огромными массивами чисел (до 10 тыс. числовых значений в каждый момент времени МРТ-исследования), были выбраны характерные точки трехмерного изображения ЛЖ и проведена сплайн-интерполяция каркаса модели, написанной на языке C++ с помощью модуля Simgui. Для описания работы механической модели сокращения ЛЖ были выделены основные составляющие этого процесса: поперечное сжатие, продольное сокращение и скручивание. С этой целью было предложено использовать математические характеристики.

*Ключевые слова:* сердце человека, левый желудочек, механическая модель, поперечное сжатие, продольное сокращение, скручивание.

**1. Введение.** Из всех разделов сердца левый желудочек (ЛЖ) чаще других привлекает внимание кардиологов, поскольку именно он осуществляет важнейшую функцию выброса крови из сердца в кровеносную систему (большой круг кровообращения). В связи с этим те или иные нарушения в его работе, связанные с гипертрофией, наличием послеинфарктных рубцов, стенозом или недостаточностью аортального (выпускного) клапана, отрицательно сказываются на работе всей кровеносной системы, а значит, и на работе снабжаемых кровью живых органов и тканей. Форма ЛЖ представлена на рис. 1. Она претерпевает существенные изменения в процессе сокращения. Это обусловлено тем, что мышечные волокна в различных направлениях укорачиваются в разной степени, что определяется особенностями их строения и направления в разнообразных участках стенки сосуда.

При сокращении ЛЖ в начальной фазе изгнания крови его продольная ось незначительно укорачивается, что вызвано сокращением продольно ориентированных мышечных волокон наиболее глубоких слоев стенки сердца. Затем на  $1/3$  укорачиваются поперечные оси, сокращение происходит несимметрично — больше укорачивается пе-

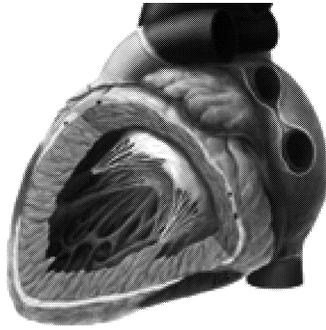


Рис. 1. Форма левого желудочка (продольный разрез)

реднезадняя ось, продольная ось почти не укорачивается. К концу систолы отношение длины продольной оси к переднезадней составляет около 2.5. В диастолу это соотношение равно 1.3 и уменьшается с увеличением давления наполнения пассивного ЛЖ из-за преимущественного растяжения его вдоль короткой оси.

К настоящему времени определились два главных направления: изучение напряженно-деформированного состояния стенки клапана и моделирование насосной функции сердца, которая обычно подразумевает наличие механической модели ЛЖ.

Механика желудочков сердца интенсивно исследовалась в последние 40 лет. Свойства материала, геометрия желудочков и мышечная архитектура, а также активность миокарда являются одними из определяющих факторов механики сердца [1]. Еще в 1969 г. исследовались возможности моделирования ЛЖ с помощью простейших фигур (сфера, цилиндр, эллипсоид) с учетом фракции выброса и величины сокращения волокон [2]. В 2003 г. отмечалось, что ориентация волокон нетривиально свидетельствует о том, что циркулярно ориентированные волокна формируют поверхность вращения [3]. Исходя из этого положения, была предложена механическая модель ЛЖ в виде толстостенного цилиндра [4], сокращение которого производится как радиально, так и продольно.

Здесь сразу следует отметить, что толстостенный усеченный цилиндр наиболее часто применялся в качестве модели ЛЖ [5–9]. Так, в [5, 6] эта модель используется для определения соотношения давление — объем при большой упругой деформации, а в [7, 8] — при вычислении внутреннего миокардиального напряжения при малых деформациях.

Цель исследования в [9] состояла в том, чтобы установить связь между двумя подходами, описанными в работах [5, 6] и [7, 8]. При этом сжатие моделирующего ЛЖ цилиндра происходило таким образом, чтобы учесть кручение и сдвиг. В работе [10] для описания желудочковой аневризмы ЛЖ был смоделирован в виде эллипсоида, состоящего из 12 механико-гидравлических подсистем. Асинхронное сокращение этих 12 сегментов миокарда было представлено для того, чтобы воспроизвести более реалистичные профили давления. Что касается сферической модели ЛЖ, то, несмотря на предложение ее авторами [11], в работе [12] справедливо отмечалось, что толстостенная сфера — это простейшее геометрическое приближение ЛЖ, пригодное только для мелких млекопитающих.

В [13] стенка ЛЖ была представлена толстостенным усеченным удлиненным эллипсоидом с реалистичной ориентацией миофибрилл. Следует отметить, что форма усеченного эллипсоида в большей степени соответствует форме ЛЖ. При этом нужно учитывать, что размер сечения эллипсоида должен оставаться постоянным и равным

размеру аортального клапана. Кроме того, алгоритм сокращения модели ЛЖ должен строиться так, чтобы поток выбрасываемой из ЛЖ крови соответствовал экспериментально измеренному потоку крови через выходное отверстие, как было сделано авторами [14].

В отличие от вышеназванных статей в [15] для создания модели ЛЖ использовалась серия реальных его контуров в двух взаимно перпендикулярных плоскостях в начале и конце сокращения, которые были получены при ультразвуковом обследовании сердца здоровых испытуемых с последующей оцифровкой изображений с помощью программы Get Data Graph Digitizer (рис. 2).

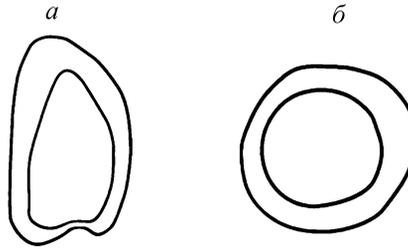


Рис. 2. Продольный (а) и поперечный (б) очертания полости ЛЖ в моменты систолы и диастолы

Кроме того, эта модель была построена таким образом, чтобы кровоток на выходе ЛЖ соответствовал экспериментальному (рис. 3). Однако по своей форме она все-таки далека от реальной формы ЛЖ и, кроме того, не воспроизводит эффект скручивания, который происходит в ЛЖ.

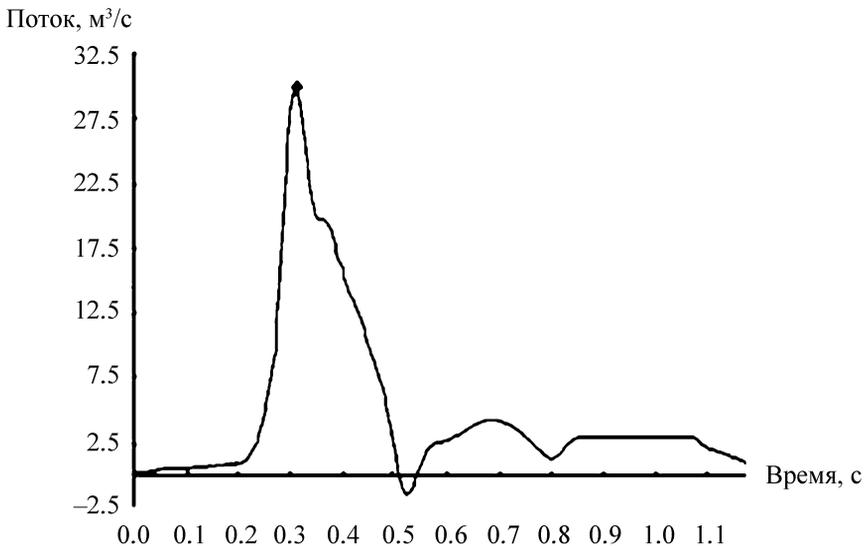


Рис. 3. Кровоток на выходе из ЛЖ (полный цикл)

В настоящей работе были сформулированы две цели. Во-первых, ставилась задача максимального приближения формы механической модели ЛЖ к его реальной

форме в процессе сокращения. Во-вторых, нужно было получить математические характеристики, которые могли бы описать динамику модели ЛЖ в процессе сокращения. Эти выражения, с одной стороны, должны выполнять функцию управления механической моделью ЛЖ, а с другой стороны, могли бы послужить характеристиками процесса сокращения в норме и, что более важно, при патологиях.

**2. Описание процесса построения механической модели ЛЖ.** Для решения первой задачи построение механической модели ЛЖ осуществлялось на основе компьютерной томографии (КТ) и магнитно-резонансной томографии (МРТ). Последний метод несравненно более точно воспроизводит реальную форму ЛЖ при его сокращении. Кроме того, он более информативен для диагностики за счет более четких изображений (статических и динамических) и возможности проводить более точные измерения.

Численные методы, разработанные для создания конечно-элементной модели, были реализованы в системе CMISS (Continuum Mechanics, Image analysis, Signal processing and System Identification). CMISS — это среда математического моделирования, которая позволяет применять методы анализа конечных элементов для решения различных сложных задач биоинженерии. Она состоит из двух пакетов. Один из них — Cmgui — представляет собой графический пользовательский интерфейс и может использоваться для визуализации модели и манипуляций с ней.

Однако математическое моделирование сокращения ЛЖ на основе МРТ приводит к необходимости оперировать огромными массивами чисел, представляющих трехмерное изображение ЛЖ. Даже при воксельном представлении поверхности ЛЖ потребуется от 6 до 10 тыс. числовых значений в каждый из последовательных моментов времени МРТ-исследования.

Чтобы избежать этой трудности, было решено выбрать характерные точки трехмерного изображения ЛЖ, которые представляют его деформируемую поверхность наилучшим образом. В изучаемом случае количество таких точек было равно 61 (рис. 4). Используя технологию захвата для выбранных точек, можно определить их положение в любой момент времени систолического сокращения. Это можно рассматривать как компьютерное моделирование движения каркаса механической модели ЛЖ.

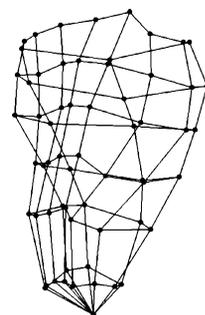


Рис. 4. Каркас механической модели поверхности ЛЖ

После этого можно провести сплайн-интерполяцию каркаса модели и получить возможность определять координаты любой точки сглаженной поверхности в любой момент систолического сокращения модели ЛЖ. Для этого использовалась трикубическая интерполяция Эрмита

$$f(x, y, z) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 a_{ijk} x^i y^j z^k.$$

В данной работе была применена локальная трикубическая схема интерполяции в трех измерениях. В отличие от глобальной интерполяции, где интерполируемая функция обычно зависит от всей совокупности данных, местная трикубическая интерполяция использует только данные в окрестности элемента. Программа интерполяции была написана на языке C++ с помощью модуля Cmgui. Координаты узлов и значения производных в этих узлах являлись входными данными. Результаты работы программы показаны на рис. 5 для начального и конечного моментов сокращения ЛЖ.

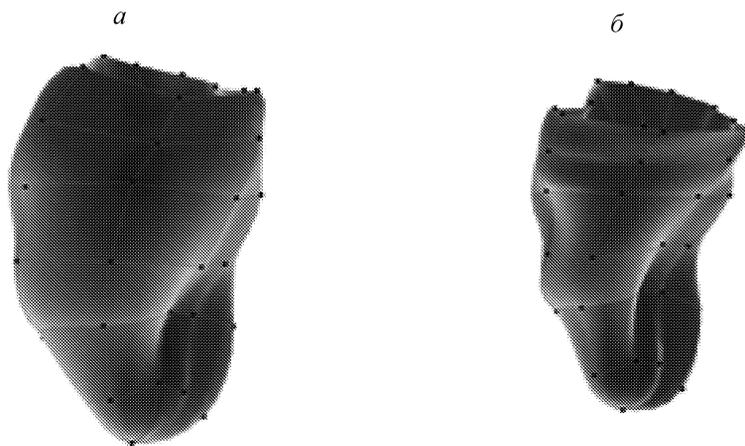


Рис. 5. Модель ЛЖ в начале (а) и в конце его сокращения (б)

**3. Описание работы механической модели.** Для описания работы механической модели сокращения ЛЖ были выделены основные составляющие этого процесса, а именно поперечное сжатие, продольное сокращение и скручивание. При этом следует отметить, что первоначальный объем модели должен быть равен объему ЛЖ.

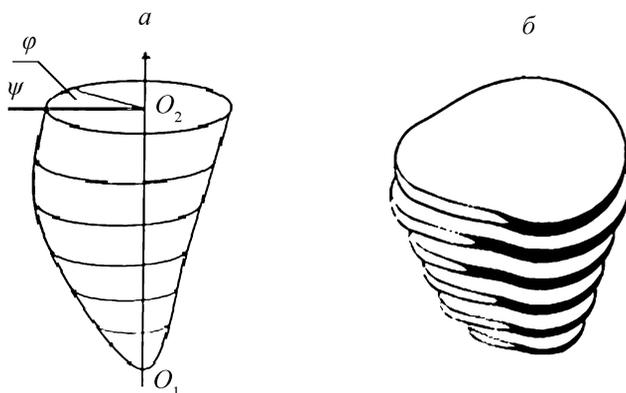


Рис. 6. Разбиение модели на несколько слоев  
а — схема разбиения; б — отдельные слои модели.

Для наглядности было предложено разбить модель на некоторое количество поперечных слоев (рис. 6). Тогда процесс продольного сокращения модели можно пред-

ставить как уменьшение толщины каждого слоя. Поперечное сжатие состоит в пропорциональном уменьшении размеров каждого слоя. Процесс скручивания состоит в повороте слоев вокруг продольной оси в одну и ту же сторону.

Возвращаясь к непрерывному строению модели в цилиндрической системе координат  $z, r, \psi$ , обозначим изменяющуюся во времени высоту модели  $O_1 - O_2$  через  $h$ , тогда продольное сокращение можно задать достаточно простой функцией  $h(t)$ . Для задания поперечного сжатия нужно сначала описать исходную форму поперечного сечения по всей оси модели  $r(\varphi, z)$ , где угол  $\varphi$  для каждой величины  $z$  пробегает значения от 0 до  $2\pi$ . Тогда ее изменение во времени будет задаваться функцией  $r(\varphi, z, t)$ . Наконец, процесс скручивания в простом случае будет определяться величиной угла поворота модели  $\psi(t)$  вокруг вертикальной оси, а в более сложном случае может зависеть и от высоты  $z(t)$ . Таким образом, процесс деформации ЛЖ описывается тремя функциями:  $h(t), r(\varphi, z, t)$  и  $\psi(t)$ , которые могут служить характеристиками сокращения ЛЖ.

**4. Заключение.** Таким образом, на основе изучения экспериментальных данных была построена механическая модель ЛЖ сердца человека в процессе его сокращения. С этой целью данный процесс был разбит на три составляющие: укорочение ЛЖ, его сжатие и скручивание, описываемые соответственно функциями  $h(t), r(\varphi, z, t)$  и  $\psi(t)$ , конкретный вид которых может помочь медикам в определении наличия отклонений от нормы в каждой точке ЛЖ в процессе его сокращения.

## Литература

1. *Hu Zh., Metaxas D., Axel L.* Functional imaging and modeling of the heart // Intern. Workshop on Functional Imaging and Modeling of the Heart. FIMH. 2005. P. 369–383.
2. *Sallin E.* Fiber orientation and ejection fraction in the human LV // Biophysical Journal. 1969. Vol. 9. P. 954–964.
3. *Hu Zh.* In vivo strain and stress estimation of the heart left and right ventricles from MRI images // Medical Image Analysis. 2003. Vol. 7. P. 435–444.
4. *Chadwick R. S.* Mechanics of the left ventricle // Journal of Biophysics. 1982. Vol. 39. P. 279–288.
5. *Shoucri R. M.* The pressure-volume relation and the mechanics of left ventricular contraction // Japanese Heart Journal. 1990. Vol. 31. P. 713–729.
6. *Shoucri R. M.* Theoretical study of pressure-volume relation in left ventricle // American Journal of Physiology. 1991. Vol. 260. P. H282–H291.
7. *Shoucri R. M.* Active and passive stresses in the myocardium // American Journal of Physiology. 2000. Vol. 279. P. H2519–H2528.
8. *Shoucri R. M.* The calculation of the intramyocardial stress // Technology and Health Care. 2002. Vol. 10. P. 11–22.
9. *Shoucri R. M.* Equivalence of two approaches to study the stress-strain relation in the myocardium // WIT Transactions on Biomedicine and Health. Modelling in Medicine and Biology. 2009. Vol. 13. P. 3–16.
10. *Le Rolle V., Carrault G., Richard P.-Y., Pibarot Ph., Durand L.-G., Hernández A. I.* A tissue-level electromechanical model of the left ventricle: Application to the analysis of intraventricular pressure // Acta Biotheoretica. 2009. Vol. 57. Iss. 4. P. 457–478.
11. *Mirsky I., McGill P. L., Janz R. F.* Mechanical behavior of ventricular aneurysms // Bulletin of Mathematical Biology. 1978. Vol. 40. N 4. P. 451–464.
12. *Campbell K. B., Simpson A. M., Campbell S. G., Granzier H. L., Slinker B. K.* Dynamic left ventricular elastance: a model for integrating cardiac muscle contraction into ventricular pressure-volume relationships // Journal of Applied Physiology. 2008. Vol. 104. P. 958–975.
13. *Kerckhoffs R. C. P., Faris O. P., Bovendeerd P. H. M., Prinzen F. W., Smits K., McVeigh E. R., Arts T.* Electromechanics of paced left ventricle simulated by straightforward mathematical model: comparison with experiments // American Journal of Physiology. Heart and Circulatory Physiology. 2005. Vol. 289. N 5. P. H1889–H1897.
14. *Radichkina A., Tregubov V.* Mathematical simulation of the left ventricle during the systole contraction // Biomechanics. Intern. Conference of the Polish Society of Biomechanics: Book of abstracts. Warsaw, 2010. P. 185–186.

15. Трегубов В. П., Радичкина А. О. Математическое моделирование кинематики левого желудочка сердца человека в процессе его сокращения // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2013. Вып. 4. С. 67–73.

Статья поступила в редакцию 25 мая 2021 г.

Статья принята к печати 21 июня 2022 г.

Контактная информация:

Трегубов Владимир Петрович — д-р физ.-мат. наук, проф.; v.tregubov@spbu.ru

Егорова Надежда Константиновна — аспирант; nadezhda\_ego@mail.ru

## Construction of a mechanical model of the human heart left ventricle in the process of its contraction

V. P. Tregubov, N. K. Egorova

St Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St Petersburg,  
199034, Russian Federation

**For citation:** Tregubov V. P., Egorova N. K. Construction of a mechanical model of the human heart left ventricle in the process of its contraction. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2022, vol. 18, iss. 3, pp. 402–409.

<https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2022.309> (In Russian)

A detailed analysis of previous works on modeling the left ventricle (LV) of the human heart, starting with mechanical models in the form of the simplest three-dimensional figures (cylinder, sphere, ellipsoid of rotation) and ending with models using real contours of the human heart obtained by ultrasound examination of the human heart. A way of constructing a mechanical LV model based on the processing of its dynamic images obtained using computer and magnetic resonance imaging was proposed. Digitization of these images was carried out using numerical methods developed to create a finite element model were implemented in the CMISS system, which allows the use of finite element analysis methods to solve various complex problems. To avoid the need to operate with huge arrays of numbers (up to 10 thousand numerical values at each time of the MRI study) characteristic points of the three-dimensional LV image were selected and spline interpolation of the model framework written in C++ using the Cmgui module was performed. To describe the work of the mechanical model of LV reduction, the main components of this process were identified: transverse compression, longitudinal contraction and twisting. To describe them, simple mathematical characteristics were used.

*Keywords:* human heart, left ventricle, mechanical model, transverse compression, longitudinal contraction, twisting.

## References

1. Hu Zh., Metaxas D., Axel L. Functional imaging and modeling of the heart. *Intern. Workshop on Functional Imaging and Modeling of the Heart, FIMH*, 2005, pp. 369–383.
2. Sallin E. Fiber orientation and ejection fraction in the human LV. *Biophysical Journal*, 1969, vol. 9, pp. 954–964.
3. Hu Zh. In vivo strain and stress estimation of the heart left and right ventricles from MRI images. *Medical Image Analysis*, 2003, vol. 7, pp. 435–444.
4. Chadwick R. S. Mechanics of the left ventricle. *Journal of Biophysics*, 1982, vol. 39, pp. 279–288.
5. Shoucri R. M. The pressure-volume relation and the mechanics of left ventricular contraction. *Japanese Heart Journal*, 1990, vol. 31, pp. 713–729.

6. Shoucri R. M. Theoretical study of pressure-volume relation in left ventricle. *American Journal of Physiology*, 1991, vol. 260, pp. H282–H291.
7. Shoucri R. M. Active and passive stresses in the myocardium. *American Journal of Physiology*, 2000, vol. 279, pp. H2519–H2528.
8. Shoucri R. M. The calculation of the intramyocardial stress. *Technology and Health Care*, 2002, vol. 10, pp. 11–22.
9. Shoucri R. M. Equivalence of two approaches to study the stress-strain relation in the myocardium. *WIT Transactions on Biomedicine and Health. Modelling in Medicine and Biology*, 2009, vol. 13, pp. 3–16.
10. Le Rolle V., Carrault G., Richard P.-Y., Pibarot Ph., Durand L.-G., Hernández A. I. A tissue-level electromechanical model of the left ventricle: Application to the analysis of intraventricular pressure. *Acta Biotheoretica*, 2009, vol. 57, iss. 4, pp. 457–478.
11. Mirsky I., McGill P. L., Janz R. F. Mechanical behavior of ventricular aneurisms. *Bulletin of Mathematical Biology*, 1978, vol. 40, no. 4, pp. 451–464.
12. Campbell K. B., Simpson A. M., Campbell S. G., Granzier H. L., Slinker B. K. Dynamic left ventricular elastance: a model for integrating cardiac muscle contraction into ventricular pressure-volume relationships. *Journal of Applied Physiology*, 2008, vol. 104, pp. 958–975.
13. Kerckhoffs R. C. P., Faris O. P., Bovendeerd P. H. M., Prinzen F. W., Smits K., McVeigh E. R., Arts T. Electromechanics of paced left ventricle simulated by straightforward mathematical model: comparison with experiments. *American Journal of Physiology. Heart and Circulatory Physiology*, 2005, vol. 289, no. 5, pp. H1889–H1897.
14. Radichkina A., Tregubov V. Mathematical simulation of the left ventricle during the systole contraction. *Biomechanics. Intern. Conference of the Polish Society of Biomechanics*. Book of abstracts. Warsaw, 2010, pp. 185–186.
15. Tregubov V. P., Radichkina A. O. Matematicheskoe modelirovanie kinematiki levogo zheludochka serdca cheloveka v processe ego sokrashcheniia [Mathematical modeling of the kinematics of the left ventricle of the human heart in the process of its contraction]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 10. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2013, iss. 4, pp. 67–73. (In Russian)

Received: May 25, 2022.

Accepted: June 21, 2022.

#### Authors' information:

Vladimir P. Tregubov — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; v.tregubov@spbu.ru

Nadezhda K. Egorova — Postgraduate Student; nadezhda\_ego@mail.ru