

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519.718:004.722

MSC 68M15

Анализ и синтез структур сетей связи методом перебора состояний

К. А. Батенков

Академия Федеральной службы охраны Российской Федерации, Российская Федерация,
302015, Орел, ул. Приборостроительная, 35

Для цитирования: *Батенков К. А.* Анализ и синтез структур сетей связи методом перебора состояний // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2022. Т. 18. Вып. 3. С. 300–315.
<https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2022.301>

Рассматривается один из методов анализа и синтеза структур сетей связи, основанный на наиболее простом подходе к вопросу расчета вероятности связности — методе перебора состояний ребер сети. Несмотря на его существенный недостаток, заключающийся в значительной трудоемкости проводимых вычислений, он оказывается достаточно востребованным как на этапе отладки новых методов анализа, так и при выполнении процедуры последовательного синтеза структур сетей. Предложенный метод последовательного синтеза может быть представлен в виде этапов, на каждом из которых добавляется одно или несколько ребер (элементов сети). Увеличение числа используемых ребер приводит к росту числа вариаций функций связности графа с добавленным ребром, а значит, и к увеличению трудоемкости операций вычисления условных вероятностей. В то же время подобное усложнение дает возможность более точно решать задачу синтеза, поскольку не во всех ситуациях последовательное добавление ребер эквивалентно перебору всех возможных альтернатив. Как описанный метод анализа структур сетей связи на основе перебора состояний, так и метод синтеза отличаются существенной простотой реализации процессов проводимых вычислений. Именно данное обстоятельство позволяет использовать эти методы в качестве эталонных. Точность проводимых расчетов зависит исключительно от возможностей аппаратно-программных комплексов и никоим образом не ограничивается непосредственно самим методом перебора состояний. В результате вычисление вероятности связности с прецизионной точностью, характерное для ситуаций сравнительного анализа сетей связи с коэффициентами готовности и живучести отдельных элементов сети, близких к пороговым значениям, также оказывается выполнимым на основе рассмотренных методов.

Ключевые слова: сеть связи, граф, структура, вероятность связности, коэффициент готовности, коэффициент оперативной готовности, метод перебора состояний.

1. Введение. Сложные многокомпонентные технологические сети являются характерной чертой современного общества [1]. Урбанизация и глобализация, сопровождающиеся быстрым развитием инфраструктуры и технологий, позволили построить производительные сети со все более взаимозависимыми компонентами. Данные сети предназначены для распределения какого-либо ресурса или товара, а их наиболее яркими представителями являются сети связи, например телефонные сети или Интернет. Кроме того, к ним относятся транспортные сети (автомобильных, железных дорог и авиасообщений), инженерные сети (электро-, газо- и водоснабжения) и т. д.

Системы в виде технологических сетей — неотъемлемая часть мегаполисов; их поломки, хотя и редкие, ведут к серьезным последствиям для общественной безопасности. Зависимость нашего общества от технологических систем и информационных сетей растет. В настоящее время едва ли можно представить нашу жизнь без электричества, телефонов, самолетов и даже без Интернета. В результате возникает потребность в высокой надежности современных технологических сетей. Качество, с которым сеть предоставляет услугу, требует количественной оценки устойчивости (и как ее составляющих надежности и живучести сети). Она является значимым аспектом проектирования, оптимизации и эксплуатации сети.

Если остановиться конкретно на телекоммуникационных сетях, то в последние годы наблюдается резкий всплеск объемов циркулирующего трафика. Ощутим соответствующий рост спроса на компьютерные и коммуникационные сети как по сложности, так и по размерам. По мере роста размеров сетей одновременно увеличиваются количество и частота отказов компонентов. Поэтому целесообразно проектировать сети, способные сохранять работоспособность, несмотря на выход из строя оборудования.

Хотя метод перебора потребляет большое количество времени и памяти, существуют его модификации, которые могут обрабатывать большие сети [2, 3]. В зависимости от требований доступны следующие варианты.

Поиск в эвристическом пространстве состояний в основном использует тот же подход, что и перебор, но применяет лишь подмножество состояний в качестве исходного пространства. При этом начальные состояния могут либо задаваться, либо рассчитываться случайным образом.

Перебор на основе разрешимых задач идентифицирует все возможные состояния сети путем организации поиска в форме алгоритма, выполнимого за полиномиальное время. В отличие от перебора в пространстве состояний данный метод возвращает только результат, но не таблицу или график промежуточных вычислений. В зависимости от структуры сети он может быть применен к структурам, содержащим несколько сотен вершин.

Ограниченный поиск на основе разрешимых задач использует другую формулировку алгоритма, выполнимого за полиномиальное время, и идентифицирует только структуры с заданной максимальной длиной связных состояний. Такой метод оказывается исчерпывающим в отношении состояний, характеризующихся заданным размером, но никогда не отыщет более крупные состояния. Как и перебор на основе разрешимых задач, он не определяет промежуточных результатов.

Существующие подходы к анализу и синтезу структур сетей связи рассматривают отдельные элементы сети как стохастические модели, характеризующиеся вероятностями пребывания в состояниях работоспособности и неработоспособности [4]. При этом при оценке устойчивости (и как ее составляющих надежности и живучести) на основе экспериментальных данных применяются статистические параметры —

коэффициенты готовности и оперативной готовности [5]. В результате основные преобразования, используемые при переходе от подобных коэффициентов или вероятностей отдельных элементов сети к показателям для сети в целом, сохраняют свои свойства [6, 7]. Следовательно, оказывается возможным применять математические модели, в которых параметрами будут исключительно вероятности связности как для случая аналитического описания, так и при обработке результатов экспериментов.

В работе рассматривается один из методов анализа и синтеза структур сетей связи, основанный на наиболее простом подходе к вопросу расчета вероятности связности. Несмотря на его существенный недостаток, заключающийся в значительной трудоемкости проводимых вычислений, он оказывается достаточно востребованным как на этапе отладки новых методов анализа, так и при выполнении процедуры последовательного синтеза структур сетей.

2. Вероятности связности структур сетей связи. Типовая задача анализа надежности сети заключается в вычислении вероятности того, что определенные наборы узлов могут взаимодействовать друг с другом в течение заданного периода времени. Исходя из количества сообщающихся узлов, выделяют три основные формулировки задачи надежности сети: двухполюсную, k -полюсную и многополюсную (всеполюсную).

Двухполюсные сети характерны для структур, являющихся средой для взаимодействия двух оконечных узлов, например терминалов в мобильных сетях с произвольной конфигурацией (*ad hoc*) или мультиплексоров транспортных оптоволоконных сетей, для которых значимо понятие *направление связи*. Эти два узла обычно обозначаются как источник и сток. Остальные узлы функционируют как ретрансляторы, обеспечивая канал связи между источником и стоком. Естественно, что как в беспроводной среде, так и в проводной линии связи, соединяющие узлы, могут случайно выйти из строя. В результате работа сети обеспечивается избыточностью промежуточных узлов, соединения которых гарантируют наличие дополнительных путей между источником и стоком.

Наиболее общая задача анализа надежности, свойственная компьютерным сетям, — это случай k -полюсных сетей. В данном варианте надежность определяется как вероятность того, что существует путь, соединяющий k терминалов (узлов, полюсов) в сети. Надежность здесь рассчитывается на основе вероятностей всех возможных маршрутов, соединяющих как минимум все заданные k полюсов.

Например, в оптоволоконных сетях стандартной топологией является кольцо, вершины которого представляют собой узлы, а ребра — оптоволоконную линию связи, соединяющую передатчик и приемник (сетевые порты подключения).

Когда первичное кольцо работает, то вершины и ребра, составляющие подграф этих элементов, пересекаются ровно один раз, образуя цепь Эйлера. Если линия связи или узел выходит из строя на основном маршруте передачи данных, то они исключаются из рассмотрения в качестве связующих элементов и срабатывает алгоритм восстановления работоспособности сети. В результате формируется новый подграф, содержащий узлы как на первичном, так и на вторичном направлении, и образуется также требуемая цепь Эйлера. Новый подграф обеспечивает связь между рабочими станциями и звеньями кольцевой сети.

Следует отметить, что проблема анализа надежности сети оказывается особенно сложной при оценке надежности многополюсной (всеполюсной) сети (также называемой надежностью равномерной или общей сети). В таком случае надежность определяется на основе вероятности того, что все узлы могут взаимодействовать со всеми

другими узлами. Многополюсная сеть типична для ситуации, когда рассматривается взаимодействие между исходной вершиной (источником) и множеством терминалов, например при предоставлении услуги широковещательного видео или трансляции телепрограмм.

В настоящей работе рассмотрены случаи двухполюсной и многополюсной сетей, как наиболее существенных с точки зрения применения приложений. Отметим, что для многополюсной сети оцениваемым параметром является вероятность связности в целом (для сети), а для двухполюсной — вероятность связности в некотором направлении (между заданной парой вершин). Подобная терминология хорошо согласуется с использованной в [8], где двухполюсная сеть обеспечивает передачу информации между парой узлов в сети, а многополюсная — одновременную передачу между всеми двухполюсными сетями, т. е., по сути, между всеми узлами. Кроме того, эти два варианта сетей — граничные для общей k -полюсной сети.

Наиболее простой способ вычисления вероятности связности в заданной двухполюсной или многополюсной сети — перебор состояний ее элементов [8, 9]. В классической теории надежности он является частным случаем метода перебора гипотез [10]. Для двухполюсной сети суть метода заключается в том, что, задавая тем или иным способом все возможные состояния элементов сети, необходимо каждый раз устанавливать, существует ли между источником и стоком хотя бы одна простая цепь, а для многополюсной — в переборе всех возможных состояний элементов сети и определении связности или несвязности результирующего графа G [11, 12]. Если простая цепь существует либо граф сохраняет связность, то вычисляется вероятность данного состояния элементов как произведение вероятностей состояния каждого элемента [7]. При этом принимается за сомножитель вероятность либо работоспособного состояния, если элемент находится в работоспособном состоянии, либо неработоспособного состояния, если элемент неработоспособен. Набор всех состояний — это конституента, описывающая совокупное состояние элементов графа. Если же ни одной простой цепи при данном состоянии элементов не существует либо граф является несвязным, то переходят к формированию следующего состояния [13, 14]. После окончания формирования всех возможных состояний вычисленные значения вероятностей суммируют, в результате получают точное значение вероятности связности. Следует отметить, что эти состояния составляют полную группу событий, а значит, сумма их вероятностей не может превышать единицу.

Каждый элемент может быть в одном из двух активных состояний [15] (работоспособен либо неработоспособен; безразличное состояние является пассивным в том смысле, что такой элемент просто временно исключается из числа элементов, участвующих в переборе).

Вероятность пребывания системы связи в состоянии, когда отказали i из n элементов, определяется по формуле Бернулли [4]

$$p_{n,i} = C_n^i p^i q^{n-i},$$

где C_n^i — число сочетаний из n по i ; p — вероятность работоспособности элемента; $q = 1 - p$ — вероятность неработоспособности элемента.

Отказ какого-либо подмножества из совокупности i элементов, $i = 0, 1, \dots, n$, системы связи приводит к разным последствиям: в одних случаях сеть (многополюсная или двухполюсная) остается связной, в других — ее связность нарушается [16–18].

Для определения влияния отказа i элементов системы связи на состояние сети пронумеруем возможные подмножества i отказавших элементов числами $k = 1, 2, \dots, C_n^i$ и введем в рассмотрение коэффициент a_k . Здесь $a_k = 0$, если при отказе i -го подмножества i элементов связность сети (многополюсной или двухполюсной) нарушена, и $a_k = 1$ в противном случае. Тогда вероятность пребывания системы связи в состоянии, когда отказали i из n элементов, преобразуется следующим образом:

$$p_{n,i} = \sum_{k=1}^{C_n^i} a_k p^i q^{n-i}.$$

В результате вероятность связности сети, представленной графом G , определяется формулой

$$p_G = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{C_n^i} a_k p^i q^{n-i}, \quad (1)$$

из которой видно, что объем трудозатрат, необходимый для вычисления p_G , может быть очень большим. Так, если $n = 20$, то число слагаемых в формуле (1) оказывается больше, чем $nC_n^{\frac{n}{2}} = 20C_{20}^{10} \approx 3,7$ млн, а требуемых операций для расчета p_G еще больше. Поэтому для практических целей анализа структурной надежности реальных сложно разветвленных сетей связи метод перебора состояний элементов непригоден [19, 20]. Этот вывод справедлив не только для ручных способов расчета вероятности связности, но и при условии машинной реализации метода [21]. Однако относительная простота процедуры вычислений и соответствующая обзорность алгоритмического решения машинной модели позволяют все-таки рекомендовать специалистам иметь его в своем арсенале в качестве эталонного метода, позволяющего получать точные значения вероятности связности хотя бы на маломощных структурах [19, 22].

Выражение (1) несколько упрощается, если учесть, что сумма $\sum_{k=1}^{C_n^i} a_k$ соответствует числу связных подграфов b_i (либо простых цепей, либо деревьев или т. п.), когда отказали i из n элементов, т. е. $\sum_{k=1}^{C_n^i} a_k = b_i$. Тогда получим, что

$$p_G = \sum_{i=1}^n b_i p^i q^{n-i}. \quad (2)$$

Нетрудно видеть, что одним из способов вычисления b_i является формирование всех возможных сочетаний из i элементов по n , пометки каким-либо образом работоспособности этих i элементов на графе сети (остальные, т. е. непомянутые $n - i$ элементов, автоматически считаются в такой комбинации неработоспособными), проверки существования хотя бы одной простой цепи и подсчета числа комбинаций, при которых данное событие наступает [23, 24].

Таким образом, процедура вычисления вероятности связности методом перебора состояний элементов графа распадается на три самостоятельные процедуры:

- формирование комбинаций (конституент), упорядоченных в порядке возрастания числа неработоспособных элементов [7];
- определение количества связных подграфов для каждой комбинации (конституенты);
- вычисление вероятности существования конституент.

Если не принимать специальных мер, то объем трудозатрат будет пропорционален 2^n . Однако существуют определенные приемы, существенно снижающие трудоемкость метода за счет сокращения числа комбинаций, динамического изменения числа элементов, участвующих в переборе, и априорного определения числа связанных подграфов [25].

Пример 1. Граф исследуемой сети связи приведен на рис. 1. Все узлы сети являются абсолютно надежными, а вероятность работоспособности любой линии связи равна 0.9. Определить надежность сети связи в целом и в направлении 1–5 методом перебора состояний.

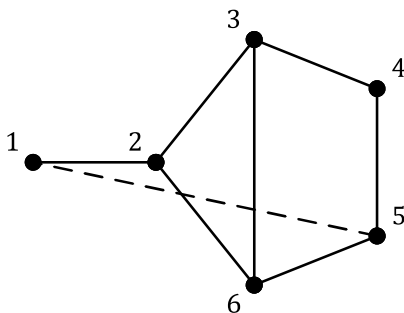


Рис. 1. Граф исследуемой сети связи

Дано: $G, p = 0.9$.

Найти: p_G, p'_G .

Поскольку узлы являются абсолютно надежными, то неработоспособности могут возникать только у ребер графа, т. е. число комбинаций (конституент) составляет $2^l = 2^7 = 128$.

Первоначально рассчитаем вероятность связности в направлении связи 1–5. Ясно, что для существования работоспособной простой цепи необходимо по крайней мере наличие трех работоспособных ребер. Соответственно перебор состояний целесообразно проводить с конститuenty p^3q^4 . Результаты приведены в табл. 1. Отметим, что в нее и следующую таблицу включены только те строки, которые соответствуют ненулевой функции связности a_k .

Таким образом, вероятность связности в направлении связи 1–5 равна

$$p_G' = \sum_{i=3}^n b_i p^i q^{n-i} = 0.0000729 + 0.00328 + 0.071 + 0.319 + 0.478 = 0.871.$$

Таблица 1. Состояния сети связи в направлении 1–5

Номер конstituенты i	Число связанных подграфов b_i	Конституента $p^i q^{n-i}$	Вероятность связности конstituенты $b_i p^i q^{n-i}$
3	1	$p^3 q^4$	$7.29 \cdot 10^{-5}$
4	5	$p^4 q^3$	$3.28 \cdot 10^{-3}$
5	12	$p^5 q^2$	0.071
6	6	$p^6 q^1$	0.319
7	1	$p^7 q^0$	0.478

Из данных табл. 1 на основе формулы (2) достаточно просто получить аналитический вид вероятности связности

$$p'_G = p^3 q^4 + 5p^4 q^3 + 12p^5 q^2 + 6p^6 q^1 + p^7 q^0,$$

который после использования условия полной вероятности $p + q = 1$ и упрощения записывается в форме

$$p'_G = p^3(3p^4 - 7p^3 + 3p^2 + p + 1).$$

Следует отметить, что показатель степени вероятности исправной работы, вынесенный за скобки в данном выражении, соответствует количеству ребер в минимально связанном подграфе.

Аналогичным образом рассчитываются вероятности связности сети в целом. Единственное, что граф сети оказывается связным только при не менее чем пяти работоспособных ребрах, поскольку узлов всего шесть. Результаты приведены в табл. 2.

Таблица 2. Состояния сети связи в целом

Номер конstituенты i	Число связанных подграфов b_i	Конституента $p^i q^{n-i}$	Вероятность связности конstituенты $b_i p^i q^{n-i}$
5	11	$p^5 q^2$	0.065
6	6	$p^6 q^1$	0.319
7	1	$p^7 q^0$	0.478

В результате вероятность связности сети в целом будет следующей:

$$p_G = \sum_{i=5}^n b_i p^i q^{n-i} = 0.065 + 0.319 + 0.478 = 0.862.$$

Приведем аналитический вид этой вероятности:

$$p_G = 11p^5 q^2 + 6p^6 q^1 + p^7 q^0 = p^5(6p^2 - 16p + 11).$$

Для данного графа можно получить аналитические выражения вероятности связности для всех направлений связи и графа в целом, что позволяет рассмотреть поведение этого показателя при изменении вероятности работоспособности ребер (рис. 2). Ожидаемо вероятность связности для графа в целом оказалась наименьшей

для всего диапазона вариации вероятности работоспособности отдельных ребер. Естественно, что наличие остового дерева в графе является более существенным ограничением, чем любой простой цепи.

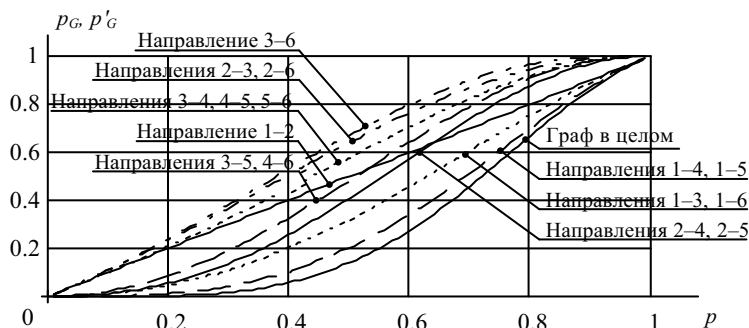


Рис. 2. Зависимость вероятности связности в различных направлениях связи p'_G и сети связи в целом p_G от вероятности работоспособности линий p

Интересным моментом оказывается разделяющий вид кривой вероятности связности для направления 1–2. Так, для направлений 3–6, 2–3, 2–6, 3–4, 4–5, 5–6, для которых любая простая цепь не содержит ребра 1–2, вероятность связности превышает аналогичные значения для направления 1–2, и, наоборот, те направления (1–3, 1–4, 1–5, 1–6), у которых все простые цепи обязательно содержат ребро 1–2, характеризуются меньшими величинами вероятностей связности. Необходимо уточнить, что решающим фактором здесь выступает наличие простой цепи для всех рассматриваемых направлений в виде единственного ребра. Действительно, для направлений 3–5, 4–6, 2–4 и 2–5 кривая для направления 1–2 теряет разделяющие свойства, поскольку для них минимальная простая цепь содержит уже два ребра.

Также отметим, что для ряда направлений связи, например 1–4 и 1–5, вероятности работоспособности идентичны во всей области определения. Это связано со свойством симметрии рассматриваемого графа при условии эквивалентности показателей надежности ребер. В то же время несколько неожиданным выглядит равенство вероятностей связности для направлений 3–4, 4–5 и 5–6, поскольку ребро 4–5 не симметрично ни одному из оставшихся ребер (несомненно, ребра 3–4 и 5–6 таковыми являются). Однако здесь следует учесть вид простых цепей для рассматриваемых направлений связи. К наиболее короткой подобной цепи относится для всех направлений отдельное ребро, а вот оставшиеся простые цепи можно представить как последовательное соединение двух ребер и компоненты трехзвенного кольца 2–3–6 с той лишь разницей, что для симметричных направлений 3–4 и 5–6 в простых цепях сначала идут ребра, а затем компонента кольца, а для направления 4–5 характерно чередование ребро, компонента кольца и ребро.

Метод прямого перебора состояния системы связи применяется ограниченно, но благодаря простоте алгоритмов используется в качестве вспомогательного средства для проверки правильности работы сложных программ, реализующих более эффективные методы расчета.

Оценить вычислительную сложность расчета вероятности связности методом перебора состояний возможно, используя границу сложности алгоритма поиска в глубину, применяемого для проверки связности графа (вычисления функции связности a_k), равной $O(n)$. Тогда из выражения (1) и формулы Стирлинга

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

понятно, что число требуемых операций составляет величину порядка $O\left(n^2 C_n^{n/2}\right) \approx O\left(n^{1.52^n}\right)$. Отсюда ясно, что реализация рассматриваемого метода возможна только для относительно простых графов с числом n ребер не более нескольких десятков (рис. 3). Отметим, что данный способ вычисления вероятности связности можно отнести к алгоритмам с экспоненциальной сложностью.



Рис. 3. Зависимость десятичного логарифма вычислительной сложности z расчета вероятности связности методом перебора состояний от числа n ребер в исследуемом графе

3. Последовательный синтез структур сетей связи на основе вероятности связности. Метод перебора при всех его недостатках обладает одним существенным достоинством — он собирает базу всех возможных комбинаций состояния сети связи. Таким образом, метод перебора возможно применять для синтеза структур сетей путем последовательного добавления или удаления ребер графа. Действительно, добавление любого ребра в графе не может привести к снижению числа несвязных состояний. В результате при анализе результирующего графа можно проанализировать лишь несвязные состояния ($b_i = 0$) исходного графа и те из них, которые приведут к появлению связных состояний, учитывать при расчете надежности. Наоборот, при удалении ребра число связных состояний не может увеличиться. Следовательно, целесообразно рассмотреть все связные состояния ($b_i = 1$) и установить, какие из них при удалении ребра переходят в несвязные.

Математически подобные выводы можно формализовать следующим образом.

Пусть в исходный граф G добавляется ребро l , которое является подграфом. В результате образуется результирующий граф H , обладающий по крайней мере вероятностью связности p_H , не меньшей, чем исходный граф G . Формула полной вероятности позволяет представить вероятность связности в виде суммы:

$$p_H = p_l p_{H/l} + \bar{p}_l p_{H/\bar{l}},$$

где p_l , $\bar{p}_l$ — вероятности связности и несвязности ребра l ; $p_{H/l}$, $p_{H/\bar{l}}$ — вероятности связности результирующего графа H при условии, что ребро l связно и несвязно соответственно.

Условная вероятность $p_{H/\bar{l}}$, по сути, характеризует ситуацию, когда добавляемое ребро l несвязно. Такое событие эквивалентно событию связности исходного графа G . Следовательно, выполняется равенство $p_{H/\bar{l}} = p_G$, а значит,

$$p_H = p_l p_{H/l} + p_l' p_G.$$

Таким образом, при расчете вероятности связности результирующего графа нет необходимости перебирать все состояния данного графа. Достаточно изучить поведение условной вероятности $p_{H/l}$ для расчета первого слагаемого, а второе определяется на основе оценок вероятности связности, полученных при анализе исходного графа.

Случай исключения ребра несколько иной. Удаление ребра приводит к снижению числа состояний по сравнению с состояниями исходного графа. Таким образом, сложность вычислений и так оказывается в 2 раза меньшей. Дополнительного уменьшения количества исследуемых состояний можно добиться, если учесть, что удаление ребра никоим образом не изменяет несвязные состояния, а следовательно, в их расчете необходимость отпадает. В итоге процедура определения графа с максимальной надежностью сводится к последовательному анализу всех графов с удаленными соответствующими ребрами на основе только связных состояний исходного графа.

Пример 2. Граф исследуемой сети связи приведен на рис. 1. Все узлы сети являются абсолютно надежными, а вероятность работоспособности любой линии связи равна 0.9. Определить, какое из несуществующих ребер целесообразно достроить в графе с точки зрения надежности сети связи в направлении 1–5 и в целом с помощью метода перебора состояний.

Дано: G , $p = 0.9$.

Найти: l_8 , l'_8 .

Воспользуемся результатами, полученными в примере 1. Потенциально добавляемыми являются восемь ребер: 1–3, 1–4, 1–5, 1–6, 2–4, 2–5, 3–5 и 4–6. Соответственно для каждого несвязного состояния k необходимо оценить функцию связности с учетом добавления каждого из ребер. Результаты расчета условных вероятностей приведены в табл. 3.

Таблица 3. Условные вероятности $p_{H/l}$ для направления связи 1–5 в графе

Добавленное ребро	Аналитическая форма $p_{H/l}$	$p_{H/l}$
1–3	$2p^2q^5 + 12p^3q^4 + 24p^4q^3 + 19p^5q^2 + 7p^6q^1 + p^7q^0$	0.979
1–4	$p^1q^6 + 6p^2q^5 + 17p^3q^4 + 28p^4q^3 + 20p^5q^2 + 7p^6q^1 + p^7q^0$	0.988
1–	$p^0q^7 + 7p^1q^6 + 21p^2q^5 + 35p^3q^4 + 35p^4q^3 + 21p^5q^2 + 7p^6q^1 + p^7q^0$	1
1–6	$p^1q^6 + 6p^2q^5 + 16p^3q^4 + 25p^4q^3 + 19p^5q^2 + 7p^6q^1 + p^7q^0$	0.98
2–4	$p^2q^5 + 6p^3q^4 + 15p^4q^3 + 14p^5q^2 + 6p^6q^1 + p^7q^0$	0.89
2–5	$p^1q^6 + 6p^2q^5 + 15p^3q^4 + 20p^4q^3 + 15p^5q^2 + 6p^6q^1 + p^7q^0$	0.9
3–5	$p^2q^5 + 7p^3q^4 + 15p^4q^3 + 14p^5q^2 + 6p^6q^1 + p^7q^0$	0.89
4–6	$2p^3q^4 + 11p^4q^3 + 13p^5q^2 + 6p^6q^1 + p^7q^0$	0.881

Таким образом, максимальная вероятность связности в направлении связи 1–5 достигается при добавлении ребра 1–5:

$$p'_H = p_l p_{H/l} + p_l' p_G = p \cdot p_{H/l} + q \cdot p'_G = 0.9 \cdot 1 + 0.1 \cdot 0.871 = 0.987.$$

Аналитический вид вероятности для данного варианта получить достаточно легко, поскольку $p_{H/l} = 1$ (табл. 3):

$$p'_H = p \cdot 1 + q \cdot p^3(3p^4 - 7p^3 + 3p^2 + p + 1) = p(-3p^7 + 10p^6 - 10p^5 + 2p^4 + p^2 + 1).$$

Отметим, что в этом случае изменился и показатель степени вероятности исправной работы, вынесенный за скобки, поскольку здесь ребро 1–5 является минимально связным подграфом.

В случае же минимальной вероятности связности, получаемой при добавлении ребра 4–6:

$$p'_H = 0.9 \cdot 0.881 + 0.1 \cdot 0.871 = 0.88,$$

вывод аналитического выражения оказывается уже затруднительным. Здесь условная вероятность уже не равна единице, а значит, требуется знание количества и величин всех конституент (табл. 3):

$$\begin{aligned} p_{H/l} &= 2p^3q^4 + 11p^4q^3 + 13p^5q^2 + 6p^6q^1 + p^7q^0, \\ p'_H &= p \cdot (2p^3q^4 + 11p^4q^3 + 13p^5q^2 + 6p^6q^1 + p^7q^0) + q \cdot p^3(3p^4 - 7p^3 + 3p^2 + p + 1) = \\ &= p^3(15p^4 - 4p^5 - 18p^3 + 5p^2 + 2p + 1). \end{aligned}$$

Аналогичным образом определяется наиболее значимое добавляемое ребро для сети в целом. Потенциально добавляемыми остаются ранее указанные восемь ребер. Результаты приведены в табл. 4.

Таблица 4. Условные вероятности $p_{H/l}$ для графа в целом

Добавленное ребро	Аналитическая форма $p_{H/l}$	$p_{H/l}$
1–3	$18p^4q^3 + 18p^5q^2 + 7p^6q^1 + p^7q^0$	0.968
1–4	$24p^4q^3 + 20p^5q^2 + 7p^6q^1 + p^7q^0$	0.984
1–5	$24p^4q^3 + 20p^5q^2 + 7p^6q^1 + p^7q^0$	0.984
1–6	$18p^4q^3 + 18p^5q^2 + 7p^6q^1 + p^7q^0$	0.968
2–4	$13p^4q^3 + 14p^5q^2 + 6p^6q^1 + p^7q^0$	0.888
2–5	$13p^4q^3 + 14p^5q^2 + 6p^6q^1 + p^7q^0$	0.888
3–5	$10p^4q^3 + 13p^5q^2 + 6p^6q^1 + p^7q^0$	0.88
4–6	$10p^4q^3 + 13p^5q^2 + 6p^6q^1 + p^7q^0$	0.88

Таким образом, максимальная вероятность связности сети в целом достигается при добавлении ребра 1–4 или 1–5:

$$p_H = p_l p_{H/l} + p_l p_G = p \cdot p_{H/l} + q \cdot p_G = 0.9 \cdot 0.984 + 0.1 \cdot 0.862 = 0.972.$$

Вывод аналитической формы вероятности связности здесь также оказывается нетривиальным, хотя для обоих случаев приводит к одинаковым результатам (табл. 4):

$$\begin{aligned} p_{H/l} &= 24p^4q^3 + 20p^5q^2 + 7p^6q^1 + p^7q^0, \\ p_H &= p \cdot (24p^4q^3 + 20p^5q^2 + 7p^6q^1 + p^7q^0 + p^7q^0) + q \cdot p^5(6p^2 - 16p + 11) = \\ &= p^5(-16p^3 + 61p^2 - 79p + 35). \end{aligned}$$

Отметим, что минимальная вероятность связности $0.9 \cdot 0.88 + 0.1 \cdot 0.862 = 0.878$ достигается при добавлении ребер 3–5 и 4–6 (табл. 4), где

$$\begin{aligned} p_{H/l} &= 10p^4q^3 + 13p^5q^2 + 6p^6q^1 + p^7q^0, \\ p_H &= p \cdot (10p^4q^3 + 13p^5q^2 + 6p^6q^1 + p^7q^0) + q \cdot p^5(6p^2 - 16p + 11) = \\ &= p^5(-8p^3 + 32p^2 - 44p + 21). \end{aligned}$$

Следует несколько прояснить причины идентичного роста показателя надежности при добавлении различных ребер. Решающим фактором оказывается изотропность получаемых графов. Действительно, добавление ребра 3–5 и 4–6, хотя формально приводит к различным результирующим графам, однако изменение порядка нумерации вершин сводит их к тождественным. Нужно оговориться, что подобное явление характерно лишь для случая эквивалентности вероятности работоспособности отдельных ребер.

Оценить вычислительную сложность последовательного синтеза структур сетей связи на основе вероятности связности можно на основе полученной ранее сложности расчета вероятности связности методом перебора состояний, равной $O(n^{1.5}2^n)$. Учитывая, что при добавлении ребра необходимо рассмотреть еще $0.5 \cdot v(v-1) - n$ вариантов, то число требуемых операций составляет величину порядка $O(v^2 n^{1.5} 2^n)$. Отсюда ясно, что реализация рассматриваемого метода также возможна только для относительно простых графов с числом n ребер не более нескольких десятков (рис. 4). Отметим, что количество v вершин в синтезируемом графе слабо влияет на требуемую производительность процессора. Данный метод последовательного синтеза также можно отнести к алгоритмам с экспоненциальной сложностью.

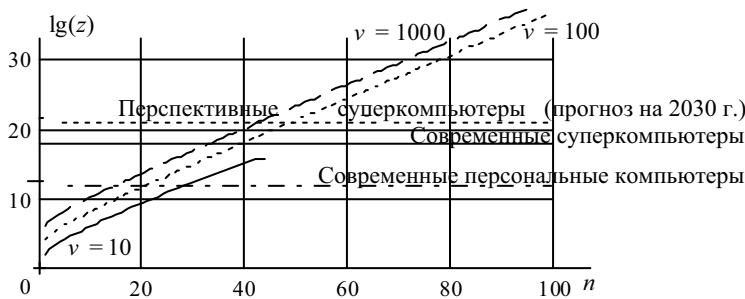


Рис. 4. Зависимость десятичного логарифма вычислительной сложности z последовательного синтеза структур сетей связи на основе вероятности связности от числа n ребер в исследуемом графе

4. Заключение. Предложенный метод последовательного синтеза может быть представлен в виде этапов, на каждом из которых добавляется одно или несколько ребер. При этом следует учесть, что увеличение числа используемых ребер приводит к росту числа вариаций функций связности графа с добавленным ребром, а значит, и к увеличению трудоемкости операций вычисления условных вероятностей. В то же время подобное усложнение позволяет более точно решать задачу синтеза, поскольку не во всех ситуациях последовательное добавление ребер эквивалентно перебору всех возможных альтернатив.

С одной стороны, как рассмотренный метод анализа структур сетей связи на основе перебора состояния, так и метод синтеза отличаются существенной простотой реализации процессов проводимых вычислений. Именно это обстоятельство позволяет использовать данные методы в качестве эталонных. С другой стороны, точность проводимых расчетов зависит исключительно от возможностей аппаратно-программных комплексов и никоим образом не ограничивается непосредственно самим методом перебора состояний. В результате вычисление вероятности связности с прецизионной точностью, характерное для ситуаций сравнительного анализа сетей связи с коэффициентами готовности и живучести отдельных элементов сети, близ-

ких к пороговым значениям, также оказывается выполнимым на основе описанных методов.

Литература

1. Zuev K. M., Wu S., Beck J. L. General network reliability problem and its efficient solution by Subset Simulation // Probabilistic Engineering Mechanics. 2015. Vol. 40. P. 25–35.
2. Mussel C., Hopfensitz M., Kestler H. A. Boolnet package vignette. 2019.
https://cran.r-project.org/web/packages/BoolNet/vignettes/BoolNet_package_vignette.Snw.pdf (дата обращения: 21.08.2021 г.).
3. Teruggia R. Reliability analysis of probabilistic networks: PhD thesis. Turin: Univ. of Turin, School of Doctorate in Science and High Technology, 2010. 214 p.
4. Дудник Б. Я., Овчаренко В. Ф. Надежность и живучесть систем связи / под ред. Б. Я. Дудника. М.: Радио и связь. 1984. 216 с.
5. ГОСТ Р 53111–2008. Устойчивость функционирования сети связи общего пользования. Требования и методы проверки. М.: Стандартинформ, 2009. 16 с.
6. Обоскалов В. П. Структурная надежность электроэнергетических систем: учеб. пособие. Екатеринбург: Урал. федерал. ун-т, 2012. 194 с.
7. Батенков К. А. Числовые характеристики структур сетей связи // Труды СПИИРАН. 2017. № 4. С. 5–28.
8. Филлин Б. П. Методы анализа структурной надежности сетей связи. М.: Радио и связь, 1988. 208 с.
9. Батенков К. А. Общие подходы к анализу и синтезу структур сетей связи // Современные проблемы телекоммуникаций: Материалы Рос. науч.-технич. конференции. Новосибирск: Сиб. гос. ун-т телекоммуникаций и информатики, 2017. С. 19–23.
10. Половко А. М., Гуров С. В. Основы теории надежности. СПб.: БХВ-Петербург, 2006. 704 с.
11. Nozaki T., Nakano T., Wadayama T. Analysis of breakdown probability of wireless sensor networks with unreliable relay nodes // 2017 IEEE Intern. Symposium Inf. Theory. Aachen, Germany, 2017. P. 481–485.
12. Takabe S., Nakano T., Wadayama T. Fault tolerance of random graphs with respect to connectivity: phase transition in logarithmic average degree // arXiv: 1712.07807, 2017.
13. Tutte W. T. Graph theory. Addison: Addison-Wesley Publishing Company, 1984. 423 p.
14. Yagan O., Makowski A. M. Zero-one laws for connectivity in random key graphs // IEEE Trans. Inf. Theory. 2012. Vol. 58. N 5. P. 2983–2999.
15. Батенков К. А. К вопросу оценки надежности двухполюсных и многополюсных сетей связи // Современные проблемы радиоэлектроники: сб. науч. трудов. Красноярск: Сиб. федерал. ун-т, 2017. С. 604–608.
16. Zhao J., Yagan O., Gligor V. Connectivity in secure wireless sensor networks under transmission constraints // Allerton Conference on Communication, Control, and Computing. 2014. P. 1–18.
17. Nucez A., Lacasa L., Valero E., Gyme J. P., Luque B. Detecting series periodicity with horizontal visibility graphs // Intern. J. Bifurc. Chaos. 2012. N 22. P. 1–10.
18. Zhang H. C., Xu D. L., Lu C., Qi E. R., Tian C., Wu Y. S. Connection effect on amplitude death stability of multi-module floating airport // Ocean Eng. 2017. P. 46–56.
19. Батенков К. А. Устойчивость сетей связи. Орел: Академия Федеральной службы охраны Российской Федерации, 2017. 277 с.
20. Brown J. I., Tufts J. On the roots of domination polynomials // Graphs Combin. 2014. N 30. P. 527–547.
21. Cox D. On network reliability: PhD thesis. Halifax, Nova Scotia: Dalhousie University, 2013. 209 p.
22. Батенков К. А. Об анализе живучести сетей связи на основе вероятностного подхода // Неделя науки СПбПУ: Материалы науч. конференции с международ. участием. Институт физики, нанотехнологий и телекоммуникаций. СПб.: Изд-во С.-Петерб. политехнич. ун-та, 2016. С. 6–8.
23. Huh J. H-vectors of matroids and logarithmic concavity // Adv. Math. 2015. N 270. P. 49–59.
24. Harris D. G., Srinivasan A. Improved bounds and algorithms for graph cuts and network reliability // Proceedings of the 25th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms. ACM-SIAM: ACM Press, 2014. P. 259–278.
25. Karger D. R. A fast and simple unbiased estimator for network (un)reliability // Proceedings of the 48th annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science. New Brunswick, New Jersey: IEEE Computer Society Technical Committee on Mathematical Foundations of Computing, 2016. P. 635–644.

26. Батенков К. А. Особенности оценки качества функционирования сетей связи // Ресурсо-эффективные системы в управлении и контроле: взгляд в будущее: сб. науч. трудов V Международ. конференции школьников, студентов, аспирантов, молодых ученых. В 3-х т. Т. 1. Томск: Изд-во Томск. политехнич. у-та, 2016. С. 30–31.

27. Mishra K., Trivedi K., Some R. Uncertainty analysis of the remote exploration and experimentation system // Journal of Spacecraft and Rockets, 2012. P. 1032–1042.

28. Ghosh R., Longo F., Frattini F., Russo S., Trivedi K. Scalable analytics for IaaS cloud availability // IEEE Trans. on Cloud Computing. 2014. P. 57–70.

29. Карпов А. Г., Клемешев В. А., Куранов Д. Ю. Определение работоспособности системы, структура которой задана графом // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2020. Т. 16. Вып. 1. С. 41–49.
<https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2020.104>

Статья поступила в редакцию 26 августа 2021 г.

Статья принята к печати 21 июня 2022 г.

Контактная информация:

Батенков Кирилл Александрович — д-р техн. наук, доц.; pustur@yandex.ru

Analysis and synthesis of communication network structures by state enumeration method

K. A. Batenkov

Academy of Federal Guard Service of Russian Federation, 35, Priborostoitelnaya ul., Oryol, 302015, Russian Federation

For citation: Batenkov K. A. Analysis and synthesis of communication network structures by state enumeration method. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2022, vol. 18, iss. 3, pp. 300–315.
<https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2022.301> (In Russian)

One of the methods of analysis and synthesis of communication network structures is considered, based on the simplest approach to calculating the probability of connectivity — the method of iterating over the states of the network edges. Despite its significant drawback, which consists in the considerable complexity of the calculations carried out, it turns out to be quite in demand both at the stage of debugging new analysis methods and when performing the procedure of sequential synthesis of network structures. The proposed method of sequential synthesis can be presented in the form of stages, at each of which one or more edges (network elements) are added. An increase in the number of edges used leads to an increase in the number of variations of the connectivity functions of a graph with an added edge, and hence to an increase in the complexity of operations for calculating conditional probabilities. At the same time, such a complication makes it possible to more accurately solve the synthesis problem, since not in all situations the sequential addition of edges is equivalent to sorting through all possible alternatives. Both the described method of analyzing the structures of communication networks based on the enumeration of states and the synthesis method differ in the essential simplicity of the implementation of the processes of the calculations carried out. It is this circumstance that allows us to use these methods as reference. The accuracy of the calculations depends solely on the capabilities of hardware and software systems and is in no way limited directly by the method of sorting states. As a result, the calculation of the probability of connectivity with precision accuracy, which is typical for situations of comparative analysis of communication networks with the availability and survivability coefficients of individual network elements close to the threshold values, also turns out to be feasible on the basis of the methods considered.

Keywords: network, graph structure, connectivity probability, coefficient of readiness, coefficient of operational readiness, complete state enumeration method.

References

1. Zuev K. M., Wu S., Beck J. L. General network reliability problem and its efficient solution by Subset Simulation. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2015, vol. 40, pp. 25–35.
2. Mussel C., Hopfensitz M., Kestler H. A. *Boolnet package vignette*, 2019. https://cran.r-project.org/web/packages/BoolNet/vignettes/BoolNet_package_vignette.Snw.pdf (accessed: August 21, 2021).
3. Teruggia R. *Reliability analysis of probabilistic networks*. PhD thesis. Turin, Univ. of Turin, School of Doctorate in Science and High Technology Publ., 2010, 214 p.
4. Dudnik B. Ya., Ovcharenko V. F. *Nadezhnost' i zhivuchest' sistem svyazi* [The reliability and survivability of communication systems]. Moscow, Radio i svyaz' Publ., 1984, 216 p. (In Russian)
5. GOST R 53111–2008. *Ustojchivost' funkcionirovaniya seti svyazi obshchego pol'zovaniya. Trebovaniya i metody proverki* [Stability of the public communication network. Requirements and verification methods]. Moscow, Standardinform Publ., 2009, 16 p. (In Russian)
6. Oboskalov V. P. *Strukturnaya nadezhnost' elektroenergeticheskikh sistem* [Structural reliability of electric power systems]. Ekaterinburg, Ural Federal University Press, 2012, 194 p. (In Russian)
7. Batenkov K. A. Chislavye harakteristiki struktur setej svyazi [Numerical characteristics of the structures of communication networks]. *Trudy SPIIRAN* [Proceedings of SPIIRAS], 2017, no. 4, pp. 5–28. (In Russian)
8. Filin B. P. *Metody analiza strukturnoj nadezhnosti setej svyazi* [Methods of analysis of structural reliability of communication networks]. Moscow, Radio i svyaz' Publ., 1988, 208 p. (In Russian)
9. Batenkov K. A. Obshchie podhody k analizu i sintezu struktur setej svyazi [General approaches to the analysis and synthesis of structures of communication networks]. *Sovremennye problemy telekommunikatsiy. Materials of Russian scientific-technical conference* [Modern problems of telecommunications]. Novosibirsk, Siberian State University of Telecommunications and Informatics Press, 2017, pp. 19–23. (In Russian)
10. Polovko A. M., Gurov S. V. *Osnovy teorii nadezhnosti* [Fundamentals of reliability theory]. St Petersburg, BHV-Petersburg Publ., 2006, 704 p. (In Russian)
11. Nozaki T., Nakano T., Wadayama T. Analysis of breakdown probability of wireless sensor networks with unreliable relay nodes. *2017 IEEE Intern. Symposium Inf. Theory*. Aachen, Germany, 2017, pp. 481–485.
12. Takabe S., Nakano T., Wadayama T. *Fault tolerance of random graphs with respect to connectivity: phase transition in logarithmic average degree*. arXiv: 1712.07807, 2017.
13. Tutte W. T. *Graph theory*. Addison, Addison-Wesley Publ., 1984, 423 p.
14. Yagan O., Makowski A. M. Zero-one laws for connectivity in random key graphs. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 2012, vol. 58, no. 5, pp. 2983–2999.
15. Batenkov K. A. K voprosu ocenki nadezhnosti dvuhpolyusnyh i mnogopolyusnyh setej svyazi [To the question of assessing the reliability of bipolar and multipolar networks]. *Sovremennye problemy radioelektroniki. Sbornik nauch. trudov* [Modern problems of radioelectronics]. Krasnoyarsk, Siberian Federal University Press, 2017, pp. 604–608. (In Russian)
16. Zhao J., Yagan O., Gligor V. Connectivity in secure wireless sensor networks under transmission constraints. *Allerton Conference on Communication, Control, and Computing*, 2014, pp. 1–18.
17. Nucez A., Lacasa L., Valero E., Gymez J. P., Luque B. Detecting series periodicity with horizontal visibility graphs. *Intern. J. Bifurc. Chaos*, 2012, no. 22, pp. 1–10.
18. Zhang H. C., Xu D. L., Lu C., Qi E. R., Tian C., Wu Y. S. Connection effect on amplitude death stability of multi-module floating airport. *Ocean Eng.*, 2017, pp. 46–56.
19. Batenkov K. A. *Ustojchivost' setej svyazi* [Network stability]. Oryol, Academy of Federal Guard Service of Russian Federation Press, 2017, 277 p. (In Russian)
20. Brown J. I., Tufts J. On the roots of domination polynomials. *Graphs Combin.*, 2014, no. 30, pp. 527–547.
21. Cox D. *On network reliability*. PhD thesis. Halifax, Nova Scotia, Dalhousie University Press, 2013, 209 p.
22. Batenkov K. A. Ob analize zhivuchesti setej svyazi na osnove veroyatnostnogo podhoda [On the analysis of survivability of communication networks based on probabilistic approach]. *Nedelya nauki SPbPU* [Science week of SPbSPU]. Institut fiziki, nanotekhnologii i telekommunikatsii, St Petersburg, St Petersburg Polytechnical Institute Press, 2016, pp. 6–8. (In Russian)
23. Huh J. H-vectors of matroids and logarithmic concavity. *Adv. Math.*, 2015, no. 270, pp. 49–59.
24. Harris D. G., Srinivasan A. Improved bounds and algorithms for graph cuts and network reliability. *Proceedings of the 25th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*. ACM-SIAM, ACM Press, 2014, pp. 259–278.

25. Karger D. R. A fast and simple unbiased estimator for network (un)reliability. *Proceedings of the 48th annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*. New Brunswick, New Jersey, IEEE Computer Society Technical Committee on Mathematical Foundations of Computing Publ., 2016, pp. 635–644.
26. Batenkov K. A. Osobennosti ocenki kachestva funkcionirovaniya setej svyazi [Features of an estimation of quality of functioning of communication networks]. *Resursoehffektivnye sistemy v upravlenii i kontrole: vzglyad v budushchee* [Resource-efficient system management and control: a look into the future]. Sbornik nauch. trudov of V conference schools, students, postgradient students and young scientists. Tomsk, Tomsk Politekhical University Press, 2016, pp. 30–31. (In Russian)
27. Mishra K., Trivedi K., Some R. Uncertainty analysis of the remote exploration and experimentation system. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 2012, pp. 1032–1042.
28. Ghosh R., Longo F., Frattini F., Russo S., Trivedi K. Scalable analytics for IaaS cloud availability. *IEEE Trans. on Cloud Computing*, 2014, pp. 57–70.
29. Karpov A. G., Klemeshev V. A., Kuranov D. Yu. Opredelenie rabotosposobnosti sistemy, struktura kotoroi zadana grafom [Determining the ability to work of the system, the structure of which is given using graph]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2020, vol. 16, iss. 1, pp. 41–49. <https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2020.104> (In Russian)

Received: August 26, 2021.

Accepted: June 21, 2022.

A u t h o r ' s i n f o r m a t i o n :

Kirill A. Batenkov — Dr. Sci. in Engineering Sciences, Associate Professor; pustur@yandex.ru