УДК 514.82:531.11
MSC 51P05, 83A05, 83C99

Об определении геометрии пространства-времени

О. И. Дривотин

Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация,
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Дривотин О. И.* Об определении геометрии пространства-времени // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2022. Т. 18. Вып. 3. С. 316–327.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2022.302

Предлагается новый подход, позволяющий определить метрический тензор в различных точках пространства-времени. Такой подход дает возможность исследовать одновременность событий не только локально, но и глобально, не используя традиционно применяемую в теории пространства-времени процедуру синхронизации. На основе приведенного в статье способа определения глобальной одновременности можно строить широкие классы систем отсчета. В качестве примера рассмотрена система отсчета в плоском пространстве-времени, все наблюдатели которой движутся с одной и той же произвольно изменяющейся скоростью вдоль некоторого направления.

Ключевые слова: метрический тензор, одновременность, система отсчета, ускоренная система отсчета.

1. Введение. Одной из основных математических моделей современной физики является пространство-время, представляющее собой четырехмерное дифференцируемое многообразие, на котором задан метрический тензор. Обычная процедура задания метрического тензора недостаточно формализована и включает в себя такое, например, понятие как «жесткие стержни». В настоящей работе предлагается более простой подход к заданию метрического тензора, основанный только на возможности измерения времени вдоль траекторий движущихся наблюдателей.

Охарактеризован также способ построения систем отсчета на основе описанного подхода. Вообще говоря, уравнения, рассматриваемые в пространстве-времени, носят тензорный характер и могут быть записаны без использования систем координат. Введение системы координат позволяет анализировать компоненты входящих в уравнения тензоров и производить с ними вычисления. Особый класс координат — пространственно-временные координаты, поскольку в них компоненты тензоров имеют определенный физический смысл.

Пространственно-временные координаты представляют собой один из возможных способов выбора системы координат, для введения которых применяется такой инструмент анализа пространства-времени как система отсчета. При возникновении теории относительности понятие системы отсчета использовалось А. Эйнштейном для формулировки теории, но затем стало ясно, что оно не является необходимым элементом. Кроме того, в теории отсутствовало формальное определение этого понятия.

Тем не менее концепция системы отсчета всегда представляла большой интерес. В работах [1, 2] система отсчета считалась просто конгруэнцией наблюдателей. В [3] это понятие было уточнено, а именно, вместе с конгруэнцией наблюдателей предложено рассматривать слоение, образованное пространствами одновременных событий. Подход к анализу геометрии пространства-времени, рекомендуемый в настоящей работе, позволяет строить широкие классы систем отсчета в соответствии с определением, данным в работе [3]. Определены также условия, накладываемые на конгруэнцию наблюдателей, при которых возможно построение поверхностей одновременных событий. В качестве примера описана система отсчета, образованная конгруэнцией наблюдателей, неравномерно ускоряющихся в некотором направлении в плоском пространстве-времени.

2. Задание метрического тензора. Примем, что пространство-время — четырехмерное дифференцируемое многообразие, которое обозначим через M. Это означает, что есть такой набор систем четырех координат (атлас), для которого переход от одной системы координат к другой выражается непрерывно дифференцируемыми функциями. Будем также считать, что существует критерий, позволяющий сказать, в каких системах координат они являются гладкими, и сформулируем его позже.

Движение некоторой частицы в пространстве-времени описывается ее мировой линией (траекторией) $x^i = x^i(\lambda)$, $i = \overline{0.3}$, где x^i — координаты, а λ — некоторый параметр мировой линии. При этом линии, проходящие через одни и те же точки, но с разной параметризацией, считаем различными.

Примем, что с движущейся частицей ассоциирован прибор измерения времени (часы). Назовем частицу с часами наблюдателем, а показания часов, зависящие от точки траектории, — собственным временем для рассматриваемой траектории.

Пусть через два некоторых события проходит мировая линия какого-то наблюдателя. Интервалом между этими событиями δs вдоль траектории будем называть разность показаний часов этого наблюдателя, соответствующих рассматриваемым событиям с точностью до некоторого постоянного множителя c, зависящего от выбранных единиц измерения:

$$\delta s = c\delta\tau.$$

Обозначим касательное пространство в некоторой точке x_0 через $T_{x_0}M$. Все касательные векторы к траекториям в точке x_0 принадлежат $T_{x_0}M$, но не всем векторам из $T_{x_0}M$ должна отвечать некоторая траектория. Обозначим подмножество $T_{x_0}M$, каждому элементу которого отвечает траектория некоторого наблюдателя, проходящая через точку x_0 так, чтобы при этом параметр удовлетворял бы условию $d\lambda/d\tau > 0$, через $T^+_{x_0}M$.

Будем считать, что существует некоторый критерий, позволяющий сказать, какие точки многообразия являются близкими. Позже сформулируем и этот критерий. Назовем гладкой такую кривую, для которой для двух близких точек x_0 и x, лежащих на этой кривой: $x_0 = x(\lambda_0)$ и $x = x(\lambda_0 + \delta\lambda)$, можно записать равенство

$$x^i(\lambda_0 + \delta\lambda) = x^i_0 + v^i\delta\lambda + O(\lambda^2) \tag{1}$$

в гладких координатах.

Как увидим далее, при переходе от одних гладких координат к другим производные функций перехода, входящие в закон преобразования вектора, ограничены. Поэтому, если равенство (1) справедливо в одних гладких координатах, то оно будет иметь место и в других гладких координатах.

Далее будем рассматривать только гладкие координаты и гладкие кривые.

Назовем вектором смещения δx точки x, относительно близкой к ней точки x_0, такой вектор, компоненты которого удовлетворяют равенству $x^i = x^i_0 + \delta x^i$ с точностью до величин более высокого порядка малости по δx^i. Как видно из (1), такой вектор существует, и в качестве него может быть взят вектор $v\delta\lambda$ ($v\delta\lambda$ не зависит от параметризации, поскольку $v^i = dx^i/d\lambda$).

Рассмотрим следующее отображение: каждому вектору смещения $\delta x \in T^+_{x_0}M$ сопоставим значение квадрата интервала вдоль траектории δs^2 между точками, одна из которых x_0, а вторая определяется ее вектором смещения относительно x_0. В качестве такой траектории можно взять, например, линию, вдоль которой координаты меняются линейно. Будем считать, что существует предел введенной функции при $\max_i \delta x^i \to 0$. Если принять, что собственное время течет равномерно, т. е. при умножении вектора смещения на некоторое достаточно малое число интервал времени умножается на это же число, то рассматриваемый предел представляет собой квадратичную форму. Она всегда может быть задана с помощью симметричной билинейной формы, которую будем называть метрическим тензором:

$$g = \sum_{i,k=0}^{3} g_{ik} dx^i \otimes dx^k.$$

Предположим также, что тензор g — невырожденный, т. е. $\forall v \neq 0\ \exists u : g(u, v) \neq 0$.

Назовем векторы из $T^+_{x_0}M$ времениподобными, а интервал между такими событиями определим как $\delta s = \sqrt{\delta s^2} = \sum_{ik} g_{ik}\delta x^i \delta x^k$ и будем называть его времениподобным интервалом.

Будем также считать, что существуют векторы из $T_{x_0}M$, для которых $g(v, v) < 0$. Множество таких векторов обозначим через $T^-_{x_0}M$. Соответствующий интервал определим как $\delta s = \sqrt{-g(v, v)}$. Согласно определению, не существует такой траектории, что $\delta s = c\delta\tau$, где $\delta\tau$ — время, измеренное часами, движущимися вдоль траектории. Так как рассматриваемое многообразие — пространство-время, то естественно называть такие векторы и интервалы пространственноподобными.

Очевидно, что можно подобрать такую линейную комбинацию векторов из $T^+_{x_0}M$ и $T^-_{x_0}M$, интервал для которой будет равен нулю. Такие векторы и интервал будем называть светоподобными, поскольку, если в рамках предлагаемой концепции строить теорию поля, то волны поля, в том числе электромагнитного, распространяются вдоль соответствующих направлений.

Считаем, что выбором координат матрицу компонент метрического тензора в точке x_0 можно привести к следующему виду:

$$\|g_{ik}\| = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1). \tag{2}$$

Примем, что компоненты метрического тензора не слишком быстро меняются. Это означает, что можно подобрать такие координаты, в которых в некоторой точке матрица компонент метрического тензора имеет вид (2), а в ее окрестности компоненты тензора мало отличаются от компонент в исходной точке, в том смысле, что изменения компонент малы по сравнению с единицей. Такие координаты будем называть локально лоренцевыми, подобласть, где такие координаты заданы, — малой, а все точки в этой подобласти — близкими.

Используя локально лоренцевы координаты, можно найти значение c, так как $c^2\delta\tau^2 = (\delta x^0)^2 - (\delta x^1)^2 - (\delta x^2)^2 - (\delta x^2)^2$. Если записать уравнения для некоторого поля, например электромагнитного, можно прийти к тому, что c будет равно скорости распространения волн поля. Потому множитель c называют скоростью света.

С помощью метрического тензора можно сформулировать также критерий гладкости координат. Гладкими будем считать локально лоренцевы координаты, а также все те, для которых производные функций перехода в обе стороны ограничены: $|\partial\tilde{x}^i/\partial x^j| < K$, $|\partial x^i/\partial\tilde{x}^j| < K$, $i,j=\overline{0.3}$.

3. Локальная одновременность. Рассмотрим некоторую область D с локально лоренцевыми координатами, а в ней поверхность $x^0 = x^0_{(1)}$, где $x^0_{(1)}$ — некоторая постоянная. Можно ли сказать, являются точки этой поверхности одновременными или нет? Непосредственно измерять промежутки собственного времени между точками данной поверхности не можем, поскольку соответствующие касательные векторы принадлежат $T^-_{x_0}M$, т. е. не существует наблюдателя, чья траектория соединяет эти точки.

Для того чтобы измерять и сравнивать промежутки времени, рассмотрим еще одну поверхность: $x^0 = x^0_{(2)}$, $x^0_{(2)} > x^0_{(1)}$. Будем сравнивать промежутки времени между двумя введенными поверхностями для двух траекторий. В качестве первой траектории возьмем линию $x^0 = c\tau$, $x^i = 0$, $i = 1,2,3$. Возьмем также вторую траекторию, проходящую на малом удалении от первой. Это означает, что в точках траектории отклонение компонент метрического тензора от элементов матрицы (2) также мало. Параметры траекторий могут быть любыми, но примем координату x^0 за параметры обеих траекторий.

Кроме того, потребуем, чтобы скорость вдоль второй траектории мало бы отличалась от скорости вдоль первой траектории. Это ограничение сформулируем следующим образом: изменения координат при движении вдоль сравниваемых линий должны быть близки. Поскольку для первой траектории $\delta x^i = 0$, $i = 1,2,3$, введенное ограничение можно записать как следующие условия для приращений координат вдоль второй траектории:

$$|x^i_{(2)}(x^0) - x^i_{(1)}(x^0)| \ll \delta x^0, \quad i = 1,2,3, \quad x^0 \in [x^0_{(1)}, x^0_{(2)}]. \tag{3}$$

Траектории, удовлетворяющие такому условию, будем называть траекториями с близкой скоростью.

Интервал между точками пересечения первой траектории с данными поверхностями равен

$$\delta s = x^0_{(2)} - x^0_{(1)},$$

а между точками пересечения $x_{(1)}$, $x_{(2)}$ второй траектории с этими же поверхностями —

$$\delta s = \sqrt{(x^0_{(2)} - x^0_{(1)})^2 - \sum_{i=1}^{3}(x^i_{(2)} - x^i_{(1)})^2} =$$

$$= x^0_{(2)} - x^0_{(1)} - \frac{1}{2}\frac{\sum\limits_{i=1}^{3}(x^i_{(2)} - x^i_{(1)})^2}{x^0_{(2)} - x^0_{(1)}}$$

с точностью до членов более высокого порядка малости. Из условия (3) вытекает, что интервалы для двух близких траекторий с близкими скоростями отличаются на величину, много меньшую δs и имеющую второй порядок малости. Таким образом, δs, введенный как интервал между поверхностями для первой траектории, с точностью до малых величин второго порядка является также интервалом между поверхностями и для второй траектории. Это означает, что интервал между описываемыми поверхностями не зависит от траектории, вдоль которой он вычисляется, если рассматривать близкие траектории с близкими скоростями.

Сами же поверхности можно считать поверхностями одновременных событий в области D при условии, что скорости для траекторий, вдоль которых измеряем время, мало отличаются.

Нетрудно понять, что для любых двух поверхностей $x^0 = \mathrm{const}$ время, измеренное любым наблюдателем, близким по скорости к наблюдателю $x^0 = c\tau$, $x^i = 0$, $i = 1, 2, 3$, между точками пересечения траектории наблюдателя с этими поверхностями будет одним и тем же: $\delta\tau = c^{-1}\delta x^0$.

Поверхность одновременных событий в малой области будем называть локальной.

4. Система отсчета. Рассмотрим сначала малую область D и введем в ней локально лоренцевы координаты. Будем называть локально лоренцевой системой отсчета в области D конгруэнцию наблюдателей с нулевыми компонентами скорости v^i, $i = 1, 2, 3$, во введенных координатах и совокупность поверхностей $x^0 = \mathrm{const}$, заполняющих D. Очевидно, что все такие наблюдатели имеют близкую скорость.

Выберем некоторую поверхность $x^0 = \mathrm{const}$, лежащую в D. Будем называть ее конфигурационным пространством, ассоциированным с данной системой отсчета. Время для каждого наблюдателя будем отсчитывать от точки пересечения его траектории с этой поверхностью.

Любая другая поверхность $x^0 = \mathrm{const}$ в D, как ранее установлено, будет также поверхностью одновременных событий с точки зрения любого наблюдателя из данной конгруэнции. То есть, если два события лежат на такой поверхности, то они одновременны для всех этих наблюдателей. Потому естественно называть координату x^0 временно́й, а величину $t = c^{-1}x^0$ — временем события x в рассматриваемой системе отсчета. Координаты x^i, $i = 1, 2, 3$, будем называть пространственными координатами в данной системе отсчета, поскольку при изменении любой из них временна́я координата не меняется.

Определим теперь систему отсчета для более общего случая. Пусть теперь область D не мала, т. е. события в ней не обязательно близки, так что компоненты метрического тензора нельзя привести к виду (2) сразу во всей области.

Рассмотрим конгруэнцию наблюдателей в D такую, чтобы для всех близких наблюдателей этой конгруэнции скорости также были бы близки.

Поверхностью одновременных событий (в глобальном смысле) будем называть ту, которая в каждой малой подобласти области D является локальной поверхностью одновременных событий для наблюдателей, чьи траектории проходят через эту подобласть.

Чтобы построить такую поверхность, учтем, что векторы, касательные к этой поверхности в некоторой точке, — базисные векторы $e_{(i)}$, $i = 1, 2, 3$, в рассматриваемой ранее локально лоренцевой системе координат, ассоциированной с наблюдателем, проходящим через данную точку. Из вида метрического тензора в локально лоренцевой системе координат следует, что эти векторы аннулируют дифференциальную форму $\omega = g(v, \cdot)$, где v — скорость данного наблюдателя. Для интегрируемости достаточно, чтобы существовала такая функция $h \neq 0$, что

$$d(h\omega) = 0. \tag{4}$$

Тогда, согласно лемме Пуанкаре, существует такая функция f, что $\omega = df/h$. Это означает, что все касательные векторы к поверхности $f = \mathrm{const}$ аннулируют и форму ω. Таким образом, ω определяет трехмерную касательную гиперплоскость к поверхности $f = \mathrm{const}$, которая и является, следовательно, поверхностью одновременных событий.

Предположим, что нам удалось построить в области D систему поверхностей одновременных событий так, чтобы через каждую точку D проходила бы некоторая поверхность. Такая система поверхностей представляет собой слоение области D.

Возьмем некоторого наблюдателя, которого назовем главным. Выберем некоторую поверхность одновременных событий, которую пересекает траектория главного наблюдателя. Взятую поверхность будем называть конфигурационным пространством, ассоциированным с системой отсчета, которую мы строим. Будем считать, что на выбранной поверхности можно ввести координаты. Локально это можно сделать всегда, как, например, при построении локальной поверхности одновременных событий.

Примем, что траектории всех остальных наблюдателей рассматриваемой конгруэнции также пересекают выбранную поверхность. Если это не так, можно взять подобласть области D, отбросив точки траекторий, ее не пересекающих.

Введем координаты в области D. Рассмотрим некоторую точку x. Величину $x^0 = c\tau$, где τ — время пересечения главным наблюдателем поверхности одновременных событий, на которой лежит x, назовем временной координатой. Через точку x проходит также траектория некоторого наблюдателя рассматриваемой конгруэнции. Точка пересечения этой траектории с конфигурационным пространством $x_{(c)}$ имеет 4 координаты; первая из них $x^0_{(c)} = c\tau_{(c)}$, где $\tau_{(c)}$ — время пересечения этой поверхности мировой линией главного наблюдателя, а остальные три — введенные ранее координаты в конфигурационном пространстве. Последние и будем считать координатами точки x: $x^i = x^i_{(c)}$, $i = 1, 2, 3$. При изменении только этих координат сдвинутая точка лежит на той же поверхности одновременных событий, что и исходная, так как временна́я координата точки x не меняется. В то же время изменение координаты x^0 приводит к тому, что новая точка будет лежать на другой поверхности одновременных событий. Поэтому координату x^0 можно рассматривать как временну́ю, а координаты x^i, $i = 1, 2, 3$, как пространственные.

Совокупность конгруэнции наблюдателей в области D, один из которых главный, и слоения, представляющего собой поверхности одновременных событий для наблюдателей из этой конгруэнции, будем называть системой отсчета в области D. Нетрудно видеть, что локально лоренцева система отсчета является частным случаем системы отсчета для малой области.

Таким образом, система отсчета дает способ введения пространственно-временных координат, одна среди которых является временно́й, а остальные три — пространственными.

Введение системы отсчета позволяет вместо движения частицы в пространстве-времени рассматривать движение ее прообраза $x_{(c)}$ в конфигурационном пространстве.

Приведем, наконец, вид метрического тензора в пространственно-временных координатах, ассоциированных с некоторой системой отсчета. В точках, близких к траектории основного наблюдателя, метрический тензор, согласно определению, имеет вид (2). Вдали от траектории основного наблюдателя пространственные координаты локально лоренцевой системы отсчета, которые обозначим через $\tilde{x}^i$, $i = 1, 2, 3$, могут считаться также координатами в конфигурационном пространстве в исходной системе отсчета и быть выражены только через x^i, $i = 1, 2, 3$.

Тогда имеем, что

$$g_{i0} = \frac{\tilde{\partial} x^k}{\partial x^i} \frac{\tilde{\partial} x^m}{\partial x^0} \tilde{g}_{km} = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

поскольку $\tilde{\partial} x^m / \partial x^0 = 0$, $i = 1, 2, 3$. Это доказывает, что в пространственно-временных координатах, ассоциированных с любой системой отсчета, всегда $g_{i0} = 0$, $i = 1, 2, 3$.

Очевидно, что этого условия достаточно, чтобы можно было построить некоторую систему отсчета. В качестве конгруэнции наблюдателей возьмем совокупность координатных линий для координаты x^0. Тогда условие интегрируемости $dg(v, \cdot) = 0$ выполняется, и в каждой точке можно построить поверхность событий, касательная гиперплоскость к которой образована событиями, одновременными для движущегося через эту точку локального наблюдателя в соответствующей ему локально лоренцевой системе отсчета.

5. Пример. Ускоренная система отсчета. Возьмем некоторую лоренцеву систему отсчета в плоском пространстве-времени. В конфигурационное пространство введем декартовы координаты. Тогда во всем пространстве-времени компоненты метрического тензора имеют вид (2).

Рассмотрим конгруэнцию наблюдателей, каждый из которых движется с одной и той же скоростью $dx/dx^0 = (1, \beta(x^0), 0, 0)^T$, $|\beta| < 1$. Здесь индекс T обозначает транспонирование. Поскольку координаты x^2, x^3 не меняются, их можно проигнорировать, выполняя все дальнейшие построения в плоскости $x^2 = x^3 = 0$. Очевидно, что условие близости скоростей для близких наблюдателей выполняется. Условие интегрируемости (4) также выполняется при $h = \beta^{-1}(x)$.

В локально лоренцевой системе, где главным является наблюдатель из рассматриваемой конгруэнции, чья траектория проходит через некоторую точку $x = (x^0, x^1)$, метрический тензор имеет вид (2), а вектор, касательный к поверхности одновременных событий, равен $v = (0, a)^T$, где a зависит от параметризации. Для перехода от локально лоренцевой системы к исходной лоренцевой можно использовать преобразования Лоренца, которые дают $v = (a\gamma(x^0), a\beta(x^0)\gamma(x^0))$, где $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$. Таким образом, для касательной линии в точке x имеем $dx^0/dx^1 = 1/\beta(x^0)$.

Пусть главный наблюдатель ускоренной системы при $x^0 = 0$ находится в точке $x^1 = 0$. Тогда его мировая линия описывается выражением

$$x^1_{(m)} = \int\limits_0^{x^0_{(m)}} \beta(\xi)\, d\xi.$$

Индекс m обозначает главного наблюдателя и записывается в скобках, чтобы отличить его от тензорного индекса.

Возьмем некоторую точку x в пространстве-времени с координатами в исходной лоренцевой системе отсчета (x^0, x^1). Чтобы определить координаты этой точки в ускоренной системе отсчета, найдем точку пересечения поверхности одновременных событий, проходящей через данную точку, с мировой линией главного наблюдателя.

Изменение координаты x^1 вдоль поверхности одновременных событий при переходе от точки $(x^0_{(m)}, x^1_{(m)})$ к точке (x^0, x^1) равно

$$\int\limits_{x^0_{(m)}}^{x^0} \frac{d\xi}{\beta(\xi)}.$$

Отсюда получаем, что $x^0_{(m)}$ удовлетворяет уравнению

$$\int\limits_0^{x^0_{(m)}} \beta(\xi)\, d\xi + \int\limits_{x^0_{(m)}}^{x^0} \frac{d\xi}{\beta(\xi)} = x^1. \tag{5}$$

Согласно определению, в рассматриваемой ускоренной системе отсчета координаты точки x равны

$$\tilde{x}_0 = x^0_{(m)}, \qquad \tilde{x}_1 = x_1 - \int\limits_0^{x^0} \beta(\xi)\, d\xi.$$

Итак, ускоренная система отсчета построена.

При малом изменении $x^0 : x^0 \to x^0 + \delta x^0$ с точностью до величин более высокого порядка малости из уравнения (5) имеем, что

$$\beta(x^0_{(m)})\delta x^0_{(m)} + \frac{1}{\beta(x^0)}\delta x^0 - \frac{1}{\beta(x^0_{(m)})}\delta x^0_{(m)} = 0.$$

Тогда находим, что

$$\delta x^0_{(m)} = \frac{\beta(x^0_{(m)})\gamma(x^0_{(m)})}{\beta(x^0)}\delta x^0.$$

Аналогично, варьируя $x^1 : x^1 \to x^1 + \delta x^1$, получим уравнение

$$(\beta(x^0_{(m)}) - \frac{1}{\beta(x^0_{(m)})})\delta x^0_{(m)} = \delta x^1,$$

или

$$\delta x^0_{(m)} = -\gamma(x^0_{(m)})\beta(x^0_{(m)})\delta x^1.$$

Отсюда имеем, что

$$\frac{\partial \tilde{x}^0}{\partial x^0} = \frac{\beta(x^0_{(m)})\gamma(x^0_{(m)})}{\beta(x^0)}, \quad \frac{\partial \tilde{x}^0}{\partial x^1} = -\gamma(x^0_{(m)})\beta(x^0_{(m)}).$$

Нетрудно также найти, что

$$\frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^0} = -\beta(x^0), \quad \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^1} = 1,$$

и получить производные обратного преобразования координат:

$$\frac{\partial x^0}{\partial \tilde{x}^0} = \frac{\beta(x^0)\gamma^2(x^0)}{\beta(x^0_{(m)})\gamma(x^0_{(m)})}, \quad \frac{\partial x^0}{\partial \tilde{x}^1} = \beta(x^0)\gamma^2(x^0),$$

$$\frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^0} = \frac{\beta^2(x^0)\gamma^2(x^0)}{\beta(x^0_{(m)})\gamma(x^0_{(m)})}, \quad \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^1} = \gamma^2(x^0).$$

Компоненты метрического тензора для этой системы отсчета имеют вид

$$\tilde{g}_{00} = \left(\frac{\partial x^0}{\partial \tilde{x}^0}\right)^2 g_{00} + \left(\frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^0}\right)^2 g_{11} = \left(\frac{\beta(x^0)\gamma(x^0)}{\beta(x^0_{(m)})\gamma(x^0_{(m)})}\right)^2,$$

$$\tilde{g}_{01} = \frac{\partial x^0}{\partial \tilde{x}^0}\frac{\partial x^0}{\partial \tilde{x}^1} g_{00} + \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^0}\frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^1} g_{11} = 0,$$

$$\tilde{g}_{11} = \left(\frac{\partial x^0}{\partial \tilde{x}^1}\right)^2 g_{00} + \left(\frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^1}\right)^2 g_{11} = -1.$$

Рассмотренную здесь систему отсчета можно назвать ускоренной, поскольку все наблюдатели, ее образующие, в каждый момент времени имеют скорость $(1, \beta(x^0), 0, 0)^T$, $|\beta| < 1$, причем β может изменяться, а это и означает ускорение наблюдателей.

Приведенный пример — не единственный вариант построения системы отсчета с ускоренными наблюдателями, а лишь простейший случай, когда скорость всех наблюдателей одинаковая.

Перейдем к еще одному широко известному примеру [4–8]. Пусть в плоском пространстве времени задана лоренцева система отсчета с координатами $x^0 = ct$, x^1, x^2, x^3 так, чтобы $g_{11} = -1$. Введем также координаты ϱ, η в области $x^1 > 0$:

$$x^0 = \varrho \mathrm{sh}\eta, \quad x^1 = \varrho \mathrm{ch}\eta, \quad \varrho > 0.$$

Еще две координаты в этой системе координат пусть совпадают с x^2, x^3. Матрица компонент метрического тензора в этих координатах равна

$$\|g_{ik}\| = \mathrm{diag}(\varrho^2, -1, -1, -1),$$

в частности $g_{\eta\varrho} = 0$. Следовательно, введенные координаты являются пространственно-временными, ассоциированными с некоторой системой отсчета. Конгруэнцию наблюдателей такой системы отсчета образуют линии $\varrho = \mathrm{const}$. Скорости данных наблюдателей в исходной системе отсчета равны

$$\beta = \frac{dx^1}{dx^0} = \frac{dx^1/d\eta}{dx^0/d\eta} = \tanh\eta.$$

Выражая β в исходных координатах, приходим к уравнению

$$\frac{dx^1}{dx^0} = \frac{x^0}{x^1}.$$

Интегрируя, получим, что $x^1(x^0) = \sqrt{(x^0)^2 + (x^1(0))^2}$, откуда

$$\beta = \frac{x^0}{\sqrt{(x^0)^2 + (x^1(0))^2}}.$$

В отличие от рассмотренного ранее примера для данного случая скорость наблюдателя в исходной системе отсчета зависит не только от времени, но и от наблюдателя. Потому такой случай не является частным для описанного ранее примера.

Четырехмерные скорость и ускорение наблюдателя равны

$$u = \frac{dx}{ds} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\eta, \\ \mathrm{sh}\eta, \end{pmatrix} \qquad w = \frac{du}{ds} = \frac{1}{\varrho}\begin{pmatrix} \mathrm{sh}\eta, \\ \mathrm{ch}\eta, \end{pmatrix}$$

(учитываем только компоненты с индексами 0 и 1). Таким образом, ускорение также изменяется и зависит от наблюдателя.

Пространства одновременных событий представляют собой поверхности $x^0/x^1 = \mathrm{const}$. Касательный вектор к такой поверхности можно записать в виде $e_{(1)} = (\mathrm{sh}\eta, \mathrm{ch}\eta)^T$. Видно, что условие $g(u, e_{(1)}) = 0$ удовлетворяется.

6. Заключение. В статье предложен подход, на основе которого можно ввести метрический тензор в пространстве-времени. В этом подходе не используется традиционная процедура синхронизации часов.

Не применяется также такая традиционная процедура как измерение длины с помощью так называемых «жестких стержней». Понятие «жесткого стержня» не имеет математической формализации и представляется нам излишним. Для измерения пространственных координат можно использовать устойчивые конфигурации в системах «частицы — поле». Они могут быть найдены в результате совместного решения уравнений динамики частиц и поля, которые могут быть записаны в тензорном виде, т. е. без применения координат. В качестве параметров, описывающих расположение составных частей этих конфигураций в конфигурационном пространстве, могут быть взяты пространственноподобные интервалы между такими частями.

Предложенный подход позволяет рассматривать широкие классы систем отсчета. Более узкий класс составляют системы отсчета, где формирующие их наблюдатели движутся синхронно, т. е. со скоростью, не зависящей от них. Причем наблюдатели могут двигаться с ускорением, что соответствует ускоренной системе отсчета.

Доказано, что в пространственно-временных координатах, ассоциированных с любой системой отсчета, смешанные компоненты метрического тензора всегда равны нулю: $g_{i0} = 0$, $i = 1, 2, 3$.

Ускоренные системы отсчета рассматривались во многих работах на основе подхода, состоящего в параллельном переносе некоторых векторов [6–8]. При этом возникают трудности в интерперетации предлагаемых координат как пространственно-временных.

Подход, приведенный в [3] и примененный в настоящей работе, намного проще, так как параллельный перенос вообще не используется. Очевидно, что одна из координат в рамках предложенного подхода — временная, так как все события, близкие к любой точке рассматриваемой области и имеющие эту координату, являются одновременными, с точки зрения наблюдателя, принадлежащего конгруэнции, образующей систему отсчета, чья траектория проходит через данную точку. Кроме того, эти события одновременны и с точки зрения любого наблюдателя, движущегося вблизи такой точки со скоростью, близкой к скорости проходящего через эту точку наблюдателя из конгруэнции. А глобальная одновременность определяется как принадлежность событий слою, все близкие точки которого одновременны. В то же время остальные три координаты являются чисто пространственными, поскольку при любом их изменении не происходит выход со слоя, на котором все события одновременны.

Результаты работы могут найти применение в теории гравитационного поля [9] и электродинамике [10, 11].

Литература

1. *Владимиров Ю. С.* Системы отсчета в теории гравитации. М: Энергоиздат, 1982. 256 с.

2. *Sachs R. K., Wu H.* General relativity for mathematicians. New York: Springer, 1977. 291 p.

3. *Drivotin O. I.* Rigorous definition of the reference frame // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2014. Вып. 4. С. 25–36.

4. *Lass H.* Accelerating frames of reference and the clock paradox // American Journal of Physics. 1963. Vol. 31. Iss. 4. P. 274–276.

5. *Marsh L. McL.* Relativistic accelerated systems // American Journal of Physics. 1965. Vol. 33. Iss. 11. P. 934–938.

6. *Marzlin K. P.* What is the reference frame of an accelerated observer? // Physics Letters A. 1996. Vol. 215. P. 1–6.

7. *Misner C. W., Thorn K. S., Wheeler J. A.* Gravitation. Princeton: Princeton University Press, 2017. 1279 p.

8. *Manasse F. K., Misner C. W.* Fermi normal coordinates and some basic concepts in differential geometry // Journal of Mathematical Physics. 1963. Vol. 4. Iss. 6. P. 735–745.

9. *Дривотин О. И.* О плотности потока импульса гравитационного поля // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2021. Т. 17. Вып. 2. С. 137–147. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.204

10. *Дривотин О. И.* Математические основы теории поля. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2010. 168 с.

11. *Podsosenov S. A., Foukzon J., Potapov A., Men'kova E.* Electrodynamics in noninertial reference frames // Journal of Applied Mathematics and Physics. 2016. Vol. 4. P. 806–843.

Статья поступила в редакцию 5 мая 2022 г.
Статья принята к печати 21 июня 2022 г.

Контактная информация:

Дривотин Олег Игоревич — д-р физ.-мат. наук, проф.; o.drivotin@spbu.ru

On the determination of spacetime geometry

O. I. Drivotin

St Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Drivotin O. I. On the determination of spacetime geometry. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2022, vol. 18, iss. 3, pp. 316–327. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2022.302 (In Russian)

A new approach allowing to determine the metric tensor in various points of the spacetime is proposed. Such approach gives an opportunity to investigate the simultaneity of events not only locally, but also globally, without using of the synchronization procedure, traditionally applied in the theory of the spacetime. On the base of the method of simultaineity determination described in the article, it is possible to construct broad classes of reference frames. As an example, a reference frame is considered, all ovservers of which move with the same arbitrarily changing velocity along some direction.

Keywords: metric tensor, simultaneity, reference frame, accelerated reference frame.

References

1. Vladimirov Yu. S. *Sistemy otscheta v teorii gravitatsii* [*Reference frames in gravitation theory*]. Moscow, Energoizdat Publ., 1982, 256 p. (In Russian)

2. Sachs R. K., Wu H. *General relativity for mathematicians.* New York, Springer Publ., 1977, 291 p.

3. Drivotin O.I. Rigorous definition of the reference frame. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 10. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2014, iss. 4, pp. 25–36.

4. Lass H. Accelerating frames of reference and the clock paradox. *American Journal of Physics*, 1963, vol. 31, iss. 4, pp. 274–276.

5. Marsh L. McL. Relativistic accelerated systems. *American Journal of Physics*, 1965, vol. 33, iss. 11, pp. 934–938.

6. Marzlin K. P. What is the reference frame of an accelerated observer? *Physics Letters A*, 1996, vol. 215, pp. 1–6.

7. Misner C. W., Thorn K. S., Wheeler J. A. *Gravitation.* Princeton, Princeton University Press, 2017, 1279 p.

8. Manasse F. K., Misner C. W. Fermi normal coordinates and some basic concepts in differential geometry. *Journal of Mathematical Physics*, 1963, vol. 4, iss. 6, pp. 735–745.

9. Drivotin O. I. O plotnosti potoka impulsa gravitatsionnogo polya [On momentum flow density of the gravitational field]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2021, vol. 17, iss. 2, pp. 137–147. (In Russian) https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.204

10. Drivotin O. I. *Matematicheskiye osnovy teorii polya* [*Mathematical foundations of the field theory*]. St Petersburg, St Petersburg University Press, 2010, 168 p. (In Russian)

11. Podsosenov S. A., Foukzon J., Potapov A., Men'kova E. Electrodynamics in noninertial reference frames. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 2016, vol. 4, pp. 806–843.

Received: May 5, 2022.
Accepted: June 21, 2022.

Author's information:

Oleg I. Drivotin — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; o.drivotin@spbu.ru