УДК 519.837 Вестник СПбГУ. Прикладная математика. Информатика... 2022. Т. 18. Вып. 3
MSC 91A24, 49N75

К задаче преследования в квазилинейных дифференциальных играх запаздывающего типа

Е. М. Мухсинов

Таджикский государственный университет права, бизнеса и политики,
Республика Таджикистан, 735700, Худжанд, 17-й мкр-н, 2

Для цитирования: *Мухсинов Е. М.* К задаче преследования в квазилинейных дифференциальных играх запаздывающего типа // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2022. Т. 18. Вып. 3. С. 328–336. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2022.303

В области теории дифференциальных игр, заданных в конечномерном пространстве, основополагающие работы выполнили Л. С. Понтрягин, Н. Н. Красовский, Б. Н. Пшеничный, Л. С. Петросян, М. С. Никольский, Н. Ю. Сатимов и др. Л. С. Понтрягин и его ученики дифференциальную игру рассматривают отдельно, с точки зрения преследующего и с точки зрения убегающего, что неизбежно связывает дифференциальную игру с двумя различными задачами. В настоящей работе в гильбертовом пространстве рассматривается задача преследования в смысле Л. С. Понтрягина для квазилинейной дифференциальной игры, когда динамика игры описывается дифференциальным уравнением запаздывающего типа с линейным замкнутым оператором, порождающим сильно непрерывную полугруппу. Доказаны две основные теоремы о разрешимости задачи преследования. В первой теореме найдено множество начальных положений, из которых возможно завершение преследования с гарантированным временем преследования. Во второй теореме определены достаточные условия об оптимальности времени преследования. Полученные результаты обобщают результаты работ П. Б. Гусятникова, М. С. Никольского, Е. М. Мухсинова и М. Н. Муродовой, когда игра описывается дифференциальным уравнением запаздывающего типа в гильбертовом пространстве. Наши результаты позволяют исследовать конфликтно-управляемые системы запаздывающего типа не только с сосредоточенными, но и с распределенными параметрами.

Ключевые слова: задача преследования, дифференциальная игра запаздывающего типа, гильбертово пространство, оптимальность времени преследования.

1. Введение. Постановка задачи преследования. Математические модели широкого класса управляемых процессов можно свести к задачам оптимального управления (см., например, [1–3]), а модели управляемых процессов в условиях конфликта или неопределенности — к дифференциальным играм (см. [4–13]). В области теории дифференциальных игр основополагающие работы были выполнены Л. С. Понтрягиным, Н. Н. Красовским, Б. Н. Пшеничным, Л. А. Петросяном, М. С. Никольским, Н. Ю. Сатимовым и др., когда динамика игры описывается обыкновенным дифференциальным уравнением (см., например, [4–9]). А результаты, полученные в теории дифференциальных игр преследования, когда динамика игры описывается уравнением в бесконечномерных пространствах, являются гораздо скромными (см. [10–13]).

В настоящей статье рассматривается задача преследования в смысле Л. С. Понтрягина для квазилинейной дифференциальной игры запаздывающего типа.

В гильбертовом пространстве X рассмотрим дифференциальную игру, описываемую уравнением запаздывающего типа

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + \int_{-h}^{0} d\eta(s)\, x(t+s) + f(u(t), v(t), t), \tag{1}$$

и замкнутым терминальным множеством M, где заканчивается игра.

В дальнейшем будем считать, что $L(X,X)$ — класс линейных ограниченных операторов, действующих из X в X, $I \subset (-\infty, \infty)$, $L_p(I,X)$, $1 \leqslant p < \infty$ — класс локально p-интегрируемых по Бохнеру отображений $x(\cdot) : I \to X$, $C(I,X)$ — класс непрерывных отображений $x(\cdot) : I \to X$, $W_p'(I,X)$ — пространство Соболева, состоящее из отображений $x(\cdot) \in L_p(I,X)$, для которых $\frac{d}{dt}x(t) \in L_p(I,X)$.

В игре (1) $x(t) \in X$, $\eta(\cdot)$ — мера Стилтьеса вида

$$\eta(s) = -\sum_{r=1}^{m} \chi_{(-\infty,-h_r)}(s) \cdot A_r - \int_{s}^{0} A_0(\xi)\, d\xi, \quad s \in [-h, 0],$$

где $0 < h_1 < h_2 < \cdots < h_m < h$; $\chi_{(-\infty,-h_r)}(\cdot)$ — характеристическая функция $(-\infty, -h_r)$; $A_r \in L(X,X)$, $r = \overline{1,m}$; $A_0(\cdot) \in L_{p'}([-h,0], L(X,X))$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$; линейный замкнутый оператор $A : D \to X$, имеющий плотную в X область определения, порождает сильно непрерывную полугруппу $T(t)$ [14, с. 316]. Используя эту полугруппу, можно построить фундаментальное решение [15, с. 358]

$$W(t) = \begin{cases} T(t) + \int\limits_{0}^{t} T(t-s) \int\limits_{-h}^{0} d\eta(\xi) W(\xi+s)\, ds, & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

для которого справедливо равенство

$$\dot{W}(t) = AW(t) + \int_{-h}^{0} d\eta(\xi) W(t+\xi), \tag{2}$$

здесь $W(0) = I$ — единичный оператор, $W(t) = 0$ при $t < 0$.

Далее, учитывая (2) и предполагая, что $f(u(\cdot), v(\cdot), \cdot) \in W_p^1([0,t], X)$ для любых $t > 0$, измеримых отображений $u(\cdot) : [0,\infty) \to Y$, $\vartheta(\cdot) : [0,\infty) \to Z$ и начальной функции $\varphi(\cdot) \in W_p'([-h,0], X)$, можно показать, что задача Коши

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + \int_{-h}^{0} d\eta(s)\, x(t+s) + f(u(t), v(t), t), \quad t \geqslant 0, \tag{3}$$

$$x(s) = \varphi(s), \qquad -h \leqslant s \leqslant 0,$$

имеет единственное решение вида

$$x(t) = W(t)\varphi(0) + \int_{-h}^{0} \left(\int_{-h}^{s} W(t-s+\xi) d\eta(\xi) \right) \varphi(s)\, ds +$$

$$+\int\limits_0^t W(t-s)\, f(u(s), v(s), s)\, ds, \ t \geqslant 0, \tag{4}$$

из класса $\mathrm{C}([0,\infty], X) \cap W_p^1([0,t], X)$ [15, с. 359].

Поэтому, следуя А. Фридману [10, с. 95] и Ю. С. Осипову [11, с. 1314], дадим следующее

Определение 1. Если отображение $t \to f(u(t), v(t), t)$ локально интегрируемо, то решением задачи Коши (3), соответствующим управлениям $u(\cdot), v(\cdot)$, будем называть отображение вида (4), где интеграл понимается в смысле Бохнера [14, с. 93].

Замечание 1. Отметим, что дифференциальная игра (1) охватывает, в частности, игры, описываемые

1) дифференциальными уравнениями вида

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(u(t), v(t)), \quad \text{когда } h = 0;$$

2) дифференциально-разностными уравнениями вида

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^{n} A_i x(t-h_i) + f(u(t), v(t), t),$$

где $0 < h_1 < h_2 < \cdots < h_n = h$.

Дадим следующее определение [4, с. 308; 9, с. 130; 13, с. 79].

Определение 2. В игре (1) из начального положения $\varphi(s), -h \leqslant s \leqslant 0$, $\varphi(0) \in X \backslash M$ возможно завершение преследования, если существует число $T = T(\varphi) \geqslant 0$ такое, что для любого измеримого управления убегания $\vartheta(\cdot) : [0,T] \to Z$ в каждый момент $t \in [0,T]$, зная уравнение (1) и величины $\vartheta(t)$ и $x(s)$, $0 \leqslant s \leqslant t$, можно выбрать значение $u(t)$ таким образом, чтобы управление преследования $u(\cdot) : [0,T] \to Y$ было допустимо измеримо и $x(T_1) \in M$ при некотором $T_1 \in [0,T]$, где $x(\cdot)$ — решение задачи (3), соответствующее управлениям $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$. При этом число $T = T(\varphi)$ называется гарантированным временем преследования, а точная нижняя грань гарантированных времен — оптимальным временем преследования.

Задача преследования. Найти множество начальных положений, из которых в игре (1) возможно завершение преследования.

2. Основные результаты. Будем считать, что M_0 — замкнутое подпространство из X, $M_0^{\perp}$ — ортогональное дополнение к M_0 в X, π — оператор ортогонального проектирования из X на $M_0^{\perp}$, терминальное множество $M = M_0 + M_1$, где $M_1 \subset M_0^{\perp}$. Ясно, что $x \in M$ тогда и только тогда, когда $\pi x \in M_1$.

Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть выполняются следующие условия:*

1) множество M_1 слабо компактно, а множество $\bigcap_{v \in Z} \pi W(t-s) f(Y, v, s)$, $t > 0$, $0 \leqslant s \leqslant t$, не пусто;

2) начальное положение φ такое, что при некотором $T \geqslant 0$ имеет место включение

$$\pi W(T)\varphi(0) + \int\limits_{-h}^{0} \left(\int\limits_{-h}^{s} \pi W(T-s+\xi)\, d\eta(\xi) \right) \varphi(s)\, ds \in M_1 - \Omega(T); \tag{5}$$

3) отображение $t \to \Omega(t) = \int\limits_0^t \bigcap_{v \in Z} \pi W(t-s) f(Y, v, s)\, ds$, $t \in [0,T]$, секвенциально замкнуто относительно слабой топологией $\sigma(X, X^*)$ [16, с. 239].

Тогда из начального положения φ можно завершить преследование за время, не превосходящее T_1, где

$$T_1 = \min\{T \geqslant 0 : \pi W\,(T)\,\varphi\,(0) +$$

$$+ \int_{-h}^{0} \left(\int_{-h}^{s} \pi W\,(T - s + \xi)\, d\eta(\xi) \right) \varphi\,(s)\, ds \in M_1 - \Omega\,(T)\}. \tag{6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу условий 1), 3) и леммы (см. [12, с. 81]) отображение $M_1 - \Omega\,(\cdot)$ секвенциально замкнуто относительно слабой топологии $\sigma(x, x^*)$. Следовательно, в силу (5), получаем, что

$$\pi W\,(T_1)\,\varphi\,(0) + \int_{-h}^{0} \left(\int_{-h}^{s} \pi W\,(T_1 - s - \xi)\, d\eta(\xi) \right) \varphi\,(s)\, ds \in M_1 - \Omega\,(T_1)\,. \tag{7}$$

На основании (7) существуют $m \in M_1$ и интегрируемый селектор Ψ отображения $s \to \bigcap_{v \in Z} \pi W\,(T_1 - s)\, f(Y, v, s)$ такие, что имеет место равенство

$$\pi W\,(T_1)\,\varphi\,(0) + \int_{-h}^{0} \left(\int_{-h}^{s} \pi W\,(T_1 - s - \xi)\, d\eta(\xi) \right) \varphi\,(s)\, ds =$$

$$= m - \int_{0}^{T_1} \Psi\,(s)\, ds. \tag{8}$$

Выберем произвольное измеримое управление убегания $v\,(\cdot) : [0, T_1] \to Z$. Зная $v\,(t)\,,\ 0 \leqslant t \leqslant T_1$, и $\varphi\,(0)\,$, в силу теоремы об измеримом селекторе [17, с. 86], можно выбрать такое измеримое управление преследования $u\,(\cdot) : [0, T_1] \to Y$, что

$$\Psi\,(t) = \ \pi W\,(T_1 - t)\, f\,(u\,(t)\,, v\,(t)\,, t) \tag{9}$$

для почти всех $0 \leqslant t \leqslant T_1$.

Теперь для решения $x\,(\cdot)$ задачи (3), соответствующего управлениям $u\,(\cdot)\,,\ v(\cdot)$ на $[0, T_1]$, учитывая (8) и (9), имеем равенство

$$\pi x\,(T_1) = \pi W\,(T_1)\,\varphi\,(0) + \int_{-h}^{0} \left(\int_{-h}^{s} \pi W\,(T_1 - s + \xi)\, d\eta(\xi) \right) \varphi\,(s)\, ds +$$

$$+ \int_{0}^{T_1} \pi W\,(T_1 - s)\, f\,(u\,(s)\,, v\,(s)\,, s)\, ds = m - \int_{0}^{T_1} \Psi\,(s)\, ds +$$

$$+ \int_{0}^{T_1} \pi W\,(T_1 - s)\, f\,(u\,(s)\,, v\,(s)\,, s)\, ds =$$

$$= m - \int_{0}^{T_1} \pi W\,(T_1 - s)\, f\,(u\,(s)\,, v\,(s)\,, s)\, ds +$$

$$+\int_0^{T_1} \pi W\left(T_1-s\right) f\left(u\left(s\right), v\left(s\right), s\right) ds = m \in M_1,$$

т. е. $\pi x\left(T_1\right) \in M_1$. Следовательно, $x\left(T_1\right) \in M$.

З а м е ч а н и е 2. Из равенства (9) видно, что выбор $u(t)$ осуществляется исходя из информации о $v(t)$ и $\varphi\left(0\right)$. Можно показать, что, если при выборе $u(t)$ использовать информацию о $v(s)$ и $x\left(s\right), 0 \leqslant s \leqslant t$, время завершения преследования будет не более числа T_1, т. е. $x\left(T_0\right) \in M$ при некотором $T_0 \leqslant T_1$.

Отметим, что $T_1 = T(\varphi)$ будет оптимальным временем преследования, если, во-первых, из начального положения $\varphi(0)$ можно завершить преследование за время, не превосходящее числа T_1, и, во-вторых, при всех $t \in \left[0, T_1\right)$ для любого измеримого управления преследования $u(\cdot)$ можно выбрать такое измеримое управление убегания $v\left(\cdot\right)$, что для решения $x(\cdot)$ задачи (3) выполняется условие $x(s) \notin M$ для всех $0 \leqslant s \leqslant t$. При этом для выбора $v(t)$ разрешается использовать значения $x(s)$, $u(s)$, $0 \leqslant s \leqslant t$.

Справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть выполнены все условия теоремы 1 и следующие условия*:

а) множество M_1 выпукло, а отображение $t \rightarrow \Omega\left(t\right)$ выпуклозначно;

б) существует отображение $\omega : Y \rightarrow Z$ такое, что при всех $u \in Y$, $t \in \left[0, T_1\right]$, $0 \leqslant s \leqslant t$, выполняется включение

$$\pi W\left(t-s\right) f\left(u, \omega\left(u\right), s\right) \in \bigcap_{v \in Z} \pi W\left(t-s\right) f\left(Y, v, s\right)$$

и для каждого допустимого $u\left(\cdot\right)$ суперпозиция $\omega(u\left(\cdot\right))$ измерима.

Тогда время преследования $T_1 = T\left(\varphi\right)$ оптимально.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из теоремы 1 вытекает: для любого управления убегания $v\left(\cdot\right)$ найдется управление преследования $u\left(\cdot\right)$ такое, что из начального положения φ можно завершить преследование за время, не превосходящее числа T_1, т. е. $x\left(T_0\right) \in M$ при некотором $T_0 \leqslant T_1$. Докажем, что для любого допустимого управления преследования $u\left(\cdot\right)$ можно выбрать такое допустимое управление убегания $v\left(\cdot\right)$, при котором для решения $x\left(\cdot\right)$ задачи (3) выполняется $x\left(t\right) \notin M$ для всех $t \in \left[0, T_1\right)$.

Пусть ε — некоторое число из интервала $\left(0, T_1\right)$. Управление убегания $v\left(\cdot\right)$ на $\left[0, \varepsilon\right]$ выбираем произвольно, а при $t \in \left(\varepsilon, T_1\right)$ таким образом: $v\left(t\right) = \omega\left(u(t-\varepsilon)\right)$. Тогда для решения $x(\cdot)$ задачи (3), соответствующего выбранным управлениям $u\left(\cdot\right)$, $v(\cdot)$, имеем равенство

$$\pi x\left(t\right) = \pi W\left(t\right) \varphi\left(0\right) + \int_{-h}^{0} \left(\int_{-h}^{s} \pi W\left(t-s+\xi\right) d\eta(\xi)\right) \varphi\left(s\right) ds +$$

$$+\int_0^t \pi W\left(t-s\right) f\left(u\left(s\right), v\left(s\right), s\right) ds =$$

$$= \pi W\left(t\right) \varphi\left(0\right) + \int_{-h}^{0} \left(\int_{-h}^{s} \pi W\left(t-s+\xi\right) d\eta(\xi)\right) \varphi\left(s\right) ds +$$

$$+\int_0^{\varepsilon} \pi W\left(t-s\right) f\left(u\left(s\right), v\left(s\right), s\right) ds +$$

$$+\int_{\varepsilon}^{t} \pi W(t-s) f(u(s), \omega(u(s-\varepsilon)), s)\, ds. \qquad (10)$$

Далее из равенства (6) при всех $t \in [0, T_1)$ получаем, что

$$\left(\pi W(t)\varphi(0) + \int_{-h}^{0}\left(\int_{-h}^{s} \pi W(t-s+\xi)\, d\eta(\xi)\right)\varphi(s)\, ds + \Omega(t)\right) \bigcap M_1 = \varnothing. \qquad (11)$$

Согласно теореме о строгой отделимости [16, с. 109], в силу (11), условий а), б) теоремы 2 множества M_1 и $\pi W(t)\varphi(0) + \int_{-h}^{0}\left(\int_{-h}^{s} \pi W(t-s+\xi)\, d\eta(\xi)\right)\varphi(s)\, ds + \Omega(t)$ при всех $t \in [0, T_1)$ строго отделимы. Следовательно, при всех $t \in [0, T_1)$ можно найти такой элемент $y \in X$ и такие константы c и $\delta > 0$, что

$$< x, y > \leqslant c - \delta < c \leqslant < m, y > \qquad (12)$$

при всех $x \in \pi W(t)\varphi(0) + \int_{-h}^{0}\left(\int_{-h}^{s} \pi W(t-s+\xi)\, d\eta(\xi)\right)\varphi(s)\, ds + \Omega(t)$ и $m \in M_1$.

Если $\Psi(\cdot)$ — произвольный интегрируемый селектор отображения

$$s \to \bigcap_{v \in Z} \pi W(t-s) f(Y, v, s), \qquad s \in [0, \varepsilon],$$

то на основании (10), неравенств (12) и условия б) теоремы 2 имеем неравенство

$$< \pi x(t), y > = < \pi W(t)\varphi(0) + \int_{-h}^{0}\left(\int_{-h}^{s} \pi W(t-s+\xi)\, d\eta(\xi)\right)\varphi(s)\, ds +$$

$$+\int_{0}^{\varepsilon} \pi W(t-s) f(u(s), v(s), s)\, ds +$$

$$+\int_{\varepsilon}^{t} \pi W(t-s) f(u(s), \omega(u(s-\varepsilon)), s)\, ds, y > =$$

$$= < \pi W(t)\varphi(0) + \int_{-h}^{0}\left(\int_{-h}^{s} \pi W(t-s+\xi)\, d\eta(\xi)\right)\varphi(s)\, ds +$$

$$+\int_{0}^{\varepsilon} \Psi(s)\, ds + \int_{\varepsilon}^{t} \pi W(t-s) f(u(s), \omega(u(s-\varepsilon)), s)\, ds, y > +$$

$$+ < \int_{0}^{\varepsilon} \pi W(t-s) f(u(s), v(s), s)\, ds - \int_{0}^{\varepsilon} \Psi(s)\, ds, y > \leqslant c - \delta +$$

$$+\int_0^{\varepsilon} < \pi W(t-s) f(u(s), v(s), s) - \Psi(s),\ y > ds. \tag{13}$$

В силу абсолютной непрерывности интеграла, существует число $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\left| \int_0^{\varepsilon} <\pi W(t-s) f(u(s), v(s), s) - \Psi(s), y > ds \right| < \frac{\delta}{2}.$$

Следовательно, в силу (12), (13), получаем, что

$$< \pi x(t), y > \leqslant c - \delta + \frac{\delta}{2} = c - \frac{\delta}{2} \ < \ < m, y > .$$

Последние неравенства означают, что число $\varepsilon > 0$ и управление $v(\cdot)$ можно выбрать так, чтобы $\pi x(t) \notin M_1$, т. е. $x(t) \notin M$ при всех $t \in [0, T_1)$. А это означает, что время T_1 оптимально. Теорема доказана.

3. Заключение. В настоящей работе найдены множества начальных положений, из которых разрешима задача преследования, когда динамика игры описывается дифференциальным уравнением запаздывающего типа. Доказаны достаточные условия об оптимальности времени преследования. Полученные результаты позволяют исследовать конфликтно-управляемые системы запаздывающего типа не только с сосредоточенными, но и с распределенными параметрами. Теоремы 1 и 2 обобщают результаты работ [6, с. 519; 12, с. 82; 13, с. 81], когда игра задается дифференциальным уравнением запаздывающего типа (1) в гильбертовом пространстве.

Литература

1. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 393 с.

2. *Балакришнан А. В.* Прикладной функциональный анализ. М.: Наука, 1980. 384 с.

3. *Аргучинцев А. В., Срочко В. А.* Процедура регуляризации билинейных задач оптимального управления на основе конечномерной модели // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2022. Т. 18. Вып. 1. С. 179–187. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2022.115

4. *Понтрягин Л. С.* Линейные дифференциальные игры преследования // Мат. сборник. 1980. Т. 112(154). № 3. С. 307–331.

5. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.

6. *Гусятников П. Б., Никольский М. С.* Об оптимальности времени преследования // Докл. АН СССР. 1969. Т. 184. № 3. С. 518–521.

7. *Сатимов Н. Ю., Тухтасинов М.* Об игровых задачах на фиксированной отрезке в управляемых эволюционных уравнениях первого порядка //Мат. заметки. 2006. Т. 80. № 4. С. 613–626.

8. *Петросян Л. А.* Дифференциальные игры преследования. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1977. 222 с.

9. *Мамадалиев Н.* Об одной задаче преследования с интегральными ограничениями на управления игроков // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56. № 1. С. 129–148. https://doi.org/10.1134/S0037446615010115

10. *Friedman A.* Differential games of purpsuit in Banach space // Journal of Math. Analysis and Applications. 1969. Vol. 25. P. 93–113.

11. *Осипов Ю. С.* К теории дифференциальных игр в системах с распределенными параметрами // Докл. АН СССР. 1975. Т. 223. № 6. С. 1314–1317.

12. *Мухсинов Е. М.* Об оптимальности времени преследования в дифференциальных играх // Управляемые системы (Новосибирск). 1982. № 2. С. 80–87.

13. *Мухсинов Е. М., Муродова М. Н.* Задача преследования для дифференциальной игры с запаздывающим аргументом в бесконечномерном пространстве // Вестник Таджикского национального университета. Сер. естественных наук. 2018. № 3. С. 79–86.

14. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы / пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 830 с. (*Hille E., Phillips R.* Functional analysis and semi-groups.)

15. *Nakagiri S.* Structural properties of functional differential equations in Banach spaces // Journal of Math. Anal. Appl. 1988. Vol. 25. P. 353–398.

16. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 744 с.

17. *Castaing C., Valadier M.* Convex analysis and measurable multifunctions // Lecture Notes Math. 1977. Vol. 580. P. 1–278.

Статья поступила в редакцию 25 августа 2021 г.
Статья принята к печати 21 июня 2022 г.

Контактная информация:

Мухсинов Едгор Мирзоевич — канд. физ.-мат. наук, доц.; yodgor.mukhsinov@gmail.com

To the problem of the pursuit in quasilinear differential lag games

E. M. Mukhsinov

Tajik State University of Law, Business and Politics, 2, 17th mkr-n, Khujand,
735700, Republic of Tajikistan

For citation: Mukhsinov E. M. To the problem of the pursuit in quasilinear differential lag games. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2022, vol. 18, iss. 3, pp. 328–336.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2022.303 (In Russian)

In the field of the theory of differential games defined in a finite-dimensional space, fundamental works were carried out by L. S. Pontryagin, N. N. Krasovskiy, B. N. Pshenichny, L. S. Petrosyan, M. S. Nikol'skiy, N. Yu. Satimov and others. L. S. Pontryagin and his students consider differential games separately, from the point of view of the pursuer and from the point of view of the evader, which inevitably connects the differential game with two different problems. In this paper, in a Hilbert space, we consider the pursuit problem in the sense of L. S. Pontryagin for a quasilinear differential game, when the dynamics of the game is described by a differential equation of retarded type with a closed linear operator generating a strongly continuous semigroup. Two main theorems on the solvability of the pursuit problem are proved. In the first theorem, a set of initial positions is found from which it is possible to complete the pursuit with a guaranteed pursuit time. The second theorem defines sufficient conditions on the optimality of the pursuit time. The results obtained generalize the results of works by P. B. Gusyatnikov, M. S. Nikol'skiy, E. M. Mukhsinov, and M. N. Murodova, in which it is described by a differential equation of retarded type in a Hilbert space. Our results make it possible to study delayed-type conflict-controlled systems not only with lumped, but also with distributed parameters.

Keywords: pursuit problem, delay differential game, Hilbert space, optimality of pursuit time.

References

1. Pontrjagin L. S., Boltyanskiy V. G., Gamkrelidze R. V., Mishenko E. F. *Matematicheskaya teoriya optimalnikh processov* [*Mathematical theory of optimal processes*]. Moscow, Nauka Publ., 1983, 393 p. (In Russian)

2. Balakrishnan A. V. *Prikladnoy funcsionalniy analiz* [*Applied functional analysis*]. Moscow, Nauka Publ., 1980, 384 p. (In Russian)

3. Arguchinsev A. V., Srochko V. A. Procedura reguljarizacii bilinejnyh zadach optimal'nogo upravlenija na osnove konechnomernoj modeli [Procedure for regularization of bilinear optimal control problems based on a finite-dimensional model]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2022, vol. 18, no. 1, pp. 179–187.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2022.115 (In Russian)

4. Pontrjagin L. S. Linejnye differencial'nye igry presledovanija [Linear differential games of pursuit]. *Matematicheskii sbornik* [*Mathematical collection*], 1980, vol. 112(154), no. 3, pp. 307–331. (In Russian)

5. Krasovskiy N. N., Subbotin A. I. *Pozicionnye differencial'nye igry* [*Positional differential games*]. Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p. (In Russian)

6. Gustyanikov P. B., Nikolskiy M. S. Ob optimal'nosti vremeni presledovaniya [On the optimality of the pursuit time]. *Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, 1969, vol. 184, no. 3, pp. 518–521. (In Russian)

7. Satimov N. Yu., Tukhtasinov M. Ob igrovyh zadachah na fiksirovannoj otrezke v upravlyaemyh evolyucionnyh uravneniyah pervogo poryadka [On game problems on a fixed interval in controlled first-order evolution equations]. *Mathematical Notes*, 2006, vol. 80, no. 4, pp. 613–626. (In Russian)

8. Petrosyan L. A. *Differencial'nye igry presledovaniya* [*Differential pursuit games*]. Leningrad, Leningrad State University Press, 1977, 222 p. (In Russian)

9. Mamadaliev N. Ob odnoj zadache presledovaniya s integral'nymi ogranicheniyami na upravleniya igrokov [On a pursuit problem with integral constraints on the players' controls]. *Siberian Mathematical journal*, 2015, vol. 56, no. 1, pp. 129–148. https://doi.org/10.1134/S0037446615010115 (In Russian)

10. Friedman A. Differential games of purpsuit in Banach space. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1969, vol. 25, pp. 93–113.

11. Osipov Yu. S. K teorii differencial'nyh igr v sistemah s raspredelennymi parametrami [On the theory of differential games in systems with distributed parameters]. *Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, 1975, vol. 223, no. 6, pp. 1314–1317. (In Russian)

12. Mukhsinov E. M. Ob optimal'nosti vremeni presledovaniya v differencial'nyh igrah [On the optimality of pursuit time in differential games]. *Managed systems* (Novosibirsk), 1982, no. 2, pp. 80–87. (In Russian)

13. Mukhsinov E. M., Murodova M. N. Zadacha presledovaniya dlya differencial'noj igry s zapazdyvayushchim argumentom v beskonechnomernom prostranstve [The pursuit problem for a delayed differential game in an infinite-dimensional space]. *Bulletin of the Tajik National University. Series of natural sciences*, 2018, no. 3, pp. 79–86. (In Russian)

14. Hille E., Phillips R. S. *Functional analysis and semi-groups.* New York, Colloquium Publ., 1957, 819 p. (Rus. ed.: Hille E., Phillips R. *Funktsional'nyi analiz i polugruppy.* Moscow, Inostr. lit. Publ., 1962, 830 p.)

15. Nakagiri S. Structural properties of functional differential equations in Banach spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1988, vol. 25, pp. 353–398.

16. Kantorovich L. V., Akilov G. P. *Funkcional'nyj analiz* [*Functional analysis*]. Moscow, Nauka Publ., 1977, 744 p. (In Russian)

17. Castaing C., Valadier M. Convex analysis and measurable multifunctions. *Lecture Notes Math.*, 1977, vol. 580, pp. 1–278.

Received: August 25, 2021.
Accepted: June 21, 2022.

Author's information:

Edgor M. Mukhsinov — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor; yodgor.mukhsinov@gmail.com